الله

بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تربیت معلم تهران

دانشکده ریاضی و مهندسی کامپیوتر

پایان نامه:

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

موضوع:

مجموعهٔ خودتوان‌های $\omega\mathbb{Z}$

استاد راهنما: دکتر علیرضا مدقالچی

نگارش: سید محمد طباطبایی

شهریور ۱۳۸۰

تاریخ ....
شماره ....
پیوست ....
واحد ....

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

دانشگاه تربیت معلم

صورتجلسهٔ دفاع از پایان نامهٔ کارشناسی ارشد

جلسهٔ دفاع از پایان نامه آقای سیدمحمد طباطبائی میمونه دانشجوی دورهٔ کارشناسی ارشد رشتهٔ ریاضی محض تحت عنوان:

مجموعهٔ خودتوانهای $w\mathbb{Z}$

در روز شنبه مورخهٔ ۸۰٫۶٫۳۱ در دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر تشکیل گردید و نتیجه آزمون به شرح زیر تعیین می‌گردد. نمرهٔ این آزمون هیجده و نیم (۱۸٫۵) می‌باشد.

۱- عالی ☑
۲- بسیار خوب ☐
۳- خوب ☐
۴- قابل قبول ☐
۵- غیر قابل قبول ☐

استاد راهنما
دکتر علیرضا مدقالچی

داور خارجی
دکتر علیرضا حسینیون

داور داخلی
دکتر امیر خسروی

اسماعیل بابلیان
رئیس دانشکدهٔ علوم ریاضی و
مهندسی کامپیوتر

تهران، خیابان طالقانی بین بهار وشریعتی، پلاک ۵۹۹ کدپستی ۱۵۶۱۸ تلفن۷۵۰۷۷۷۲ فاکس ۷۶۲۹۸۸

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

یا حی یا قیوم

محبوبی را سپاس که طایر قیاس بر مطلع جمـالش نپـرد و سیاح فرد بـه کنـه کمـالش پـی نـبرد . حبیبـی کـه بـه اقتضای« کنت کنزا مخفیـا فـأحببت أن أعـرف »تلاطـم قلـزم محبتش امواج آفرینش را به جنبش درآورده و چهار بـازار شهود را سرگرم یگانه گوهر وجود خود کرده .

جمیلی که صاحبان جمال را منصب آئینـه داری بخشـوده و خداوندان جلال را مظهر نزول اجلال فرموده . نه دلـبران جاذب را بی اشارت او یارای جلوه گریسـت و نـه بـی دلان مجذوب را بدون بشارتش پروای پرده دری :

گر نباشد جذبه پنهانیش گم کند دل راه دلبر دانیش
ور نتابد در دل مه مهر او شب نیابد روشنی از چهر او

خداوند را سپاسگزارم کــه بـه مـن نعمـت برخـورداری از دریای بــی کـران ریـاضی و تلـذذ لحظـات زیبـا، شـیرین و دلنشـین انـس و الفـت بـا ریاضیـات را ارزانـی داشــت .

ریاضیات یک هنر متعالی اسـت چـرا کـه خلاقیـت در آن مـوج مـی زنـد و هـنر ، تعـالی عاشـقانه عقــل اســت .

ریاضیـات بـه صورتـی نامتنـاهی گسترده اسـت . مــهم نیست چه مقدار در آن مکاشفه می کنیم ، حتــی اگر تـا

ابـد روی آن کـار کنیـم هـرگز بیشـتر از نقطـه ای ریــز در نخواهیم یافت .
امید آنکه در این دریای بـی کـران غـرق نشـویم بلکـه از اسرار و رموز آن در جهت غایت هستی که همانـا بنـدگی در پیشگاه خداوند متعال است و نیز خدمت به خلق خـدا و برخورداری از اخلاق پسندیده ، بهره بگیریم.

بر خود لازم میدانم که در اینجا از تمام کسانی که مرا در راه تحصیـل یـاری نمـوده انـد قدردانی کنم :

از پدر فداکارم که با کد یمین و عرق جبین ، با صفای باطن و دعاهای مسـتجابش همـواره پشتیبان من بوده است . از مادر مهربانم که مرا از کودکی در دامان پر مهرش پـرورش داد و لحظه لحظه زندگیم را مدیون عاطفه سرشار اویم . و همواره آرزویم این بوده که بتوانـم برای جبران گوشه ای از زحمات آنان ، دلشان را شاد کنم .
از معلمان دلسوزم که عاشقانه و صبورانه هدایتگر من از بیابان ظلمانی جهل به روشـنایی دانایی بوده اند و از یکایک آنان درس زندگی آموخته ام.
از اساتید بزرگوارم که اساسی ترین سرمایه هر انسان ، یعنی روش درست فکـر کـردن را از آنان فرا گرفته ام.
و سرانجام از تمام دوستان عزیزم که همواره مشوق من بوده اند و من نیز شرمنده اظـهار محبت آنان .
جا دارد سپاس فراوان خود را از استاد فرزانه جناب آقای دکتر صدقالچی که بـر بنـده منـت نهادند و هدایت اینجانب را در خصوص پایان نامه تقبل فرمودند و در سایه راهنمایی هـای ایشان بوده که توانسته ام این پایان نامـه را بـه انجـام برسـانم ابـراز دارم . همچنیـن از جناب آقای دکتر خسروی که بنده را مفتخر نمـوده و بـه عنـوان داور داخلـی قبـول زحمـت فرمودند و نیز از جناب آقای دکتر حسینیون که به عنوان داور خارجی قبول زحمت فرمودند سپاسگزارم .

فهرست مطالب:

چکیده:

[فرض کنید $\omega\mathbb{Z}$ فشرده‌سازی wap گروه جمعی $\mathbb{Z}$ باشد. در واقع $\omega\mathbb{Z}$ یک نیم‌گروه نیم‌توپولوژیک هاوسدورف و فشرده است که شامل یک کپی چگال $\mathbb{Z}$ بوده و در نوع خود بزرگترین است، به این مفهوم که هر فشرده‌سازی نیم‌گروه نیم‌توپولوژیک $\mathbb{Z}$، تصویر هومورفیک پیوسته $\omega\mathbb{Z}$ می‌باشد.]

در اینجا ثابت خواهیم کرد که مجموعهٔ خودتوان‌های $\omega\mathbb{Z}$ (و $\omega\mathbb{N}$) بسته نیست. این در واقع پاسخ منفی به پرسشی است که در طی حدود ۲۰ سال حل نشده باقی‌مانده است. آنچه که در حصول این نتیجه دخیل بوده به شرح زیر می‌باشد.

(۱) این امکان فراهم شده که توابع wap روی $\mathbb{Z}$ بتوانند بی‌کران باشند. از این نتیجه نیز که یک تابع از $\mathbb{Z}$ به $[0,\infty]$ یک توسیع پیوسته به $\omega\mathbb{Z}$ دارد اگر و تنها اگر wap باشد استفاده کرده‌ایم.

(۲) تجزیهٔ یکتای هر عدد صحیح $x\in\mathbb{Z}$ به صورت $x=\sum_{i\in\omega} x(i)(-2)^i$، جائیکه حداکثر برای یک تعداد متناهی از iها، $x(i)$ برابر یک و در سایر جاها برابر صفر است. نشان خواهیم داد که اگر c دنباله‌ای غیرصعودی از اعداد حقیقی نامنفی با حد صفر باشد آن‌گاه تابع $g_c : \mathbb{Z}\to[0,\infty]$ با ضابطهٔ $g_c(x)=\sum_{i\in\omega} c(i)x(i)$، wap است.

[این مطلب مبتنی بر روش ارائه شده توسط راپرت است با این تفاوت که در اینجا (-2) به عنوان پایهٔ بسط اعداد صحیح در نظر گرفته شده تا محاسبات آسانتر شود.]

(۳) استفاده از زیر نیم‌گروه فشرده $H=\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{\{x : \operatorname{supp}x \geq n\}}$ از $\omega\mathbb{Z}$، که در آن $\operatorname{supp}x=\{i\,;\,x(i)\neq 0\}$.

[H یکی از مؤثرترین ابزارهایی است که توسط پیم در رابطه با مطالعهٔ ساختار نیم‌گروه βS (که S یک نیم‌گروه گسسته است) مورد استفاده قرار گرفته است.]

(٤) یک مجموعهٔ شمارش‌پذیر Γ از دنباله‌های اکیداً صعودی، نامتناهی و جدا از هم ω را برگزیده و برای هر $\gamma\in\Gamma$، یک خودتوان متناظر e^γ از H و همچنین یک دنبالهٔ ویژهٔ c^γ را به گونه‌ای ارائه خواهیم داد که تابع g_{c^γ} در

$$g_{c^\gamma}(e^\eta)=\begin{cases}\infty & ;\gamma=\eta \text{ اگر}\\ 0 & ;\gamma\neq\eta \text{ اگر}\end{cases}$$

صدق کند. سپس ثابت شده است که تابع $G(x)=\sum_{\gamma\in\Gamma}(g^\gamma\wedge 1)(x)$ تعریف شده روی $\mathbb{Z}$، wap است.

اکنون فرض کنید که ξ یک نقطهٔ حدی (e^2) باشد. به راحتی می‌توان دید $G(\xi) = 1$ در حالی که $G(\xi+\xi) = 2$ زیرا g^2 یک همریختی روی H است. پس ξ یک خودتوان نیست و بنابراین مجموعهٔ خودتوان‌های $\omega\mathbb{Z}$ بسته نیست. چنین نتیجه‌ای برای $\omega\mathbf{N}$ نیز به دست می‌آید.

در ادامه رده‌ای از توابع روی مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ با مقادیر در بازهٔ بستهٔ $[0,1]$ را تولید خواهیم کرد و از آن در به دست آوردن خانواده‌های جدیدی از توابع wap، توابع متناوب و ... روی $\mathbb{Z}$ بهره خواهیم گرفت. یک تابع $f: \mathbb{Z} \to [0,1]$ که به این رده تعلق دارد، با کمک دنبالهٔ داده شدهٔ $a = (a_i)$ ـ که در آن a_iها اعداد طبیعی بزرگتر از ۲ هستند ـ و یک دنبالهٔ $c = (c_i)$ از اعداد حقیقی نامنفی چنان که برای هر i، $c_i \le a_{i+1}^{-1}$ ساخته می‌شود. بنابراین این تابع را (a,c) ـ تابع می‌نامیم. یک تابع کراندار g روی $\mathbb{Z}$ را شبه ـ متناوب نامیم هرگاه:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists 0 \neq y \in \mathbb{Z} \ ; \ \forall x \in \mathbb{Z} : |g(x+y) - g(x)| < \varepsilon .$$

قضیهٔ جالبی که در پی می‌آید نقش اساسی را در این بخش ایفا می‌کند:

دو دنبالهٔ a , c و یک (a,c) ـ تابع $f: \mathbb{Z} \to [0,1]$ را مطابق توضیحات فوق در نظر می‌گیریم. در این صورت:

(i) f شبه متناوب است اگر $\lim c_i = 0$ و $\sum_{i=0}^{\infty} c_i < \infty$، و برعکس، اگر f شبه متناوب باشد آن‌گاه $\liminf c_i = 0$؛ (ii) f، wap است اگر دنباله‌های a , c چنان باشند که یا $\sum_{i=0}^{\infty} c_i$ همگرا باشد یا دنبالهٔ c یکنوای غیرصعودی بوده و فقط یک تعداد متناهی از a_iها زوج باشند؛ برعکس، اگر f، wap باشد آن‌گاه برای هر دنبالهٔ (b_i) از اعداد صفر و یک، که $\sum_{i=0}^{\infty} b_i c_i a_{i+1}$ همگراست، لزوماً $\sum_{i=0}^{\infty} b_i c_{i+1}$ نیز همگرا می‌باشد؛ (iii) f، ap است اگر و تنها اگر $\sum_{i=0}^{\infty} c_i a_{i+1}$ همگرا باشد؛ (iv) f متناوب است اگر و تنها اگر همه بجز یک تعداد متناهی از c_iها صفر باشند.

این قضیه نشان می‌دهد که خاصیت تناوبی f، توسط دنبالهٔ (c_i) کنترل می‌شود.

واژه های کلیدی :توابع wap ، فشرده سازی نیم گروه، خود توان، a‌ـ بسط های علامتدار

مقدمه

کشف بوخنر[1] مبنی بر اینکه «یک تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$، بر مبنای تعریف اولیه بـور[2] ap است اگر و تنها اگر مدار آن یعنی $O^f = \{x \to f(x+r) ; r \in \mathbb{R}\}$ تحت عمل $\mathbb{R}$، با نرم سوپریمم به طور نسبی فشرده باشد»، یکی از کارها و موفقیت‌های بسیار مهم در آنالیز هارمونیک کلاسیک به شمار می‌رود.

این مشخص‌سازی، بطور طبیعی به توابع پیوسته روی گروه‌ها و نیم‌گروه‌های دلخواه تعمیم داده شد و سرانجام به تعریف‌های امروزی ما از توابع ap و wap منتهی گردید. اکنون مفهوم تناوب از نوع wap آن فاصلهٔ فراوانی با تصور مستقیم ما از تناوب یعنی تکرار متوالی یک فرآیند یا یک ویژگی، دارد.

از سوی دیگر نظریهٔ عمومی فشرده‌سازی نیم‌گروه‌های نیم توپولوژیک، پیشرفت نمود و در این رویکرد، آن فشرده‌سازی‌هایی که ویژگی‌های جبری یا توپولوژیک مورد نظر ما را می‌داشتند، جالب توجه به نظر می‌رسیدند. در این میان فشرده‌سازی نیم‌گروه توپولوژیک و فشرده‌سازی نیم‌گروه توپولوژیک جهانی، به ترتیب ارتباط مهم و تنگاتنگی با توابع ap و wap داشتند. بیش از ۳۰ سال پیش، دلیو[3] و گلیسبرگ[4] در مقالهٔ [8]، در یک نوآوری به اهمیت فشرده‌سازی wap پی بردند و به نتایج خوبی دست

1. Bochner.
2. Bohr.
3. de Leeuw.
4. Glicksberg.

یافتند. از جمله نشان دادند که برای یک نیم‌گروه نیم‌پوتولوژیک S، $C(\omega S)$ با $W(S)$ بطور جبری یکریخت است و نیز هر عضو $W(S)$ توسیع پیوسته‌ای به ωS دارد. علی‌رغم سال‌ها مطالعه، به دلیل سختی یافتن توابع wap که در دسترس ما باشند، این موضوع پیشرفت کندی داشته است. این مطلب از یک منظر، چندان جالب توجه نیست چرا که توابع wap، توسط جابجایی مراحل حدگیری مشخص‌سازی شده‌اند (قضیه (۲.۲)) و لذا ماهیتاً با یکی از مسائل اساسی آنالیز مرتبط می‌باشند. برخی محققین بطور خاص $\omega\mathbf{N}$ را مد نظر قرار دادند تا گزاره‌هایی به موازات آنچه در مورد فشرده‌سازی استون ـ چخ[1] $\beta\mathbf{N}$ بدست آمده بود را فراهم کنند. گرچه به نظر می‌رسد که چون $\omega\mathbf{N}$ جابجایی است کار با آن می‌تواند آسان باشد ولی ظاهراً کار با $\omega\mathbf{N}$، مشکل‌تر است. در واقع تباین قابل ملاحظه‌ای میان گزاره‌های متداول در مورد ساختارهای جبری فشرده‌سازی استون – چخ $\beta\mathbf{N}$ و فشرده‌سازی $\omega\mathbf{N}$ وجود دارد. طی ۲۰ سال گذشته یا بیشتر نتایجی در این‌باره عنوان شده است. نظریهٔ فشرده‌سازی استون ـ چخ شروع خوبی دارد: هر تابع تعریف شده روی گروهG، با مقادیر در یک فضای فشرده، توسیعی پیوسته به βG دارد، و حال آنکه می‌دانیم این عمومیت در مورد ωG وجود ندارد.

طبیعی است که در راستای مطالعهٔ $\omega\mathbf{N}$، اجزای مرتبط با آن نیز مورد توجه قرار گیرند. در این میان تحقیقاتی پیرامون خودتوان‌های $\omega\mathbf{N}$ به دلیل اهمیت آنان، صورت گرفته است. (به عنوان مثال اگر $f: G \to \mathbb{C}$ یک تابع wap باشد، برخی از رفتارهای تناوبی آن می‌تواند بوسیلهٔ خودتوان‌های ωG مورد ارزیابی قرار گیرد [14]). به علت دشواری پیدا کردن توابع wap، ایده‌های جدید، عمدتاً برگرفته از روش‌های غیرمستقیم بودند. نتایج بدست آمده در مورد خودتوان‌های $\omega\mathbf{N}$ نیز این‌گونه بود. این پرسش که آیا $\omega\mathbf{N}$ می‌تواند بیش از یک خودتوان داشته باشد، توسط وست[2] و در ارتباط با مسأله‌ای در نظریهٔ عملگرها پیرامون وجود تصویرها، عنوان شد و وی در آن مقاله

1. Stone-Cech compactification.

2. West.

[16] به جوابی مثبت دست یافت. براون[1] و موران[2] موفق شدند با بهره‌گیری از آمیختن تکنیک‌هایی از آنالیز هارمونیک و نظریهٔ عملگر، در مورد ساختار شبکهٔ[3] نیم‌گروه خودتوان‌ها به نتایج بیشتری رسیده و بویژه نشان دهند که این نیم‌گروه، نامتناهی است ([6]).

اما دشواری این روش‌ها امید اندکی از پیشرفت آینده را نوید می‌داد و در طول حدود ۲۰ سال، هیچ واقعیت جدید عمیقی در مورد خودتوان‌ها کشف نشد. تا اینکه راپرت[4] مانع مهمی را از سر راه برداشت. او رده‌ای از توابع wap را پیدا کرد که می‌توانستند به صورتی مقدماتی توصیف شوند [15]. این توابع نه تنها این اجازه را به وی دادند که نتایج براون و موران را موشکافی کند بلکه اطلاعاتی جدید در مورد ارتباط بین خودتوان‌ها و توپولوژی‌های روی گروه $\mathbb{Z}$ را نیز بدست آورد. نقطهٔ شروع کار او یک ایدهٔ بسیار خلاقانه بود. این ایده در ساده‌ترین حالت، متضمن بسط اعداد صحیح به شکل

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i k^i$$

است که در آن $k \geq 3$ بوده و x_iها اعداد صحیحی هستند که $-\frac{1}{2}k < x_i \leq \frac{1}{2}k$. (در واقع، او در حالتی کلی‌تر، بجای پایهٔ ثابت k، از یک پایهٔ متغیر استفاده می‌کند. ملاحظه می‌کنیم که ارقام x_i می‌توانند مقادیر منفی را نیز اختیار کنند.) توابع وی، توسط حاصلضرب‌های نامتناهی که مقادیرشان را در $[0,1]$ اختیار می‌کنند تعریف شدند و اثبات wap بودن این توابع کاری بس مشکل بود.

بردبار[5] در [3] نظریه‌ای بر اساس خطوط کلی نظریهٔ راپرت ارائه نموده است که البته روشهای آن در برخی موارد ساده‌تر می‌باشد. اما دو تفاوت عمده میان این دو وجود دارد. اولاً پایه‌ای که بردبار برای بسط اعداد صحیح در نظر گرفته، عدد منفی

---

1. Brown.
2. Moran.
3. Lattice.
4. Ruppert.
5. Bordbar.

(۲-) است و این موجب مثبت بودن ارقام می‌گردد و پیدایش قوانین ساده‌ای برای جمع اعداد در یک پایهٔ منفی، باعث آسان‌تر شدن محاسبات لازم می‌شود. ثانیاً بازهٔ[۰,∞] جایگزین [۰,۱] می‌شود. گرچه این مستلزم کار با توابع wap بی‌کران است با این وجود، این فایده را دارد که به جای حاصلضرب‌های نامتناهی می‌توان مجموع‌های نامتناهی را به کار گرفت. توابع wap که به این ترتیب حاصل می‌شوند شکل بسیار ساده‌ای دارند (قضیه (۲.۳)). برهانی که در فصل ۳ برای این قضیه ارائه می‌دهیم حتی از آن برهانی که در [3] آمده نیز آسان‌تر است.

راپرت در [15] به تمام پرسش‌های اساسی که در رابطه با خودتوان‌های $\omega\mathbf{N}$ مطرح بود پاسخ نگفت. به عنوان مثال این مسألهٔ باز را که آیا مجموعه خود توان‌ها بسته است، باقی گذاشت. این مطلب در فهرستی از مسائل پیرامون نیم‌گروه‌های نیم‌توپولوژیک که توسط برگلاند[1] در سال ۱۹۸۰ در [2] گردآوری شد نیز مد نظر قرار گرفت و مجدداً بوسیلهٔ راپرت در سال ۱۹۸٤ در [13] و همچنین در مقاله‌اش [14] در سال ۱۹۹۰ عنوان گردید. در اینجا ما به مسألهٔ فوق، برای هر دوی $\omega\mathbf{N}$ و $\omega\mathbb{Z}$، پاسخ منفی خواهیم داد.

در قضیهٔ (۲۸)، نوع جدیدی از توابع wap را تولید خواهیم کرد. اثبات wap بودن این توابع پیچیده بوده و (در لم (٤.۳)) مشتمل بر یک نتیجهٔ مقدماتی در مورد تغییر حدود برای نوع خاصی از دنباله‌های مضاعف از اعداد حقیقی می‌باشد. برهان قضیهٔ (۲۸)، موضوع فصل ٤ می‌باشد. استراتژی اساسی ما برای کل بحث، همان راهکاری است که در [5] برای حل همین مسأله در حالت فشرده‌سازی wap یک مجموع مستقیم تعداد شمارش پذیری از گروه‌های متناهی با توپولوژی گسسته، مورد استفاده قرار گرفته است. همانند راپرت در[15] ، ما نیز با $\mathbb{Z}$ بیش از $\mathbf{N}$ کار خواهیم کرد. زیرا هنگامی که بسط اعداد در پایهٔ منفی در نظر گرفته می‌شود، مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ بطور طبیعی پدیدار می‌گردد. نتیجه‌ای را که مایل هستیم در خاتمه برای $\mathbf{N}$ بدست آوریم، استنباط ساده‌ای از نتیجهٔ بیان شده در مورد $\mathbb{Z}$ خواهد بود (نتیجهٔ (۱۰ . ۲)).

---

1. Barglund.

وقتی همهٔ مقدمات توانستن در درون ما و یا در دسترس ما هست، چرا نتوانیم؟ فقط باید خواست و یک قدم برداشت.

غلامحسین مصاحب

فصل ۱

مقدمات و پیش‌نیازها

نمادگذاری: $\mathbb{N}$، $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{C}$ به ترتیب نمایان‌گر مجموعهٔ اعداد طبیعی، صحیح و مختلط هستند. ω نمایان‌گر اولین اردینال نامتناهی (یا $\mathbb{N}\cup\{0\}$) است.

توپولوژی

تعریف: یک توپولوژی روی یک مجموعهٔ X عبارت است از یک گردایهٔ τ از زیرمجموعه‌های X که ویژگی‌های زیر را دارد:

(۱) ϕ و X در τ هستند.

(۲) اجتماع عناصر هر زیرگردایه τ، در τ است.

(۳) اشتراک عناصر هر زیرگردایهٔ متناهی τ، در τ است.

(X,τ) را یک فضای توپولوژیک می‌نامیم. هر یک از اعضای τ را یک مجموعهٔ باز می‌نامیم.

یک پایه برای یک توپولوژی روی مجموعهٔ X عبارت است از یک گردایهٔ $\mathcal{B}$ از زیرمجموعه‌های X که:

(۱) برای هر $x\in X$، حداقل یک عضو پایه مانند B وجود دارد که شامل x است.

(۲) اگر x متعلق به اشتراک دو عضو پایه مانند B_1 و B_2 باشد آن‌گاه یک عضو پایه مانند B_3 هست که شامل x است و $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.