بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده علوم

بخش فیزیک

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد فیزیک گرایش اتمی و مولکولی

تابش خود به خود اتم برانگیخته در نیم فضای دی الکتریک تراوا

استاد راهنما:

دکتر محمد رضا مطلوب

مؤلف:

فرزانه خجسته

خرداد ۱۳۸۸

دانشگاه شهید باهنر کرمان

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی ارشد به

بخش فیزیک

دانشکده علوم

دانشگاه شهید باهنرکرمان

تسلیم شده است و هیچ گونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: فرزانه خجسته چترودی

استاد راهنما: دکترمحمدرضا مطلوب

داور ۱: دکترجعفرجهانپناه

داور ۲: دکترمحمدمهدی یزدانپناه

نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتراحمد شیخی

تقدیم به پدر و مادر خوب و مهربانم

همسر صبور و فداکارم

و پسر عزیزم ارسام

تشکر و قدر دانی:

بدین وسیله مراتب امتنان و سپاس بی پایان خود را از استاد فرزانه و فرهیخته بخش فیزیک دانشگاه شهید باهنرکرمان جناب آقای دکتر محمد رضا مطلوب که راهنماییها و پشتیبانیهای همه جانبه‌ی ایشان در طول دوران تحصیل و به خصوص زمان انجام پایان نامه همواره راهگشای من بوده و هست، اعلام می‌دارم. بی‌گمان شاگردی ایشان برای همیشه مایه‌ی فخر و مباهات من خواهد بود.

وظیفه‌ی خود می‌دانم از آقایان دکتر محمد مهدی یزدانپناه، ریاست محترم بخش فیزیک دانشگاه شهید باهنرکرمان و دکتر جهانپناه که داوری این پایان نامه را بر عهده داشته‌اند و با حسن ظن خویش متن را مورد بازبینی قرار داده‌اند و همچنین از جناب آقای دکتر شیخی، تشکر و سپاسگزاری کنم.

از دوستان عزیزم که همیشه مرا مورد لطف خویش قرار داده‌اند نیز بسیار سپاسگزارم.

چکیده

در این پایان نامه میدان الکترومغناطیسی در محیط همگن و نیم فضای دی الکتریک مغناطیده کوانتیزه می‌شود. این عبارتها برای محاسبه‌ی آهنگ گسیل خود به خود یک اتم برانگیخته با استفاده از قانون طلایی فرمی به کار می‌روند. این کمیت با استفاده از قضیه اتلاف افت و خیز و فرمول کیوبو نیز محاسبه می شود. توجه خاصی به حضور در محیط هایی با ضریب شکست منفی نیز شده است.

فهرست مطالب

فصل اول

مقدمه

فصل اول

مقدمه

مقدمه

شروع قرن بیستم میلادی بامطرح شدن تابش جسم سیاه که نهایتا به نظریه پلانک[1] در مورد این پدیده انجامید و منجر به پیدایش مکانیک کوانتومی شد، توأم بود. بدین ترتیب فصل جدیدی در دنیای فیزیک گشوده شد و این زمانی بود که تقریبا چهار دهه از مهمترین تحول در نظریه الکترومغناطیس که همان نظریه ماکسول[2] بود، می‌گذشت.

در نظریه پلانک تابش به صورت کوانتومهایی با انرژی $\varepsilon = \hbar\omega$ ، که اتمهای جداره کاواک گسیل می‌کنند، در نظرگرفته می‌شود. به بیان دیگر، موج الکترومغناطیسی به صورت مجموعه‌ای ازکوانتومهای انرژی، با انرژی $\hbar\omega$ رفتار می‌کند. این کوانتومها همان فوتونها هستند. اینشتین[3] توانست اثر فتوالکتریک را با استفاده از کوانتیزه بودن موج الکترومغناطیسی توجیه کند.

به تدریج با افزایش فعالیتهای علمی در زمینه فیزیک اتمی و مولکولی، برای تفسیر جذب وگسیل تابش اتمها، به ویژه گسیل خود به خود[4] و بر هم کنش میدان الکترومغناطیسی با ماده،کوانتیزه‌کردن میدانهای الکترومغناطیسی کلاسیک به صورت امری لازم و ضروری در آمد. مانند مسأله نوسانگر هارمونیک کوانتومی با معرفی عملگرهای خلق ونابودی، مسأله منطق موجهی به خود گرفت و میدان الکترومغناطیسی در فضای تهی کوانتیزه شد[۱].

۱Plank
۲Maxwell
۳Albert Einstein
۴Spontaneous Emission

بدیهی است درمسائل کاربردی لازم می‌شـودکـه میدان الکترومغناطیسی را در حضورماده بررسی کنیم در این صورت مسأله کوانتیزه کردن میدان در حضور ماده پیش می‌آید، که متعاقبا به آن خواهیم پـرداخت.

ازکوانتش میدان الکترومغنـاطیسی در فضای تهی، درمی‌یابیـم کـه انـرژی میـدان الکترومغناطیـسی در حالت خلأ صفر نیست و حقیقـت میـدان نقطه صفر در پدیده‌های میکـروسکوپی مانند خواص تابشی اتم یا مولکـول ودر سیستم‌های ماکـروسکوپی نظیر نیروی کازیمیر، کاملا مشهود است[۲].

ترازهای انـرژی اتم در فضای تهی به واسطه بر همکنش با میدانهای کـوانتومی خلأ دچار اختلال شده ومی توان گفت که خواص تابشی اتـم یا مولکول برانگیخته به این واسطه توجیه می‌شـود. خواص تابشی اتم بـا دقت بالایی تـوسط الکترودینامیک کوانتومی قابل محاسبه است[۱].

برای حالتی که اتم در فضای تهی است، بین نتایج تجربی و نظری تـوافق خوبی وجود دارد. اما واقعیت این استکـه اتم هرگز به صورت منفرد در فضای تهی قرار نمی‌گـیرد. معمولا اتمها در فاصـله محدودی از سطوح رسانـا یا نارسانـا قرار می گیرند. وجود این سطـوح ساختار میدانـهای افت و خیـز خلأ را تغییر می‌دهد، و این امر نشان می‌دهـدکـه خواص تابشی اتم ها یا مولکولها به خواص ذاتی آنها مربوط نمی‌شـود.

فضای تهی یک فضای ایده‌آل است که اتم درآن قرار می‌گـیرد، اما این فضـا تنها فضای مورد نظر نمی‌باشد. وجود فضایی که با یک هندسه خاص ازماده اشغال شده و یک سیستم دوترازه اتم برانـگیخته را در خود جـای داده باشد، نیز یک گزینه است.

برای بازکردن مطالب ذکرشده، یک سیستم دوتـرازه اتـمی با تـرازهای n_1 و n_2 با انرژیهای E_1 و E_2 که $E_2 > E_1$ است را در نظر می‌گـیریم و فرض می‌کـنیم اتم در حالت برانگیـختگی یعنی در تراز n_2 باشد (n_1 را حالت پایه گرفته ایم). به دلیـل بیشتر بودن انـرژی تراز بالاتر، اتم تمایل خواهد داشت‌کـه به حالت n_1 واپاشی‌کند و انـرژی $(E_2 - E_1)$راآزاد سازد. اگر این انرژی به شکل گسیل یک فوتون آزاد شود، این فرایند گسیل خود به خود اتم برانگیختـه نام دارد.

چنانچه عضـو ماتریسی ممـان دو قـطبی الکتـریکی این گـذار μ باشد، آهنگ گسیل خود به خود اتم برانگیخته (طول عمرمتوسط اتم) با استفاده ازقانون طلایی فرمی[۵] همانطورکه درفصل سوم به آن خواهیم پرداخت، با مقـدارچشمداشتی همبستـگی فضایی عملگر میدان الکتریکی خلأ، نسبت مستقیم دارد که این مقدار چشمداشتی معرف افت و خیـز میدان الکتریکی خلأ است.

بدیهی است که همبستگی فضایی عـملگر میدان الکتریکی، بـرای هنـدسه‌ها و محیط های مختلف، موجب می‌شـود‌که مقدارچشمـداشتی‌آن، بستگی خاص‌آن هندسه را به خود بگیرد و این به دلیـل تناسبی است که تابع همبـستگی با قسمت موهومی تابع گرین دارد و در نهایت این تابع پاسخ یا همان تابع‌گرین است‌که با تناسب هندسه و محیط تغییرشکل می دهد. در فرمولبندی پدیده های فیزیکی که در آن محیط و سطوح مرزی نقش چشمگیری دارند، می توان به اهمیت وکارآیی تابع گرین اشاره کرد.

[۵]Fermi's golden

مزیت استفاده از روش تابع گرین در محاسبه خواص تابشی اتم این است که نیازی به معلوم بودن شکل صریح عملگر پتانسیل برداری برای هندسه های متفاوت نیست. تنها با در دست داشتن تابع گرین برای هندسه مورد نظر می‌توان خواص تابشی اتم را محاسبه کرد.

بزرگی آهنگ گسیل خود به خود اتم در فضایی که مرز وجود دارد (انعکاس)، مستقل از موقعیت اتم یا مولکول نیست، در حالیکه این بزرگی در فضای همگن مستقل از موقعیت اتم یا مولکول است.

در ایـن پایان نامه قصد داریم آهنگ واپاشی یا تابش (گسیل) خود به خود اتم دو ترازه برانگیخته، که در نیم‌فضای دی‌الکتریک مغناطیده، قرار دارد را مورد بررسی قرار دهیم. برای این منظور در فصل دوم کوانتش میدان الکترومغناطیسی را در دو محیط متفاوت و با دو روش متفاوت، پس از شرح روشهای مختلف کوانتیزه کردن میدان الکترومغناطیسی، مورد بررسی قرار داده‌ایم که یکی در فضای تهی و بر اساس بسط بر حسب توابع مد و دیگری در محیط دی الکتریک مغناطیده همگن در سه بعد و با استفاده از روش تابع گرین می باشد. در فصل سوم ابتدا آهنگ گسیل خود به خود اتم برانگیخته را در فضای تهی با استفاده از هامیلتونی بر همکنش میدان و اتم و کاربرد آن در قاعده‌ی طلایی فرمی مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس با استناد به دو روش متفاوت که یکی استفاده از قضیه اتلاف افت و خیز و دیگری همان روش ذکر شده درفضای تهی می‌باشد، آهنگ گسیل را در دی‌الکتریک مغناطیده همگن به دست می‌آوریم. آهنگ واپاشی به دست آمده با قسمت موهومی تابع گرین رابطه‌ی مستقیم دارد. در نتیجه با پیداکردن تابع گریـن و تفکیـک قسمت موهومی آن از قسمت حقیـقی و بـا استـفاده از نتـایج به

دست‌آمده، آهنگ گسیل خود به خود اتم برانــگیخته را در دی‌الکتــریک مغناطیده‌ی همگن بــه دست می‌آوریم. در پایان خواهیم دید که آهنگ گسیل خود به خود اتم برانگیخته در فضای تهی به روش تابع گرین نیــز همان نتیجه قبل را می‌دهد.

از آنجا که برای کوانتیزه کردن میدان الکترومغناطیسی در نیم‌فضای دی‌الکتریک تراوا به تابع گرین پتانسیل برداری دراین نیم فضا نیاز داریم، در ابتدای فصل چهارم به پیدا کردن تانسور تابع گرین با شرح اعمال ریاضی می‌پردازیم که متعاقب آن کوانتش میدان در نیم‌فضای دی‌الکتریک تراوا را خوهیم داشت.

درفصل پنجم به بررسی رفتار آهنگ گسیل در نیم فضا نســبت بــه همتــای آن در فضای همگن می‌پردازیم. برای این منظور از آنجایی که فضا دیگر تهی نیســت و محــیط مورد نظر دی‌الکتریک مغناطیده و دارای ضریب شکست مثبت یــا منفــی مــی‌باشــد، بــا توضیح ضریب شکست در حدکافی، می توانیم این بررسی را کامــل کنــیم. گزارشــی از نمودارهایی که بر این اساس به دست آورده‌ایم، می‌تواند در مقایســه محــیط و فضــاها و نتیجه‌گیری راهگشا باشد.

فصل دوم

کوانتش میدان الکترومغناطیس

۲-۱ مقدمه

کوانتیزه‌کردن میدان اولین گام گذار از الکترودینامیک کلاسیک به الکترودینامیک کوانتمی است. روشهای گوناگونی برای کوانتش میدانهای الکترومغناطیسی وجود دارد. از آن جمله می‌توان به کوانتیزه‌کردن میدان بر اساس بسط برحسب توابع مد، استفاده از معادلات اویلر- لاگرانژ و تابع گرین اشاره کرد. در بخش(۲-۲) به اختصار به معرفی آنها می‌پردازیم. سپس میدان الکترومغناطیسی درفضای تهی را به روش توابع مدکوانتیزه می‌کنیم. دربخش (۲-۴) به کوانتش میدان الکترومغناطیسی درحضور دی‌الکتریک مغناطیده همگن سه بعدی خواهیم پرداخت.

۲-۲ روشهای مختلف کوانتش میدانهای الکترومغناطیسی

در کوانتش میدان براساس بسط برحسب توابع مد، ابتدا پتانسیل برداری را به صورت مناسبی بسط داده و سپس یک مجموعه از مختصات تعمیم یافته را به یک دسته از عملگرهای کوانتمی تبدیل می‌کنیم. این روش به سادگی قابل تعمیم به مسائل با هندسه های مختلف نمی‌باشد و این از معایب این روش است.

کوانتش میدان الکترومغناطیسی با استفاده از معادلات اویلرلاگرانژ و اصل کمترین کنش روش استانداردی برای بررسی کوانتش تمامی میدانهای فیزیکی است. این روش بر اساس تعریف یک تابع لاگرانژی مؤثر برای سیستم میدان الکترومغناطیسی و ماده انجام می‌گیرد. ابتدا یک چگالی لاگرانژی مؤثر برای سیستم (محیط ومیدان) تعریف می‌کنیم که تابعی ازمتغیرهای دینامیکی سیستم و سرعتهای متناظر آنهاست، این چگالی منجر به لاگرانژی کل سیستم می‌شودکه تابعی حقیقی است. سپس با استفاده

از اصل کمترین کنش و تعریف هامیلتونی سیستم که تابعی از متغیـرهای دینامیکی و اندازه حرکت تعمیـم یافتـه است، می‌توان معـادلات حاکم بـرتـحول سیستم یـا همـان معـادلات ماکروسکوپی ماکسول را بـه دست‌آورد. اعمال جابجایی مناسب بین متغیرهای دینامیکی و اندازه حرکت تعمیم یافته متناظر منجر به کوانتش میدان می‌شود.

روش دیگرکوانتش میدان الکترومغناطیسی، روش تابع گرین است که بـا توصیف ماکروسکوپی ماده همراه است و از معـادلات ماکروسکوپی ماکسول که قابـل استـفاده برای هر نوع محیط مادی می‌باشند، استفاده می‌شود. این روش هیچ محدودیتی روی تابع دی‌الکتریک اعمال نمی‌کند جزاین ضرورت که این تابع باید با اصل علیت سازگار باشـد. ازمزایای این روش قابلیت تعمیم آن برای هندسه‌های مختلف ازقبیل فضای هـمگن، نیم فضا، تیغه وکاواک است.

۲-۳ کوانتش میدان‌الکترومغناطیسی درفضای‌تهی‌براساس بسط برحسب توابع مد

دراین روش ابتدا ازمعادلات میکروسکوپی ماکـسول در غیاب منبع خارجی شروع کرده و در پیمانه کولن با فرض صفربودن پتانسیل نرده ای، معادله موج حاکم بر پتانسیل برداری را به دست می‌آوریم. سپس جواب این معادله دیفرانسیل را برحسب توابع مد یک مکعب بسط می‌دهیم. آنگاه جواب به دست آمده را با استفاده از شرط کوانتش دیراک به حالت کوانتمی می‌بریم. در اینجا میدان الکترومغناطیسی مجموعه ای ازنـوسانـگرهای هماهنگ ساده در نظر گرفته می‌شود. در کوانتش میدان، هر مد میدان الکترومغناطیسی هم ارز یک نوسانگـر هماهنگ ساده در نظر گرفته می‌شود. بنا بر این در نـظریـه کوانتومی، میدان الکترومغناطیسی عملگری شبیه بسط فوریه میدان الکترومغناطیسی کلاسیک است، با این تفاوت که دامنـه آن عمـلگرهای خلـق و فـنا می‌باشد.

میدانهای الکتریکی ومغناطیسی به شکل زیر به پتانسیلهای برداری و نرده ای مربوط می‌شوند[۳]

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi \qquad (۱-۲)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \qquad (۲-۲)$$

در غیاب منبع خارجی ، معادلات ماکسول به شکل زیر می‌باشند

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad (۳-۲)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad (۴-۲)$$

با در نظر گرفتن این که در پیمانه کولن $\nabla.\mathbf{A} = 0$ است، با استفاده از معادلات بالا هنگامی که $\varphi = 0$ می‌باشد، به معادله زیر برای پتانسیل برداری خواهیم رسید

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 \qquad (۵-۲)$$

ناحیه ای که برای کوانتیزه کردن میدان در نظر گرفته ایم جعبه ای به ابعاد L است. درتوصیف کوانتومی میدان الکترومغناطیسی بهتر است آن را با متغیر های مستقل بیان کنیم. برای این منظور میدان مغناطیسی را بسط فوریه می‌دهیم. محورهای مختصات را به گونه ای در نظرمی‌گیریم که سه وجه مکعب درصفحات $y-z$, $x-z$, $x-y$ قرار گیرند وتمام جعبه در ناحیه $x > 0$ و $y > 0$ و $z > 0$ باشد. برای سادگی شرایط مرزی زیر را در نظر می گیریم

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(L,y,z,t) &= \mathbf{A}(0,y,z,t)\\
\mathbf{A}(x,L,z,t) &= \mathbf{A}(x,0,z,t)\\
\mathbf{A}(x,y,L,t) &= \mathbf{A}(x,y,0,t)
\end{aligned} \qquad (۶-۲)$$

جواب معادله (۲-۵) را می توان بر اساس توابع مد مکعب به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{A} = \sum_k a_k(t) e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}} \qquad (۷-۲)$$

چون برای هر بردار موج دو بردار پلاریزاسیون عمود برآن، که بر هم نیز عمودند، وجود دارد می‌توانیم (۲-۷) را به صورت کلی‌تر زیر باز نویسی کنیم

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \sum_{\sigma=1,2} \sum_k U_{k\sigma} a_{k\sigma}(t) e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}} \qquad (۸-۲)$$

که در آن $U_{k\sigma}$ بردار یکه در جهت بردار پلاریزاسیون می‌باشد. به راحتی می توان نشان داد که با اعمال شرایط مرزی[۳] بر روی این جواب، به عبارت زیر می‌رسیم

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \sum_{k>0} \sum_{\sigma=1,2} \left(\frac{\hbar}{2\epsilon_0 L^3 \omega_k}\right)^{\frac{1}{2}} \times$$
$$U_{k\sigma}\left[a_{k\sigma}(t) e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}} + a^*{}_{k\sigma}(t) e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{r}}\right] \qquad (۹-۲)$$

که درآن L اندازه ضلع مکعب و عامل

$$\left(\frac{\hbar}{2\epsilon_0 L^3 \omega_k}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ضریب بهنجارش است. از آنجا که محیط خلا می باشد رابطه k و ω، به صورت می‌باشد

$$\omega_k = kc \qquad (۱۰-۲)$$

برای آن که $\mathbf{A}$ کمیتی حقیقی شودآن را به صورت کمیتهای مختلط به اضافه مزدوج مختلط‌شان بیان کرده‌ایم. با استفاده از معادله (۲-۵) و جایگذاری (۲-۷) درآن می توان نشان داد که معادله حاکم بر هر $a_{k\sigma}$ عبارت است از