بسم الله الرحمن الرحیم

**دانشگاه پیام نور**

**دانشکده علوم پایه**

دانشگاه پیام نورمرکزتهران شرق

**پایان نامه**

**برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد**

**رشته ریاضی محض**

**گرایش آنالیز**

# میانگین پذیری و میانگین پذیری ضعیف جبرهای باناخ گسترش یافته مدولی توسط ۲ـ دوگان دورها

سمیه نوروزی گلدره

**استاد راهنما :**

دکتر داوود ابراهیمی بقا

**استاد مشاور:**

دکتر خدیجه احمدی آملی

**دی ۱۳۹۱**

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم تحقیقات و فناوری

دانشگاه پیام نور
دانشگاه پیام نور استان تهران
اللهم عجل لولیک الفرج والعافیه والنصر

مجتمع علوم پایه و کشاورزی


# صورتجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

**جلسه دفاع ازپایان نامه کارشناسی ارشد خانم سمیه نوروزی گلدره**
**دانشجوی رشته رياضي محض به شماره دانشجویی: 890067180**
**تحت عنوان:**

**" میانگین پذیري و میانگین پذیري ضعیف جبرهاي باناخ گسترش یافته مدولي توسط 2-دوگان دورها"**

1جلسه دفاع با حضور داوران نامبرده ذیل در روزچهار شنبه مورخ: **91/10/27** ساعت : **11-12** درمحل مرکز تهران شرق برگزار شد. و پس از بررسی پایان‌نامه مذکور با نمره به عدد ۱۸/۷۵ به حروف هجده و هفتاد و پنج صدم .. و با درجه ارزشیابی عالی ..............مورد قبول واقع شد ☑ نشد ☐

| ردیف | نام و نام خانوادگی | هیات داوران | مرتبه دانشگاهي | دانشگاه/ موسسه | امضاء |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | دکتر داوود ابراهیمي بقا | استاد راهنما | استادیار | دانشگاه آزاد اسلامی | |
| 2 | دکتر خدیجه احمدي آملي | استاد مشاور | استادیار | پیام نور | |
| 3 | دکتر سید منصور واعظ پور | استاد داور | استاد | صنعتی امیرکبیر | |
| 4 | دکتر فهیمه سلطانیان | نماینده علمي گروه/ نماینده تحصیلات تکمیلي | استادیار | پیام نور | |


تهران، خیابان استاد نجات اللهی
خیابان شهید فلاح پور، پلاک ۲۷
تلفن: ۸۸۸۰۰۲۵۲
دورنگار: ۸۸۳۱۹۴۷۵
WWW.TPNU.AC.IR
science.agri@tpnu.ac.ir

اینجانب سمیه نوروزی گلدره دانشجوی ورودی سال ۱۳۸۹ مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گواهی می نمایم چنانچه در پایان نامه خود از فکر، ایده و نوشته دیگری بهره گرفته ام با نقل قول مستقیم منبع و ماخذ آن را نیز در جای مناسب ذکر کرده ام . بدیهی است مسولیت تمام مطالبی که نقل قول دیگران نباشد بر عهده خویش می دانم و جوابگوی آن خواهم بود .

سمیه نوروزی گلدره

تاریخ و امضاء :

۹۱/۱۱/۱۷

اینجانب سمیه نوروزی گلدره دانشجوی ورودی سال ۱۳۸۹ مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گواهی می نمایم چنانچه بر اساس مطالب پایان نامه خود اقدام به انتشار مقاله ،کتاب ،و ... نمایم ضمن مطلع بودن استاد راهنما ، با نظر ایشان نسبت به نشر مقاله ،کتاب ،و ... و به صورت مشترک و با ذکر نام استاد راهنما مبادرت نمایم .

سمیه نوروزی گلدره

تاریخ و امضاء :

۹۱/۱۱/۱۷

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات ، آزمایشات و نوآوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه پیام نور می باشد .

تقدیم به :

مغزهای متفکر شهدایی چون دکتر چمران و غلامحسین افشردی، دلاور مردهایی چون شهید زین الدین و سردار جاویدالاثر احمد متوسلیان، نور چشمانی چون دایی عزیزم، و صد البته تقدیم به دل های همیشه داغ دار مادران شهداء.

# تقدیر و تشکر

پس از ستایش خداوند بلند مرتبه که توفیق آموختن عطا فرموده ، از تمامی استادان دوره تحصیلم ، به ویژه استاد بزرگوار جناب دکتر داوود ابراهیمی بقا که زحمت راهنمایی این پایان نامه را پذیرفته اند و استاد ارجمند سرکار خانم دکتر خدیجه احمدی آملی که زحمت مشاوره را قبول کردند قدردانی می کنم.

به علاوه از داور گران قدر جناب دکتر سید منصور واعظ پور که قبول زحمت کرده اند و سرکار خانم دکتر سلطانیان مدیر گروه ریاضی صمیمانه سپاس گذاری می کنم .

## چکیده

دراین پایان نامه تعاریف و قضایای مقدماتی از آنالیز حقیقی ، آنالیز تابعی و جبرهای باناخ ارائه شده است . از جبر های باناخ گسترش یافته مدولی و میانگین پذیری ضعیف آن ها صحبت کرده ایم. همچنین مفهوم جدیدی از میانگین پذیری و میانگین پذیری ضعیف برای جبرهای باناخ گسترش یافته مدولی توسط ۲- دوگان دورها بررسی می شود .

## واژه های کلیدی:

جبر های باناخ گسترش یافته مدولی ، ۲- دوگان دورها ، میانگین پذیری ، میانگین پذیری ضعیف ، میانگین پذیری ۲- ضعیف

# فهرست مطالب

## مقدمه :

مفهوم میانگین پذیری اولین بار در سال ۱۹۲۹ توسط وُن نیومن برای گروه توپولوژیک گسسته مطرح شد و در سال ۱۹۵۰ دی این مفهوم را برای گروه توپولوژیک (هاسدورف موضعاً فشرده) را در حالت کلی به صورت زیر بیان کرد :

گروه توپولوژیک $G$ میانگین پذیر است هرگاه یک میانگین پایای چپ روی $L^{\infty}(G)$ وجود داشته باشد .

جانسون در سال ۱۹۷۲ درمرجع [٦] نشان داد که گروه توپولوژیک $G$ میانگین پذیر است اگر و تنها اگر برای هر $L^{1}(G)$– مدول باناخ $X$ هر مشتق $D:L^{1}(G)\rightarrow X^{*}$ درونی باشد. این نتیجه ، آغازی برای تعریف میانگین پذیری جبرهای باناخ بود . جانسون جبر باناخ $A$ را میانگین‌پذیر نامید هرگاه به ازای هر $A$– مدول باناخ $X$ ، هر مشتق $D:A\rightarrow X^{*}$ درونی باشد .

باده وکرتیس در سال ۱۹۸٦ در مرجع [۱] مفهوم میانگین پذیری ضعیف را برای جبرهای باناخ تعویض پذیر به صورت زیر بیان کردند :

جبر باناخ $A$ میانگین پذیر ضعیف است هر گاه برای هر $A$– مدول باناخ $X$، هر مشتق $D:A\longrightarrow A^{*}$ درونی باشد .

بعدها جانسون در مرجع [۷] میانگین پذیری ضعیف $A$ را به جبرهای باناخ غیرتعویض پذیر توسیع داد .

دلز و قهرمانی در سال ۱۹۹۸ درمرجع [۲ ] جبر باناخ $A$ را میانگین پذیر $n$– ضعیف نامیدند هر گاه هر مشتق $D:A\longrightarrow A^{(n)}$ درونی باشد وجبر باناخ $A$ را به طور پایا میانگین پذیر ضعیف نامیدند هر گاه به ازای $n\geq ۱$ تعریف میانگین پذیری $n$– ضعیف برقرار باشد .

واما در این پایان نامه در فصل اول به بیان مقدمات مورد نیاز پرداخته شده ، در فصل دوم میانگین پذیری ضعیف و همچنین میانگین پذیری $n$ – ضعیف جبر باناخ گسترش یافته مدولی را مورد بررسی قرار داده ایم .

مطالب این فصل بر اساس مرجع شماره [۱۰] با عنوان

Y.Zhang. Weak amenability of module extension of Banach algebra, Trans. Amer.Math. Soc. 354 (2002) , 4131-4151 .

ارائه گردیده است .

در فصل سوم با بیان مفهوم جبرهای باناخ گسترش یافته مدولی توسط ۲- دوگان دورها به بررسی میانگین پذیری و میانگین پذیری ۲–ضعیف این جبرها پرداخته ایم .

مطالب این فصل نیز بر اساس مرجع شماره [۱٤] با عنوان

T.Yazdan Panah. Amenability and Weak amenability of module extension of Banach algebras by 2-Cocycles , Far East. Math. Sci ( FJMS) , (2004) , 357-374 .

ارائه گردیده است .

# فصل اول

# تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل ، تعاریف و قضایای مقدماتی از آنالیز حقیقی ، آنالیز تابعی ، جبرهای باناخ ، میانگین پذیری و میانگین پذیری ضعیف جبرهای باناخ که در فصل های بعد مورد استفاده قرار می گیرند را بیان می کنیم .

برهان اغلب این قضایا را به مراجع مورد استفاده ارجاع می دهیم .

## ۱.۱ مقدماتی در آنالیز

**تعریف ۱.۱.۱** فرض کنیم $A$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ (میدان حقیقی $\mathbb{R}$ یا میدان مختلط $\mathbb{C}$) باشد . $A$ را یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$ گوییم هرگاه یک عمل دوتایی $(a,b) \to ab$ از $A \times A$ به $A$ که آن را ضرب می نامیم وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $a,b,c \in A$ و هر $\alpha \in \mathbb{F}$ داشته باشیم :

۱) $a(bc) = (ab)c$

۲) $a(b+c) = ab + ac$ و $(a+b)c = ac + bc$

۳) $(\alpha a)b = \alpha(ab) = a(\alpha b)$

بر حسب اینکه $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ یا $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ ، $A$ را به ترتیب جبر مختلط یا جبر حقیقی گوییم در ادامه منظورمان از جبر ، جبر مختلط است .

جبر $A$ را یکدار گوییم هرگاه $e \in A$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in A$ داشته باشیم :

$$ae = ea = a$$

جبر $A$ را جابجایی (تعویض پذیر) گوییم هرگاه برای هر $a,b \in A$ داشته باشیم :

$$ab = ba$$

جبر $A$ را نرم دار گوییم هرگاه یک نرم روی $A$ وجود داشته باشد به طوری که $A$ با این نرم $\| \ \|$ یک فضای نرم دار باشد و به علاوه $\forall a,b \in A \quad \|ab\| \le \|a\|\|b\|$

جبر نرم دار $A$ را جبر باناخ[1] گوییم هرگاه $A$ نسبت به متر حاصل از نرم کامل باشد .

**تعریف ۲.۱.۱** فرض کنیم $A$ یک جبر باشد و $J$ یک زیر فضای خطی از $A$ باشد .

(۱) $J$ را زیر جبر $A$ گوییم هرگاه برای هر $a,b \in J$ داشته باشیم : $ab \in J$

(۲) $J$ را یک ایده آل چپ $A$ گوییم هرگاه برای هر $a \in A$ و هر $b \in J$ داشته باشیم : $ab \in J$

(۳) $J$ را یک ایده آل راست $A$ گوییم هرگاه برای هر $a \in A$ و هر $b \in J$ داشته باشیم : $ba \in J$

(٤) $J$ را یک ایده آل دو طرفهٔ $A$ گوییم هرگاه $J$ هم ایده آل چپ و هم ایده آل راست $A$ باشد .

**تعریف ۳.۱.۱** ایده آل بسته $I$ ، در جبر $A$ را در نظر می گیریم فضای خارج قسمتی $\frac{A}{I}$ همراه با ضرب $(a+I)(b+I) = ab+I$ و نرم $\|a+I\| = \inf\{\|a+b\| : b \in I\}$ یک جبر نرم دار است که آن را جبر خارج قسمتی می نامیم . به علاوه اگر $A$ جبر باناخ باشد ، $\frac{A}{I}$ نیز جبر باناخ است [۱۷] .

---

[1] Banach algebra

**تعریف ۴.۱.۱** فرض کنیم $X$ یک فضای نرم دار باشد ضعیف ترین توپولوژی روی $X$ را که هر $f \in X^*$ نسبت به آن پیوسته باشد توپولوژی ضعیف[1] ($w$- توپولوژی) روی $X$ می نامیم . و با $\sigma(X, X^*)$ نمایش می دهیم .

**تعریف ۵.۱.۱** فرض کنیم $X$ یک فضای برداری همراه با توپولوژی هاسدورف $\tau$ باشد گوییم $X$ یک فضای برداری توپولوژیک ($T.V.S$) است هر گاه اعمال فضای برداری یعنی جمع و ضرب اسکالر نسبت به توپولوژی $\tau$ پیوسته باشند. برای مثال هر فضای نرم دارد یک $T.V.S$ است .

**تعر یف ۶.۱.۱** فرض کنیم $X$ یک $T.V.S$ باشد . فضای دوگان $X$ را با $X^*$ نشان می دهیم که عبارتست از مجموعه ی تمام نگاشت های خطی پیوسته از $X$ به $\mathbb{C}$ (تابعک های خطی پیوسته روی $X$) . $X^*$ همراه با جمع و ضرب اسکالر معمولی توابع یک فضای برداری است .

**تعریف ۷.۱.۱** یک مجموعه ی جزئی مرتب $(I, \leq)$ را یک مجموعهٔ جهت دار[2] نامیم هرگاه برای هر $i_1, i_2 \in I$ عنصر $i_3 \in I$ ی وجود داشته باشد به طوری که $i_1 \leq i_3$ $i_2 \leq i_3$ .

**تعریف ۸.۱.۱** فرض کنیم $X$ یک فضای توپولوژیک و $I$ یک مجموعه ی جهت دار باشد . یک تابع $x : I \to X$ را یک شبکه[3] در $X$ نامیم . معمولاً به ازای هر $i \in I$ , $x(i)$ را با $x_i$ نمایش می دهیم و تابع را با $\{x_i\}_{i \in I}$ نماد گذاری می کنیم . در این صورت $\{x_i\}_{i \in I}$ را یک شبکه در $X$ می نامیم .

**تعریف ۹.۱.۱** فرض کنیم $X$ یک فضای توپولوژیک و $\{x_i\}_{i \in I}$ یک شبکه در $X$ باشد و $x \in X$. گوییم شبکه $\{x_i\}_{i \in I}$ در $X$ همگرا است و می نویسیم $x_i \to x$ یا $\lim_i x_i = x$ هر گاه به ازای هر

[1] Weak topology
[2] Directed set
[3] net

مجموعه باز $U$ در $X$ شامل $x$ ، $i_{\circ} \in I$ ی وجود داشته باشد به طوری که برای هر $i \geq i_{\circ}$ داشته باشیم $x_i \in U$ .

**تعریف ۱۰.۱.۱** فرض کنیم $X, Y$ دو فضای توپولوژیک باشند و $A \subseteq X$ . در این صورت :

الف) نگاشت $f : X \to Y$ در نقطهٔ $x \in X$ پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر شبکه $\{x_i\}_{i \in I}$ در $X$ که $x_i \to x$ داشته باشیم $f(x_i) \to f(x)$ در $Y$ .

(ب) $x \in \overline{A}$ اگر و تنها اگر یک شبکه $\{x_i\}_{i \in I}$ در $A$ وجود داشته باشد به طوری که $x_i \longrightarrow x$ در $X$ .

(ج) $A$ فشرده است اگر و تنها اگر هر شبکه یک نقطهٔ حدی در $A$ باشد. (نقطهٔ حدی یا نقطهٔ انباشتگی[1] : نقطه ای چون $P$ است که همهٔ همسایگی های آن شامل دست کم یک نقطه از مجموعه به جزء $P$ باشند.)

**تعریف ۱۱.۱.۱** شبکه $\{e_i\}_{i \in I}$ در فضای نرم دار $X$ را کراندار گوییم هر گاه عدد مثبت $M$ وجود داشته باشد به طوری که برای $i \in I$ داشته باشیم : $\|e_i\| \leq M$

**تعریف ۱۲.۱.۱** فرض کنیم $A$ یک جبر نرم دار و $\{e_i\}_{i \in I}$ یک شبکه در $A$ باشد گوییم $\{e_i\}_{i \in I}$ یک همانی تقریبی چپ[2] در $A$ است هر گاه برای هر $y \in A$ داشته باشیم $e_i y \xrightarrow{\|\cdot\|} y$ . و گوییم $\{e_i\}_{i \in I}$ یک همانی تقریبی راست در $A$ است هرگاه برای هر $y \in A$ داشته باشیم $ye_i \xrightarrow{\|\cdot\|} y$.

اگر $\{e_i\}_{i \in I}$ هم همانی تقریبی چپ و هم همانی تقریبی راست باشد آن را همانی تقریبی دوطرفه برای $A$ می نامیم .

در هر یک از موارد فوق اگر شبکه $\{e_i\}_{i \in I}$ کراندار باشد همانی تقریبی مورد نظر را کراندار می‌نامیم .

---

[1] Limit point or cluster point
[2] Left approximate identity

**گزاره ۱۳.۱.۱** اگر $A$ دارای همانی تقریبی راست و چپ کراندار باشد آنگاه $A$ دارای همانی تقریبی کراندار است.

**برهان :** گزاره ۱۱.٦ در [۱۸] . □

**مثال ۱٤.۱.۱** $L^1(G)$ همانی تقریبی کران دار دارد [٦] .

**قضیه ۱۵.۱.۱** (تجزیه کوهن)[1] فرض کنیم $A$ یک جبر باناخ و دارای همانی تقریبی کراندار برای $A$–مدول باناخ $X$ باشد . در این صورت برای هر $\varepsilon > 0$ ، عضو $a$ از $A$ و $y$ از $X$ موجود است به طوری که : $x = ay$ و $\|x - y\| \le \varepsilon$

**برهان:** قضیه ۱۱.۱۰ در [۱۸] . □

**تعریف ۱٦.۱.۱** فرض کنیم $X$ یک فضای نرم دار باشد . ضعیف ترین توپولوژی روی $X^*$ را که هر نگاشت $X^* \to \mathbb{C}$ نسبت به آن پیوسته باشد توپولوژی ضعیف ستاره ( $w^*$– توپولوژی)[2] روی $X^*$ می نامیم . این توپولوژی روی $X^*$ را به نماد $\sigma(X^*, X)$ نمایش می دهیم .

**تعریف ۱۷.۱.۱** فرض کنیم $X$ یک فضای نرم دار باشد . با توجه به تعاریف مطرح شده $\hat{X} \subseteq X^{**}$ واضح است که :

توپولوژی نرم روی $X^*$ $\subseteq$ $w$– توپولوژی روی $X^*$ $\subseteq$ $w^*$– توپولوژی روی $X^*$

**قضیه ۱۸.۱.۱** فرض کنیم $X$ یک فضای نرم دار باشد . در این صورت :

الف) شبکهٔ $\{x_i\}_{i \in I}$ در $x$ با توپولوژی ضعیف روی $x$ به عنصر $x \in X$ همگراست . یعنی $x_i \xrightarrow{w} x$ اگر و تنها اگر به ازای هر $f \in X^*$ داشته باشیم $f(x_i) \longrightarrow f(x)$ .

---

[1] Cohen's factorization
[2] Weak * topology

ب) شبکهٔ $\{f_i\}_{i\in I}$ در $X^*$ با توپو لوژی ضعیف ستاره دار روی $X^*$ به عنصر $f\in X^*$ همگراست یعنی $f_i \xrightarrow{w^*} f$ اگر و تنها اگر به ازای هر $x\in X$ داشته باشیم $f_i(x)\to f(x)$ .

**برهان :** [۱۱،۱۷] .

**قضیه ۱۹.۱.۱** (گلدشتاین)[1] فرض کنیم $X$ یک فضای باناخ باشد در این صورت $X$ با توپولوژی ضعیف ستاره در $X^{**}$ چگال[2] است .

**تعریف ۲۰.۱.۱** فرض کنیم $X, Y$ دو فضای نرم دار باشند و $T: X\to Y$ یک نگاشت خطی کراندار و $T^*: Y^* \longrightarrow X^*$ عملگر الحاقی $T$ باشند . تعریف می کنیم :

$$\begin{cases} T^*: Y^*\to X^* \\ \quad f \to T^*(f) \end{cases}$$

$$\begin{cases} T^*(f): X\to \mathbb{C} \\ \quad x \to f(T(x)) \end{cases}$$

به طوری که برای هر $x\in X$ و $f\in Y^*$ ، $<x, T^*(f)> = <T(x), f>$ . به راحتی ثابت می شود $T^*$ یک نگاشت خطی کراندار است. قضیه ٤.۱۰ در [۱۷] .

**قضیه ۲۱.۱.۱** نگاشت $T^*\in BL(Y^*, X^*)$ , $w^*-w^*$ پیوسته است .

**برهان :** شبکه $\{f_i\}_{i\in I}$ را در $Y^*$ در نظر می گیریم، فرض می کنیم $f_i \xrightarrow{w^*} f$. در این صورت ، برای هر $y\in Y$

$$<y, f_i> \longrightarrow <y, f>$$

حال $x\in X$ را در نظر می گیریم با فرض $y=T(x)$ ، داریم :

$$<T(x), f_i> \longrightarrow <T(x), f>$$

[1] Goldeshtain Theorem
[2] dense

در نتیجه $<x,T^*(f_i)> \longrightarrow <x,T^*(f)>$ . بنابراین $T^*(f_i) \xrightarrow{w^*} T^*(f)$ و حکم برقرار می‌شود. □

**قضیه ۲۲.۱.۱** (آلاُغلو)[1] فرض کنیم $X$ یک فضای نرم دار باشد . در این صورت ، گوی یکه بسته $(X^*)_1 = \{f \in X^* : \|f\| \leq 1\}$ با توپولوژی ضعیف ستاره در $X^*$ فشرده شده است .

**برهان:** قضیه ۳.۱.۵ در [۱۱] . □

**تعریف ۲۳.۱.۱** فرض کنیم $X, Y$ دو فضای باناخ باشند. در این صورت $T \in BL(X,Y)$ را فشرده ضعیف[2] نامیم هرگاه بستار $T((X)_1)$ فشرده ضعیف باشد که در آن $(X)_1 = \{x \in X \quad : \|x\| \leq 1\}$

**قضیه ۲۴.۱.۱** فرض کنیم $X, Y$ دو فضای باناخ باشند ، $T \in BL(X,Y)$ . در این صورت گزاره های زیر هم ارزند:

۱) $T$ فشرده ضعیف است.

۲) $T^{**}(X^{**}) \subset Y$

۳) $T^{**}$ فشرده ی ضعیف است .

**برهان :** قضیه ٥.٥.٦ در [۱۱] . □

**تعریف ۲۵.۱.۱** فرض کنیم $A, B$ دو جبر باشند گوییم نگاشت $\varphi : A \to B$ یک همریختی جبری[3] است هر گاه $\varphi$ خطی و ضربی باشد . ضربی بودن به این معنی است که برای هر $x, y \in A$ داشته باشیم :

$$\varphi(x, y) = \varphi(x)\varphi(y)$$

---

[1] Alaoglu's Theorem
۱Weakly compact
[3] Algebric homomorphism

**تعریف ۲۶.۱.۱** فرض کنیم $A$ یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$ و $X$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$باشد ( $\mathbb{F}$ را از این به بعد $\mathbb{C}$ در نظر می گیریم ) . $X$ را یک $A-$ مدول چپ گوییم هر گاه یک نگاشت $(a,x)\to ax$ از $A\times X$ به $X$ که آن را ضرب مدولی چپ می نامیم وجود داشته باشد به طوری که :

(۱) برای هر $a\in A$ نگاشت $x\to ax$ روی $X$ خطی باشد.

(۲) برای هر $x\in X$ نگاشت $a\to ax$ روی $A$ خطی باشد .

(۳) برای هر $a,b\in A$ و هر $x\in X$ داشته باشیم $a(bx)=(ab)x$ .

به همین ترتیب $X$ را یک $A-$ مدول راست گوییم هر گاه یک نگاشت $(x,a)\to xa$ از $X\times A$ به $X$ که آن را ضرب مدولی راست می نامیم وجود داشته باشد به طوری که :

(۱) برای هر $a\in A$ نگاشت $x\to xa$ روی $X$ خطی باشد.

(۲) برای هر $x\in X$ نگاشت $a\to xa$ روی $A$ خطی باشد .

(۳) برای هر $a,b\in A$ و هر $x\in X$ داشته باشیم : $(xa)b=x(ab)$ .

$X$ را یک $A-$ مدول دو طرفه نامیم هرگاه هم $A-$ مدول چپ و هم $A-$ مدول راست باشد و به علاوه برای هر $a,b\in A$ و هر $x\in X$ داشته باشیم : $a(xb)=(ax)b$

**تعریف ۲۷.۱.۱** فرض کنیم $A$ یک جبر نرم دار و $X$ یک فضای نرم دار باشد ، $X$ را یک $A-$ مدول چپ نرم دار نامیم :

هرگاه $X$ یک $A-$ مدول چپ باشد و عدد مثبت $M$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $a\in A$ و هر $x\in X$ داشته باشیم : $\|ax\|\le M\,\|a\|\|x\|$

به همین ترتیب $A-$ مدول راست نرم دار نیز تعریف می شود . $X$ را یک $A$ مدول دو طرفهٔ نرم دار

گوییم هرگاه $A$– مدول چپ نرم دار و $A$– مدول راست نرم دار باشد و به علاوه برای هر $a,b \in A$ و هر $x \in X$ داشته باشیم : $a(xb)=(ax)b$

**تعریف ۲۸.۱.۱** فرض کنیم $A$ یک جبر نرم دار باشد و $X$ یک مدول $A$– مدول چپ (راست یا دو طرفه) نرم دار باشد که فضای باناخ نیز می باشد در این صورت $X$ را $A$– مدول چپ (راست یا دو طرفه) باناخ نامیم . از این به بعد هرگاه می نویسیم $X$ یک $A$– مدول باناخ است منظورمان این است که $X$ یک $A$– مدول دو طرفهٔ باناخ است .

**تعریف ۲۹.۱.۱** فرض کنیم $A$ یک جبر ، $X$ یک $A$– مدول دو طرفه و $Y$ زیر فضایی از $X$ باشند . در این صورت $Y$ را $A$– زیر مدول $X$ گوییم هر گاه برای هر $a \in A$ , $y \in Y$ داشته باشیم $ay, ya \in Y$ .

**مثال ۳۰.۱.۱**

**(آ)** فرض کنیم $A$ یک جبر نرم دار باشد. در این صورت ، $A$ با ضرب تعریف شده روی خودش یک $A$– مدول دو طرفه نرمدار خواهد بود .

**(ب)** اگر $A$ یک جبر باناخ و $X$ یک $A$– مدول باناخ باشد ، آن گاه دوگان $X$؛ یعنی ، $X^*$ با ضرب مدولی زیر یک $A$– مدول باناخ است .

$$\begin{cases} A \times X^* \to X^* \\ (a,f) \to af \end{cases}$$ ضرب چپ مدولی

که در آن $af$ برای هر $x \in X$ به صورت $<x,af> = <xa,f>$ عمل می کند .

$$\begin{cases} X^* \times A \to X^* \\ (f,a) \to fa \end{cases}$$ ضرب راست مدولی

که در آن $fa$ برای هر $x \in X$ به صورت $<x,fa> = <ax,f>$ عمل می کند .