**دانشگاه ولی عصر رفسنجان –دانشکده ریاضی و کامپیوتر**

**عنوان : بررسی روش های رانگ – کوتا برای معادلات دیفرانسیل تصادفی**

**نام و نام‌خانوادگی**: محبوبه محترم

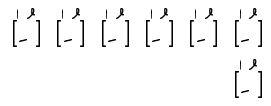
**مقطع تحصیلی:** کارشناسی ارشد

**رشته و گرایش:** ریاضی- آنالیزعددی

**دانشکده‌ی:** ریاضی و کامپیوتر

**استاد راهنما** : دکترمهران نامجو

**تاریخ دفاع:** ۱۳۸۹/۴/۲۱



# باسمه‌تعالی

## چکیده

در پایان‌نامه‌ی حاضر به مطالعه و بررسی یک خانواده کلی از روش‌های رانگ – کوتا تصادفی که نسبت به روش‌های موجود قبلی کارآمدتر است برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی به صورت:

$$dY(t) = g_0(Y(t))\ dt + g_1(Y(t))\ \circ dW(t), \qquad Y(t_0) = Y_0,\ t \in [t_0, T],$$

پرداخته می‌شود. شرایط مرتبه برای خانواده‌ای از روش‌های رانگ – کوتا تصادفی از مرتبه قوی یک با مینیمم ثابت خطا بیان شده و در ادامه خانواده‌ای از روش‌های رانگ – کوتا تصادفی از مرتبه قوی یک‌ونیم که اساس مؤلفه قطعی آن روش رانگ – کوتا کلاسیک است ساخته می‌شود. در پایان کارایی این روش‌ها توسط چند مثال عددی نشان داده شده است.

# پیش‌گفتار

رفتار بسیاری از پدیده‌های فیزیکی و طبیعی در علوم و تکنولوژی را می‌توان به وسیله مدل‌هایی که منجر به معادلات دیفرانسیل معمولی می‌شود مدل‌سازی نمود. حوزه معادلات دیفرانسیل معمولی حوزه‌ای وسیع است به‌طوری‌که روش‌های گوناگونی برای حل عددی هر دستگاه از معادلات در این عرصه وجود دارد. تاکنون در بسیاری از مدل‌هایی که برای تعریف یک رویداد فیزیکی بیان شده، تأثیر مؤلفه‌های تصادفی به دلیل مشکلاتی نظیر کمبود روش‌های عددی مناسب و غیر قابل دسترس بودن کامپیوترهای پرتوان نادیده گرفته شده است. مدل‌های قطعی می‌توانند حالت‌های مطلوبی را نمایش دهند به شرط آن‌که اثرهای تصادفی در این مدل‌ها در نظر گرفته شود که این منجر به معادلات دیفرانسیل تصادفی می‌شود. معادله دیفرانسیل تصادفی در عرصه‌هایی نظیر مدل‌بندی سنیتیک شیمیایی، ریاضات مالی، هیدرولوژی، تنظیم ژنتیکی، طراحی مدارهای $VLSI$، مدل انتشار آشفته و غیره کاربرد وسیعی دارد. روش‌های رانگ – کوتا مزایایی در حل عددی معادلات دیفرانسیل تصادفی دارد به‌طوری‌که این روش‌ها پایه‌ای برای توسعه روش‌های مرتبه بالاتر که مناسب برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی هستند می‌باشد. اگرچه استفاده از روش‌های رانگ – کوتا تصادفی با مرتبه بالاتر هزینه محاسباتی زیادی دارد اما می‌توان به منظور کاهش این هزینه‌های محاسباتی از تقریب زدن انتگرال‌های تصادفی استفاده نمود، که این سبب کارایی این دسته از روش‌ها می‌شود. مطالب این پایان‌نامه بدین شرح است: در فصل اول با استفاده از مراجع [۵]، [٦] و [۸] تعاریف پایه‌ای در احتمال و فرآیندهای تصادفی یادآوری می‌شود، فصل دوم مقدماتی را برای انتگرال تصادفی فراهم می‌کند که از مراجع [۳] و [۸] استفاده شده است، یک نتیجه اساسی که در این فصل مطرح می‌شود فرمول ایتو است که در واقع یک

نمونه تصادفی از قاعده زنجیره‌ای حسابان معمولی می‌باشد، سپس ارتباط بین انتگرال ایتو با استراتنویچ بیان می‌شود. در فصل سوم روش‌های رانگ – کوتا و نظریه درختان ریشه‌دار برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی از مرجع [۹] بیان شده است و با استفاده از مراجع [۱]، [۲] و [۳] در فصل چهارم روش‌های رانگ – کوتا و نظریه درختان ریشه‌دار برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی از نوع استراتنویچ با یک فرآیند وینر توسعه داده شده است، در ادامه روش‌های رانگ – کوتا تصادفی از مرتبه قوی یک با مینیمم ثابت خطا و روش‌های رانگ – کوتا تصادفی از مرتبه قوی یک‌ونیم برای معادلات دیفرانسیل تصادفی از نوع استراتنویچ ساخته شده است. در پایان کارایی این روش‌ها توسط چند مثال عددی نشان داده شده است.

# فهرست مندرجات


## ۱ حسابان تصادفی ۱

۱.۱ مقدمه‌ای بر نظریه احتمال . . . . . ۱

۲.۱ فرآیندهای تصادفی . . . . . ۷

۳.۱ فرآیند وینر و اغتشاش سفید . . . . . ۱۰

## ۲ انتگرال‌های تصادفی ۱۶

۱.۲ مقدمه‌ای بر معادله دیفرانسیل تصادفی . . . . . ۱۶

۲.۲ فرمول ایتو و کاربردهای آن . . . . . ۱۹

۳.۲ ارتباط بین انتگرال ایتو با استراتنویچ و بسط تیلور تصادفی . . . . . ۲۴

۴.۲ انتگرال‌های تصادفی چندگانه . . . . . ۳۰

**۳ روش‌های رانگ – کوتا برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی** ۳۹

۱.۳ معادلات دیفرانسیل معمولی . . . . . ۴۰

۲.۳ همگرایی . . . . . ۴۲

۳.۳ سازگاری و صفر پایداری . . . . . ۴۲

۴.۳ روش‌های چندگامی خطی، عملگر تفاضلی وابسته، ثابت خطا و مرتبه . ۴۶

۵.۳ خطای برشی موضعی و خطای برشی عمومی . . . . . ۴۷

۶.۳ روش‌های رانگ – کوتا . . . . . ۴۹

۷.۳ روش‌های رانگ – کوتا صریح برای مسائل اسکالر . . . . . ۵۲

۸.۳ نظریه درختان ریشه‌دار . . . . . ۵۶

**۴ روش‌های رانگ – کوتا تصادفی** ۶۴

۱.۴ همگرایی قوی معادلات دیفرانسیل تصادفی . . . . . ۶۵

۲.۴ نظریه درختان ریشه‌دار و روش‌های رانگ – کوتا برای معادلات دیفرانسیل تصادفی . . . . . ۶۹

۳.۴ روش‌های رانگ – کوتا تصادفی از مرتبه قوی یک‌ونیم . . . . . ۸۰

۴.۴ نتایج عددی و نتیجه‌گیری . . . . . ۸۸

**A برنامه ها** ۹۴

**B واژه‌نامهٔ انگلیسی به فارسی** ۱۱۱

**C واژه‌نامهٔ فارسی به انگلیسی** ۱۱۷

فصل ۱

# حسابان تصادفی

هدف از این فصل یادآوری حقایق پایه‌ای در نظر گرفته شده در احتمال و فرآیندهای تصادفی است که در شناختن معادلات دیفرانسیل تصادفی و کاربردهای آن مهم است.

## ۱.۱ مقدمه‌ای بر نظریه احتمال

**تعریف ۱.۱.۱** فرض کنید $\Omega$ یک مجموعه دلخواه و $\mathcal{A}$ گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های $\Omega$ باشد. در این صورت $\mathcal{A}$ را یک $\sigma-$ جبر گویند هرگاه:

۱) $\Omega \in \mathcal{A}$؛

۲) اگر $A \in \mathcal{A}$ آن‌گاه $A^c \in \mathcal{A}$؛

۳) اگر $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ آن‌گاه $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$.

مفهوم اصلی نظریه احتمال، فضای احتمال است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

**تعریف ۲.۱.۱** فرض کنید $\mathcal{A}$ یک $\sigma-$ جبر باشد. تابع $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [۰, +\infty)$ را یک اندازه گویند هرگاه دارای خواص زیر باشد:

۱) $\mu(\emptyset) = ۰$؛

۲) برای هر دنباله $\{A_n\}_{n\geq ۱}$ در $\mathcal{A}$ که عناصر آن دوبه‌دو مجزا هستند داشته باشیم $\mu(\bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n) = \sum_{n=۱}^{\infty} \mu(A_n)$.

**تعریف ۳.۱.۱** فرض کنید $\mathcal{A}$ یک $\sigma-$ جبر روی $\Omega$ باشد. تابع $P : \mathcal{A} \longrightarrow [۰, ۱]$ را یک اندازه احتمال گویند هرگاه $P$ یک اندازه باشد و $P(\Omega) = ۱$.

**تعریف ۴.۱.۱** سه‌تایی مرتب $(\Omega, \mathcal{A}, P)$، که شامل فضای نمونه $\Omega$ (مجموعه همه رویدادهای قابل امکان)، $\sigma-$ جبر $\mathcal{A}$ که شامل زیر مجموعه‌ای از $\Omega$ بوده و عناصر آن را پیشامد گویند و تابع اندازه احتمال $P$ که روی $\mathcal{A}$ تعریف می‌شود، را فضای احتمال گویند.

**تعریف ۵.۱.۱** فرض کنید $\mathcal{A}$ یک $\sigma-$ جبر روی $\Omega$ باشد. تابع $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک متغیر تصادفی گویند هرگاه به ازای هر $a \in \mathbb{R}$،

$$X^{-۱}((-\infty, a]) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{A}.$$

**تعریف ۶.۱.۱** رفتار احتمالی $X(w)$ به طور کامل و یکتا با تابع

$$F_X(x) = P(X = x) = P\{w \in \Omega : X(w) < x\},$$

نشان داده می‌شود که تابع توزیع نامیده می‌شود.

**تعریف ۷.۱.۱** فرض کنید $X_۱, ..., X_n$، $n$ متغیر تصادفی روی $\mathbb{R}$ باشند که همگی روی فضای احتمال یکسان $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ تعریف شده‌اند. تابع $F_{X_۱,...,X_n}$ را که به صورت زیر تعریف

می‌شود تابع توزیع توأم گویند:

$$F_{X_1,...,X_n} \quad : \quad \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$$

$$F_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n) \quad = \quad P(X_1 \leq x_1,...,X_n \leq x_n) = P\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \leq x_1,...,X_n(\omega) \leq x_n\}.$$

**تعریف ۸.۱.۱** متغیرهای $X_n,...,X_1$ مستقل نامیده می‌شوند هرگاه:

$$F_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n) = P(X_1 \leq x_1)...P(X_n \leq x_n) = F_{X_1}(x_1)...F_{X_n}(x_n).$$

**تعریف ۹.۱.۱** متغیر تصادفی $X(w)$ یک متغیر تصادفی پیوسته نامیده می‌شود، هرگاه تابع نامنفی نظیر $f$ پیدا شود به‌طوری‌که:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1, \qquad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz = P(X \leq x),$$

$f$ در این صورت تابع چگالی نامیده می‌شود.

**تعریف ۱۰.۱.۱** دنباله متغیرهای تصادفی $\{X_n\}_{n\geq 1}$ را هم‌توزیع گویند، هرگاه:

$$F_{X_1}(x) = \cdots = F_{X_n}(x) = \cdots = F_X(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**تعریف ۱۱.۱.۱** فرض کنید $X$ یک متغیر تصادفی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ باشد. امیدریاضی $X$ عبارت است از:

$$E(X) = \int_{\Omega} X dP.$$

برای یک متغیر تصادفی پیوسته روی $\mathbb{R}$،

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)dx.$$

**تعریف ۱۲.۱.۱** برای یک متغیر تصادفی واریانس به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$var(X) = E((X-\mu)^۲),$$

که در آن $\mu = E(X)$ و در نتیجه:

$$var(X) = E(X^۲) - (E(X))^۲ = E(X^۲) - \mu^۲.$$

انحراف معیار متغیر تصادفی $X$ به صورت $\sigma = (var(X))^{\frac{۱}{۲}}$ تعریف می‌شود.

**تعریف ۱۳.۱.۱** $k$ اُمین گشتاور متغیر تصادفی $X$ که با $\mu_k$ نشان داده می‌شود عبارت است از:

$$\mu_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx.$$

**گزاره ۱۴.۱.۱** اگر $X$ و $Y$ متغیرهای تصادفی روی $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ باشند، آن‌گاه:

۱) $E(aX+bY) = aE(X) + bE(Y)$.

۲) اگر $X(\omega) \leq Y(\omega)$ به ازای هر $\omega \in \Omega$، آن‌گاه $E(X) \leq E(Y)$.

۳) $var(aX) = a^۲ var(X)$.

۴) اگر $X$ , $Y$ مستقل باشند، آن‌گاه $E(XY) = E(X)E(Y)$.

**تعریف ۱۵.۱.۱** اگر $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ محدب باشد، آن‌گاه:

$$g(E(X)) \leq E(g(X)),$$

این نابرابری را نابرابری جنسن[۱] می‌نامند.

**تعریف ۱۶.۱.۱** اگر $X$ متغیر تصادفی نامنفی باشد و $a > ۰$ آن‌گاه:

$$P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq a\} \leq \frac{E(X)}{a},$$

این نابرابری را نابرابری مارکف[۲] می‌نامند.

**تعریف ۱۷.۱.۱** متغیر تصادفی $X$ دارای توزیع نرمال (گاوسی) است، هرگاه تابع چگالی آن به صورت زیر باشد:

$$f(x) = \frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}} \exp(-\frac{(x-\mu)^۲}{۲\sigma^۲}),$$

به عبارت دیگر $X$ دارای توزیع نرمال با میانگین $\mu$ و واریانس $\sigma^۲$ می‌باشد یعنی $X \sim N(\mu, \sigma^۲)$. متغیر تصادفی $X$ دارای توزیع نرمال استاندارد است، هرگاه $X \sim N(۰, ۱)$.

**تعریف ۱۸.۱.۱** فرض کنید $X$ متغیر تصادفی پیوسته با میانگین $\mu$ باشد، در این صورت گشتاور مرکزی مرتبه $k$ اُم آن عبارت است از:

$$E(X-\mu)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^k f(x)dx,$$

می‌توان نشان داد:

$$E(X-\mu)^k = \begin{cases} ۰, & \text{اگر } k \text{ فرد است}, \\ ۱ \times ۳ \times ۵ \times \cdots \times (k-۱)\sigma^k, & \text{اگر } k \text{ زوج است}. \end{cases}$$

---

[۱] Jensen

[۲] Markov

**تعریف ۱.۱.۱۹** اگر $X$ متغیر تصادفی با میانگین $\mu$ و واریانس $\sigma^۲$ باشد، آن‌گاه $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس یک است.

اگر دنباله‌ی $\{X_n(w)\}_{n\geq ۱}$ از متغیرهای تصادفی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ تعریف شده باشد آن‌گاه بررسی رفتار مجانبی این دنباله یعنی وجود یک متغیر تصادفی $X(\omega)$ که به عنوان حد دنبالهٔ $\{X_n(w)\}_{n\geq ۱}$ در نظر گرفته شده باشد از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. چهار معیار همگرایی برای یک دنباله از متغیرهای تصادفی وجود دارد که در زیر تعریف آن‌ها بیان شده است.

**تعریف ۱.۱.۲۰** یک دنباله از متغیرهای تصادفی $\{X_n(w)\}_{n\geq ۱}$ با احتمال یک به $X(w)$ همگرا گفته می‌شود هرگاه:

$$P\{\omega \in \Omega : \lim_{n\longrightarrow\infty} |X_n(\omega) - X(\omega)| = ۰\} = ۱.$$

**تعریف ۱.۱.۲۱** فرض کنید $\{X_n(w)\}_{n\geq ۱}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ باشد که $E(X^۲) < \infty$ و به ازای هر $n$، $E(X_n^۲) < \infty$، در این صورت $X_n(\omega)$ در مفهوم میانگین مربع به $X(\omega)$ همگرا گفته می‌شود هرگاه:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} E\,|X_n(\omega) - X(\omega)|^۲ = ۰.$$

**تعریف ۱.۱.۲۲** دنباله $\{X_n(w)\}_{n\geq ۱}$ همگرا به $X$ در احتمال گفته می‌شود هرگاه به ازای هر $\epsilon > ۰$:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P\{\omega \in \Omega : \ |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \epsilon\} = ۰.$$

**تعریف ۲۳.۱.۱** دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی $\{X_n(w)\}_{n\geq ۱}$ در توزیع به $X(w)$ همگرا گفته می شود، هرگاه در تمام نقاط پیوستگی $F_X$:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x).$$

**قضیه ۲۴.۱.۱** (قانون قوی اعداد بزرگ) فرض کنید $\{X_n(w)\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ باشد، اگر به ازای هر $i \in N$، $\mu = E(X_i)$ آن‌گاه:

$$P(\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{X_۱ + \cdots + X_n}{n} = \mu) = ۱,$$

همچنین اگر به ازای هر $i \in N$، $\sigma^۲ = var(X_i)$ و $u_n = \frac{X_۱ + \cdots + X_n}{n} = \frac{s_n}{n}$، آن‌گاه

$$var(u_n) = \frac{\sigma^۲}{n}, \qquad E(u_n) = \mu.$$

طبق قانون قوی اعداد بزرگ:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} u_n = \mu.$$

## ۲.۱ فرآیندهای تصادفی

**تعریف ۱.۲.۱** یک فرآیند تصادفی، خانواده‌ای از متغیرهای تصادفی $X(t,\omega)$ است از دو متغیر $t \in T$ و $\omega \in \Omega$ که روی فضای احتمال مشترک $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ تعریف می‌شود به‌طوری‌که

به عنوان تابعی از $\omega$ برای هر $t$ ثابت می‌باشد. پارامتر $t$ به عنوان زمان در مجموعه زمان $T$ تعبیرمی‌شود به‌طوری‌که برای هر $t$ ثابت، $X(t,.)$ یک متغیر تصادفی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ است و به ازای هر $\omega$ ثابت، $X(.,\omega)$ یک مسیر نمونه‌ای از فرآیند تصادفی نامیده می‌شود. اگر مجموعه زمان $T$ گسسته فرض شود آن‌گاه $X(t,w)$ یک فرآیند تصادفی گسسته – زمان است و اگر مجموعه زمان، یک بازه کران‌دار یا بی‌کران باشد آن‌گاه، $X(t,w)$ یک فرآیند تصادفی زمان – پیوسته نامیده می‌شود.

برای فرآیند تصادفی می‌توان نظیر متغیر تصادفی، میانگین و کواریانس را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\begin{cases} \mu(t) = E(X(t,\omega)), \\ Cov(s,t) = E(X(s,\omega) - \mu(s))(X(t,\omega) - \mu(t)), \quad s,t \in T, \ \ s \neq t. \end{cases}$$

**تعریف ۲.۲.۱** فرآیند تصادفی $X(t)$ با این شرط که برای هر $t \in T$، $E(X(t)^2) < \infty$، اکیداً مانا نامیده می‌شود هرگاه توزیع آن تحت تغییرات زمانی پایا باشد، به عبارت دیگر:

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(t_1 + h, \ldots, t_n + h) = F_{X_1,\ldots,X_n}(t_1, \ldots, t_n).$$

**تعریف ۳.۲.۱** یک فرآیند تصادفی $X(t)$ به طور ضعیف مانا نامیده می‌شود هرگاه $X(t)$ نسبت به گشتاور اول و دوم خود مانا باشد، در این حالت عددی ثابت مانند $\mu$ و تابعی نظیر $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $s,t \in T$ که $s \neq t$:

$$\begin{cases} \mu(t) = E(X(t)) = \mu, \\ var(X(t)) = g(0), \\ Cov(s,t) = g(t-s). \end{cases}$$

یک خانواده مهم از فرآیندهای تصادفی فرآیندهای مارکف است این خانواده دارای این خاصیت است که اگر وضعیت کنونی معلوم باشد آن‌گاه اثرهای گذشته و آینده مستقل از هم خواهند بود.

**تعریف ۴.۲.۱** برای فرآیند تصادفی $X(t)$ و یک زیر مجموعه مانند $\{t_1, \ldots, t_n\}$ از $T$ هرگاه:

$$P(X(t_n) \mid X(t_1), \ldots, X(t_{n-1})) = P(X(t_n) \mid X(t_{n-1})).$$

این خانواده از فرآیندهای تصادفی را فرآیند مارکف می‌نامند.

**تعریف ۵.۲.۱** برای فرآیند مارکف $X(t)$ تابع توزیع احتمال تغییر وضعیت و تابع چگالی تغییر وضعیت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(s,x;t,y) = P(X(t) < y | X(s) = x), \qquad f(s,x;t,y) = \frac{\partial F(s,x;t,y)}{\partial y}.$$

**تعریف ۶.۲.۱** فرآیند مارکف $X(t)$ را یک فرآیند انتشار نامند هرگاه به ازای هر $\epsilon > 0$ و به ازای هر $s \geq 0$ توابعی نظیر $g_0(s,x)\ , g_1(s,x)$ که $g_1 > 0$ موجود باشد که تابع توزیع احتمال تغییر وضعیت آن در سه شرط زیر صدق کند:

$$\lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|y-x|>\epsilon} dF_y(s,x;s+\Delta t,y) = 0,$$

$$\lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|y-x|<\epsilon} (y-x)\ dF_y(s,x;s+\Delta t,y) = g_0(s,x),$$

$$\lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|y-x|<\epsilon} (y-x)^2\ dF_y(s,x;s+\Delta t,y) = g_1(s,x),$$

در شرط دوم و سوم، $g_۰(x)$ , $g_۱(x)$ به ترتیب بردار سرعت متوسط فرآیند $X(t)$ و مقدار موضعی نوسان $X(t) - X(s)$ حول مقدار میانگین است.

**تعریف ۷.۲.۱** فرض کنید $\{X(t) : a \leq t \leq b\}$ روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ به شرط آن‌که $E(\mid X(t) \mid) < \infty$ و $\{A_t : a \leq t \leq b\}$ خانواده‌ای از $\sigma$ – جبرهای صعودی از $\mathcal{A}$ باشند $(t < s \Longrightarrow A_t \subset A_s)$ که $X(t)$ به ازای هر $t \in [a, b]$ به صورت $A_t$ – اندازه‌پذیر باشند آن‌گاه $X(t)$ یک مارتینگل نسبت به $A_t$ گفته می‌شود هرگاه به ازای هر $s > ۰$:

$$E(X(t+s)|A_t) = X(t).$$

**تعریف ۸.۲.۱** فرض کنید $\{A_t : t \geq ۰\}$ یک خانواده از $\sigma$ – جبرهای صعودی روی $\sigma$ – جبر $\mathcal{A}$ از فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ باشد در این صورت متغیر تصادفی $\tau(\omega)$ را روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ یک زمان توقف می‌نامند هرگاه:

$$\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in A_t.$$

## ۳.۱ فرآیند وینر و اغتشاش سفید

**تعریف ۱.۳.۱** یک فرآیند تصادفی $\{W(t) : t \geq ۰\}$ را فرآیند وینر یا حرکت براونی نامند هرگاه:

۱) $P(W(۰) = ۰) = ۱$؛

۲) برای افرازی نظیر $۰ < t_۰ < t_۱ < \cdots < t_n < T$، نموهای $W(t_n) - W(t_{n-۱}), \ldots, W(t_۱) - W(t_۰)$ مستقل از هم باشند، به عبارت دیگر اگر $i < j$ آن‌گاه:

$$E((W(t_j)-W(t_{j-۱}))(W(t_i)-W(t_{i-۱}))) = E(W(t_j)-W(t_{j-۱}))E(W(t_i)-W(t_{i-۱})),$$

۳) به ازای هر $t, h > ۰$، $W(t+h) - W(t)$ دارای توزیع نرمال بامیانگین صفر و واریانس $h$ باشد.

یک فرآیند وینر استاندارد در حالت کلی خواص زیر را به ازای هر $T \geq t \geq s \geq ۰$ داراست:

$$P(W(۰) = ۰) = ۱. \qquad E(W(t)) = ۰, \qquad var(W(t) - W(s)) = t - s,$$

**تعریف ۲.۳.۱** فرآیند تصادفی $W(t) = (W_۱(t), \ldots, W_m(t))$ برای $t \geq ۰$ در فضای $\mathbb{R}^m$ یک فرآیند وینر استاندارد $m$ بعدی نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $۱ \leq j \leq m$، مؤلفه‌های $W_j(t)$ فرآیند وینر استاندارد اسکالر مستقل از هم باشند.

برای یک فرآیند وینر می‌توان نتایج زیر را بیان کرد:

**گزاره ۳.۳.۱** یک فرآیند وینر استاندارد در میانگین مربع، پیوسته است، یعنی:

$$\lim_{h \longrightarrow ۰} E(W(t+h) - W(t))^۲ = ۰,$$

و لذا طبق قانون قوی اعداد بزرگ:

$$P(\lim_{t\longrightarrow\infty}\frac{W(t)}{t}=۰)=۱.$$

**گزاره ۴.۳.۱** [۹] $W(t)$ یک فرآیند وینر استاندارد باشد، آن‌گاه:

$$E(W(t)W(s))=min\{s,t\}.$$

**گزاره ۵.۳.۱** [۷] فرآیند وینر، مانای ضعیف نیست.

**گزاره ۶.۳.۱** فرآیند وینر، مارتینگل است.

اثبات: چون $E(X_t \mid A_t)=X_t$ بنابراین:

$$\begin{aligned}E(W(t+s)\mid A_t) &= E(W(t+s)-W(t)+W(t)\mid A_t)\\ &= E(W(t+s)-W(t)\mid A_t)+E(W(t)\mid A_t)=W(t).\end{aligned}$$

□

یک فرآیند وینر یک فرآیند انتشار با $g_۰=۰\ ,g_۱=۱$، است.

**تعریف ۷.۳.۱** تابع حقیقی مقدار $f$ روی $[a,b]$ باتغییرکران‌دار نامیده می‌شود، هرگاه:

$$\bigvee_a^b f=\sup_{P_n\in P}\sum_{i=۱}^{N}\mid f(t_i)-f(t_{i-۱})\mid<\infty,$$

که در آن $P$، مجموعه همه افرازهای ممکن از $[a,b]$ و $P_n=\{a=t_۰,t_۱,\ldots,t_N=b\}$ افراز دلخواهی از $p$ است.

**گزاره ۸.۳.۱** [۶] مسیرهای نمونه‌ای از یک فرآیند وینر با احتمال یک بر هر بازه زمانی متناهی باتغییرکران‌دار نیست.