بسم الله الرحمن الرحيم

٣٠١٤٩

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده ریاضی و کامپیوتر ـ بخش ریاضی

پایان‌نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی‌ارشد ریاضی کاربردی

تحت عنوان:

درونیابی و تقریب توابع توسط چندجمله‌ایهای قطعه قطعه
و
اسپلاینهای با گره‌های آزاد

استاد راهنما:

دکتر محمود محسنی مقدم

مولف :

محمدحسین زراعتی

شهریور ۱۳۷۶

بسمه تعالی

این پایان‌نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی ـ دانشکده ریاضی و کامپیوتر

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی‌شود.

دانشجو : محمدحسین زراعتی زراعتی

استاد راهنما: دکتر محمود محسنی مقدم

داور ۱ : دکتر ماه‌بانو تاتا

داور ۲ : دکتر رستم ثابتی

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه: آقای دکتر ناصح‌زاده

تقدیم به

روح پدر مرحومم

و

مادر گرامیم

تشکر و قدردانی

درخت تو گر بار دانش بگیرد   به زیر آوری چرخ نیلوفری را

با حمد و سپاس به درگاه ایزد یکتا که تحصیل علم را یکی از راههای رسیدن انسان به کمال واقعی قرار داد و به لطف و کرم خویش قبول کرد تا این حقیر به گوشه‌ای از اقیانوس بی‌پایان مجهولات پی ببرم. و با سلام به روان پاک پدرم، که در سراسر زندگیش نمونه‌ای از تلاش، صبر و مهربانی بود.

برخود لازم می‌دانم که از زحمات بیدریغ مادر مهربانم که در تمامی مراحل زندگی، بزرگترین مایهٔ دلگرمی، مشوق و راهنمای من بوده است قدردانی نمایم. همچنین از عنایات برادر ارجمند و خواهر عزیزم که بی‌شک یکی از مؤثرترین مشوقین من بوده‌اند کمال تشکر را دارم.

از زحمات استاد ارجمندم آقای دکتر محمود محسنی مقدم که در طول مدت تحصیل بالاخص در حین انجام این پایان‌نامه استاد راهنمایم بوده‌اند سپاسگزارم. همچنین از کلیه اساتید دانشکده ریاضی و کامپیوتر که در تعلیم اینجانب کوشیده‌اند، بخصوص از خانم دکتر ماه‌بانو تاتا و آقای دکتر رستم ثابتی که زحمت مطالعه و داوری پایان‌نامه را پذیرفته‌اند، کمال تشکر را دارم.

در خاتمه از خانم باقری که تایپ پایان‌نامه را بر عهده داشته‌اند سپاسگزارم و موفقیت و سعادت روزافزون همگی را از خداوند منان مسئلت دارم.

محمدحسین زراعتی

شهریور ۱۳۷۶

چکیده

سئوال عمده‌ای که در بحث درونیابی و تقریب توابع مطرح می‌شود، این است که: آیا می‌توان با آزاد گذاشتن انتخاب گره‌ها در تقریب، محل بهینه‌ای برای آنها یافت، به گونه‌ای که به یک بهترین تقریب چندجمله‌ای قطعه قطعه دست یافت؟

پاسخ سئوال فوق مثبت است و در این پایان‌نامه ابتدا در فصول اول و دوم روشهای مقدماتی درونیابی و تقریب، بخصوص چندجمله‌ایهای قطعه قطعه و اسپلاینها معرفی شده‌اند. در فصل سوم استفاده از برخی ابزارهای کنترلی و روشهایی برای افزایش دقت درونیابی و تقریب توصیف شده‌اند. همچنین در انتهای فصل سوم الگوریتم رمز برای محاسبه تقریبی چندجمله‌ای اسپلاین درجهٔ n با k گرهٔ ثابت ذکر شده است. در فصل چهارم دو الگوریتم مختلف جهت یافتن محل گره‌های بهینه برای درونیابی و تقریب عنوان شده‌اند و در هر دو مورد مسائل همگرایی و مثالهای عددی بررسی شده است.

فهرست مطالب

فصل ۱

درونیابی و تقریب

۱_۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

یکی از مفیدترین و معروفترین رده‌های توابع که خط حقیقی را بتوی خود می‌نگارد، ردهٔ چندجمله‌ایهای جبری است، یعنی مجموعهٔ توابعی بصورت:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

که در آن n یک عدد صحیح نامنفی و $a_0, \ldots, a_n$ ثابتهای حقیقی می‌باشند. یک دلیل عمده بر اهمیت آنها این است که توابع پیوسته را به طور یکنواخت تقریب می‌کنند، یعنی به ازای هر تابع تعریف شده و پیوسته بر یک بازهٔ بسته، یک چندجمله‌ای وجود دارد که هر قدر بخواهیم به تابع مفروض "نزدیک" است. این مطلب در قضیهٔ زیر به طور دقیقتر بیان می‌شود:

قضیه ۱_۱_۱: (تقریب وایراشتراوس (Weicrstrass)) هرگاه تابع f بر $[a,b]$ تعریف شده و پیوسته باشد و $\varepsilon > 0$ نیز مفروض باشد، آنگاه چندجمله‌ایی چون P که بر $[a,b]$ تعریف شده است وجود دارد به طوری که:

$$\forall x \in [a,b] \qquad |f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

اثبات: در [5].

اگر چه این قضیه از دیدگاه نظری بسیار مفید است ولی مُتاسفانه نمی‌توان از آن برای مقاصد عملی استفاده کرد. یعنی به جای یافتن یک چندجمله‌ای که تابعی را بر کل یک بازه به طور یکنواخت تقریب کند، اغلب بهتر است که چندجمله‌ایی بیابیم که در شرایطی که برای مسئله مورد نظر مفیدند صدق کند و در عین حال به نوعی به آن تابع "نزدیک" باشد.

امروزه برای این منظور روشهای درونیابی مختلفی علاوه بر درونیابی چندجمله‌ای به کار گرفته می‌شوند،

نظیر درونیابی مثلثاتی، درونیابی کسری و ... اما آنچه که انتخاب چندجمله‌ایها را بعنوان توابع تقریب زننده قوی‌تر می‌کند می‌توان در دلایل زیر خلاصه کرد:

۱. چندجمله‌ایها تشکیل یک فضای خطی با بعد متناهی می‌دهند.

۲. محاسبهٔ مشتق و تابع اولیه یک چندجمله‌ای به سادگی امکان‌پذیر است.

۳. چندجمله‌ایها عموماً توابع هموار هستند.

۴. یک چندجمله‌ای از درجه n حداکثر دارای n ریشه است.

۵. اکثر ماتریسهای حاصل از تقریب‌گیری بوسیلهٔ چندجمله‌ایها، نامنفرد هستند.

حال قبل از وارد شدن در بحث اصلی ابتدا نماد زیر را معرفی کرده و سپس به طور مختصر و گذرا به معرفی روشهای مقدماتی درونیابی می‌پردازیم.

نمادگذاری: مجموعهٔ تمام چندجمله‌ایهای از درجهٔ کوچکتر یا مساوی n را با Π_n نمایش می‌دهیم، یعنی:

$$\Pi_n = \{a_r x^r + \ldots + a_1 x + a_0 \quad : \quad r \leq n\}$$

۱_۲ درونیابی لاگرانژ (Lagrange Interpolation)

قضیه ۱_۲_۱: هرگاه $x_0, \ldots, x_n$، $(n+1)$ نقطهٔ متمایز بوده و f تابعی با مقادیر معلوم در این نقاط باشد، آنگاه چندجمله‌ای یکتایی مانند $P \in \Pi_n$ وجود دارد، با این خاصیت که:

$$P(x_i) = f(x_i) \qquad ; \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

و این چندجمله‌ای با رابطهٔ زیر مشخص می‌شود:

$$\begin{aligned} P(x) &= f(x_\circ)L_\circ(x) + \ldots + f(x_n)L_n(x) \\ &= \sum_{i=\circ}^{n} f(x_i)L_i(x) \end{aligned}$$

که در آن به ازای $k = \circ, ١, \ldots, n$ داریم:

$$L_k(x) = \prod_{\substack{i=\circ \\ i\neq k}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

اثبات: در [13].

١_٣ درونیابی هرمیت (Hermite Interpolation)

اگر علاوه بر معلوم بودن مقدار تابع در نقاط خاص مقادیر برخی از مشتقات تابع را نیز در این نقاط در اختیار داشته باشیم می‌توانیم از درونیابی هرمیت بصورت زیر استفاده کنیم:

قضیه ١_٣_١: هرگاه $x_\circ, \ldots, x_m$، $(m + ١)$ نقطهٔ متمایز بوده و $f^{(k)}(x_i)$ به ازای $k = \circ, ١, \ldots, n_i - ١$ و $i = \circ, ١, \ldots, m$ مقادیر تابع و برخی مشتقات آن در این نقاط نیز معلوم باشند، آنگاه چندجمله‌ای یکتایی مانند $P \in \Pi_n$ وجود دارد که:

$$n + ١ = \sum_{i=\circ}^{m} n_i,$$

$$P^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i) \qquad ; \quad k = \circ, ١, \ldots, n_i - ١, \quad i = \circ, ١ \ldots, m$$

و این چندجمله‌ای با رابطهٔ زیر مشخص می‌شود:

$$P(x) = \sum_{i=\circ}^{m} \sum_{k=\circ}^{n_i - ١} f^{(k)}(x_i)L_{ik}(x)$$

که در آن:

$$\ell_{ik}(x)=\frac{(x-x_i)^k}{k!}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{m}\left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right)^{n_j} \qquad ;\ 0\leq i\leq m,\quad 0\leq k\leq n_i-1$$

و:

$$L_{i,n_i-1}(x)=\ell_{i,n_i-1}(x) \qquad ;\ i=0,1,\ldots,m$$

و به ازای $k=n_i-2,n_i-3,\ldots,0$ داریم:

$$L_{ik}(x)=\ell_{ik}(x)-\sum_{j=k+1}^{n_i-1}\ell_{ik}^{(j)}(x_i)L_{ij}(x)$$

اثبات: در [14].

۱_۴ درونیابی کسری (Rational Interpolation)

اگر بخواهیم از یک تابع کسری برای درونیابی نقاط $(x_i,f(x_i))$، به ازای $i=0,1,\ldots$ استفاده کنیم، هدف یافتن تابعی مانند Φ است که بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Phi^{\mu,\nu}(x)=\frac{P^\mu(x)}{Q^\nu(x)}=\frac{a_\mu x^\mu+\ldots+a_1x+a_0}{b_\nu x^\nu+\ldots+b_1x+b_0}$$

واضح است که $\Phi^{\mu,\nu}(x)$ را می‌توان بوسیلهٔ $\mu+\nu+1$ معادلهٔ:

$$\Phi^{\mu,\nu}(x_i)=f(x_i) \qquad ;\ i=0,1,\ldots,\mu+\nu \tag{۱_۴_۱}$$

بدست آورد، یعنی ضرایب a_i و b_i بایستی دستگاه همگن معادلات خطی زیر را ارضا کنند:

$$P^\mu(x_i)-f(x_i)Q^\nu(x_i)=0 \qquad ;\ i=0,1,\ldots,\mu+\nu \tag{۲_۴_۱}$$

قضیه ۱ـ۴ـ۳: اگر دستگاه معادلات خطی همگن (۱ـ۴ـ۲) دارای جواب $\Phi^{\mu,\nu}(x)$ باشد، به طوری که صورت و مخرج آن نسبت به هم اول باشند، در آنصورت دستگاه معادلات (۱ـ۴ـ۱) حل پذیر خواهد بود.

قابل ذکر است که بکارگیری درونیابی کسری در مورد توابعی که دارای نقاط منفرد باشند، عموماً بهتر از دیگر روشها عمل می‌کند. برای جزئیات بیشتر رجوع کنید به [14].

۱ـ۵ درونیابی مثلثاتی (Trigonometric Interpolation)

در درونیابی مثلثاتی از ترکیب توابعی بصورت $\sin(hx)$ و $\cos(hx)$ بازای hهای صحیح استفاده می‌شود، برای n نقطهٔ $(x_i, f(x_i))$ که $i = ۰, ۱, \ldots, n-۱$ به دنبال تابعی بصورت:

$$\Psi(x) = \frac{A_۰}{۲} + \sum_{h=۱}^{m}(A_h \cos(hx) + B_h \sin(hx)) \qquad ; \quad n = ۲m + ۱$$

و یا:

$$\Psi(x) = \frac{A_۰}{۲} + \sum_{h=۱}^{m-۱}(A_h \cos(hx) + B_h \sin(hx)) + \frac{A_m}{۲}\cos(mx) \qquad ; \quad n = ۲m$$

می‌باشیم. با استفاده از رابطهٔ دموآور (De Moiver) یعنی $e^{kix} = \cos(kx) + i\sin(kx)$ و افراز یکنواخت فاصله $[۰, ۲\pi]$ بصورت:

$$x_k = \frac{۲k\pi}{n} \qquad ; \quad k = ۰, ۱, \ldots, n-۱$$

مسئله تبدیل به یافتن چندجمله‌ای:

$$P(x) = \beta_۰ + \beta_۱ e^{ix} + \ldots + \beta_{n-۱} e^{(n-۱)ix}$$

با ضرایب مختلط β_i می‌شود، به طوری که داشته باشیم:

$$P(x_i) = f(x_i) \qquad ; \quad i = ۰, ۱, \ldots, n - ۱$$

برای تعیین ضرایب β_i [14] را ببینید.

ضمناً قابل ذکر است که بکارگیری درونیابی مثلثاتی عموماً برای داده‌هایی که دارای دورهٔ تناوب مشخص باشند مناسب‌تر است.

در اینجا به سبب آنکه توجه ما در این پایان‌نامه معطوف به چندجمله‌ایهای قطعه‌قطعه (piecewise polynomial) و بخصوص اسپلاینها (spline) می‌باشد، برای بررسی آنها فصل جداگانه‌ای را اختصاص داده‌ایم و در مرور روشهای مقدماتی درونیابی به همین مختصر بسنده کرده و برای جزئیات بیشتر و مثالهای عددی در این باب خواننده را به [5] و [6] و [14] ارجاع می‌دهیم.