بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ریاضی
گرایش آنالیز

زوج هاي دوگان تقریبی قاب در فضاهاي هیلبرت وکاربرد آن ها برای قاب های گابور

استاد راهنما :
دکتر احمد صفاپور

دانشجو :
پوران قادری حسب

مهر ۱۳۸۹

دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان

دانشکده‌ی علوم ریاضی و کامپیوتر

گروه ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی خانم پوران قادری‌حسب

تحت عنوان:

«زوج‌های دوگان تقریبی قاب در فضای های هیلبرت و کاربرد آن‌ها برای قاب‌های گابور»

در تاریخ ۸۹/۷/۲۱ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ......عالی...... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه آقای دکتر احمد صفاپور با مرتبه‌ی علمی استادیار امضاء

۲- داور داخل گروه آقای دکتر محمدعلی دهقان با مرتبه‌ی علمی دانشیار امضاء

۳- داور خارج از گروه آقای دکتر علی‌اکبر عارفی‌جمال با مرتبه‌ی غلمی استادیار امضاء

۴- نماینده‌ی تحصیلات تکمیلی، آقای دکتر مهدی سویزی با مرتبه‌ی علمی استادیار امضاء

همتم بدرقه راه کن ای طایر قدس   که دراز است ره مقصد و من نوسفرم

سپاس خدای مهربان که عشق به آموختن را در دل انسان‌ها به ودیعه گذاشت. هرچند زبان را توان جبران زحمات نیست، اما بر خود لازم می دانم از تمامی عزیزانی که مرا در انجام این پروژه یاری رسانده اند صمیمانه قدردانی کنم.

از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر صفاپور که در دوران تحصیل حق استادی را به نحو احسن ادا کرده اند کمال تشکر و سپاس را دارم و همواره خود را مدیون تلاش ایشان می دانم و آرزوی توفیق روز افزون و سلامت برای ایشان از درگاه خداوند متعال مسئلت می نمایم.

از اساتید محترم جناب آقای دکتر دهقان و جناب آقای دکتر عارفی جمال که زحمت داوری و مطالعه این پایان نامه را بر عهده داشتند صمیمانه قدردانی می کنم.

از پدر و مادر عزیز و بزرگوارم که همواره دعای خیرشان بدرقه ی راهم بوده و مساعدت ها و همراهی های همسر و فرزندم کمال امتنان را دارم.

در پایان از دوستان مهربان که از هیچ کوششی در جهت یاری بنده دریغ نکرده اند سپاس گذارم.

سپاس همه آنان را که خوشه چین خرمن معرفتشان بوده ام و آموختن را به گونه ای مدیون فضل و کرم آنانم.

تقدیم به:

همسر و فرزندم

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگی

بسمه تعالی

چکیده

در دهه های اخیر، قاب ها به عنوان تعمیمی از پایه ها در فضاهای هیلبرت مورد توجه فراوان قرار گرفته‌اند. این پایه های تعمیم یافته برای تجزیه و باز سازی عناصر فضاهای هیلبرت مورد استفاده قرار می‌گیرند. در بازسازی عناصر فضا، دوگان ها نقش برجسته ای ایفا می‌کنند. در همین ارتباط دوگان های قاب های تولید شده توسط توابع چند جمله‌ای و B ـ اسپلاین ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. اما در عمل یافتن دوگان های یک قاب دلخواه چندان ساده نیست. به همین دلیل اخیراً مفاهیم دوگان تقریبی و شبه دوگان برای برطرف کردن این اشکال مورد توجه قرار گرفته‌اند. در این پایان نامه مفهوم قاب های دوگان تقریبی و قاب های شبه دوگان وارتباط آنها با قاب های کلاسیک را مورد بررسی قرار می‌دهیم. ساختن قاب های دوگان تقریبی راحت تر از قاب های دوگان کلاسیک است و حتی ممکن است باعث شود که همانند دوگان های معمولی تقریباً تمام ساختار بردار به طور کامل حفظ شود. بااستفاده از نظریه والنات برای عملگر قاب، برای تخمین انحراف از تساوی در شرایط دوگانی قاب، کران جانشینی برای رده‌ی وسیعی از قاب های گابور بدست می‌آ وریم. هم چنین دوگان های تقریبی سره ای برای قاب های گابور تولید شده توسط تابع گاوسی می‌سازیم . این دوگان های تقریبی، تقریباً ساختار کامل عناصر فضا را حفظ می‌کنند. خوشبختانه این روش برای قاب های گابور اساسی که باچسبان بودن فاصله زیادی دارند نیز قابل استفاده است.

پیش‌گفتار

فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت جدایی پذیر و $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ باشد. واضح است که حداقل یک قاب دوگان $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ وجود دارد که برای آن

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} < f, f_k > g_k, \qquad \forall \ f \in \mathcal{H}.$$

متأسفانه محاسبه صریح قاب های دوگان، معمولاً کار پیچیده ای است، بنابر این در جستجوی روش هایی برای ساختن دوگان های تقریبی هستیم.

پایان نامه حاضر به مفهوم قاب های شبه دوگان و دوگان های تقریبی می‌پردازد وخواص آنها را بررسی می‌کند.

قاب های دوگان تقریبی به دفعات در متون ریاضی مورد توجه قرار گرفته‌اند. به عنوان نمونه می توان به کارهای بوی و لاوجنسن [۲]، گیلبیرت و دیگران [۱۲] و هلشنایدر[۱۴] در ارتباط با قاب های موجکی و فایتینگیر و گروچنینگ [۹] و فایتینگر و کیبلینگر [۱۰] برای دستگاه های گابور اشاره نمود. اما آنچه در اینجا ارائه می‌شود، اولین بررسی نظام مند این موضوع است که بر اساس کار کریستینسن و لاوجنسن [۷] انجام شده است.

یک قاب دوگان تقریبی $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ متناظر با $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ به ازاء یک $0 < \epsilon < 1$ ، در نامساوی زیر صدق می کند :

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{\infty} < f, f_k > g_k \right\| \leq \epsilon \|f\|, \qquad \forall \ f \in \mathcal{H}. \qquad (1.0)$$

این کران به ویژه زمانی که ϵ کوچک باشد، جالب تر است. نشان خواهیم داد که هر قاب دوگان تقریبی یک قاب دوگان طبیعی از دیدگاه کلاسیک را تولید می‌کند. به علاوه خانواده‌ای

از قاب ها را بدست می آوریم که بین قاب دوگان "تقریبی" و قاب دوگان "حقیقی" ارتباطی ایجاد می‌کنند. علاوه بر آن، بر ای ساختن قاب های دوگان تقریبی از نظریه اغتشاش استفاده می‌کنیم. موقعیت هایی وجود دارند که در آن‌ها یافتن قاب دوگان برای قاب داده شده $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$، دشوار است، در حالی‌که می‌توان یک قاب $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ " نزدیک" به $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یافت که برای آن یک قاب دوگان نظیر $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ به صراحت شناخته شده است. شرایطی را معرفی می‌کنیم که تحت آن شرایط $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ اعم از این‌که دوگان دلخواهی از $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ باشد یا دوگان کانونی آن، یک دوگان تقریبی برای $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ می‌شود. البته تخمین برای فضاهای هیلبرت کلی باید به طرز دقیق تری انجام شود. برای قاب های گابور در $L^2(R)$ روش مستقیمی برای نامساوی از نوع (۱) و بر اساس نمایش والنات از عملگر قاب باز گو می‌کنیم که در[۱۳] ارائه شده‌است. مقدار ϵ بدست آمده، انحراف از تساوی در شرایط دوگانی گابور را نشان می دهد.

مبنای کار ما در این پایان نامه، مقاله های [٦] و[۷] و کتاب های [۳] و [۵] هستند. این پایان نامه به شکل زیر سازمان‌دهی شده است. در فصل اول به بیان تعاریف و مفاهیمی که در طول پایان نامه به آن نیاز داریم، پرداخته شده‌است. در فصل دوم قاب های گابور تولید شده توسط چند جمله‌ای ها و مولد های دوگان قاب گابور، مورد مطالعه قرار گرفته‌است. فصل سوم به بررسی قاب های گابور تولید شده توسط B ـاسپلاین ها و مولد های دوگان برخی B ـاسپلاین ها اختصاص دارد. در فصل چهارم مفاهیم جدید قاب های دوگان تقریبی و شبه دوگان را معرفی نموده و خواص آن ها را بررسی می‌نماییم، به ویژه جالب‌ترین این مفاهیم، یعنی قاب های دوگان تقریبی به طور مفصل مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در پایان به تخمین مستقیم قاب های گابور اشاره شده و همچنین کاربرد این مفاهیم، برای قاب های گابور تولید

شده توسط تابع گاوسی، ارائه گردیده است.

فهرست مندرجات

فصل ۱

مقدمه

در این فصل مقدماتی را بیان می‌نماییم که در این پایان‌نامه به آن‌ها نیاز داریم. تعاریف و قضایای این فصل برگرفته از [۱] و [۳] و [۵] و [۸] و [۹] و [۱۱] و [۱۶] می باشند. بخش اول به نمادها وتعاریف و قضایای پیش‌نیاز اختصاص دارد. در بخش دوم عملگرهایی روی $L^2(\boldsymbol{R})$ معرفی می‌شوند، که نقش کلیدی در قاب‌های گابور و موجک‌ها دارند. در بخش سوم مفاهیم اولیه ازنظریه‌ی قاب ها بیان می‌شود. در بخش چهارم B ـ اسپلاین ها و برخی خواص آن‌ها بیان می‌شود.

۱.۱ پیش‌نیازها

در این بخش به معرفی نمادها و بیان تعاریف و قضایایی می‌پردازیم، که در ادامه به آن‌ها نیاز داریم. در سراسر این پایان نامه $\mathcal{H}$ معرف یک فضای هیلبرت جدایی پذیر است، در نتیجه دارای یک پایه متعامد یکه شماراست. اگر $\{f_i\}_{i\in \boldsymbol{N}}$ پایه ای در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، هر

$f \in \mathcal{H}$ را می‌توان به صورت

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(f) f_i \tag{1.1}$$

نمایش داد که در آن اسکالر های $c_i(f)$ یکتا هستند.

قضیه زیر شرایط هم‌ارز برای وجود پایه متعامد یکه برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ را بیان می‌کند.

قضیه ۱.۱.۱ فرض کنید $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک مجموعه متعامد یکه در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. دراین‌صورت شرایط زیر معادل اند:

۱) برای هر $x \in \mathcal{H}$، $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$؛

۲) برای هر $x \in \mathcal{H}$، $\| x \|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2$ (**اتحاد پارسوال** [1])؛

۳) $\overline{span}(\{e_i\}_{i=1}^{\infty}) = \mathcal{H}$؛

۴) اگر برای هر $x \in \mathcal{H}$ و برای هر i، $\langle x, e_i \rangle = 0$، آن‌گاه $x = 0$.

هر مجموعه‌ی متعامکد یکه $\{e_i\}$ که در یکی از شرایط قضیه فوق صدق کند را یک پایه متعامد یکه برای $\mathcal{H}$ گوییم.

تعریف ۲.۱.۱ یک پایه ریس برای $\mathcal{H}$ خانواده‌ای به شکل $\{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$ می‌باشد به طوری که $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ پایه متعامد یکه برای $\mathcal{H}$ است و $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ عملگر کران‌دار و دوسویی می‌باشد.

تعریف ۳.۱.۱ فضای $L^2(\boldsymbol{R})$، گردایه همه توابع اندازه‌پذیر و مختلط مقدار f بر $\boldsymbol{R}$ است که $\int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 \, d\mu < \infty$.

---

[1] Parseval's identity

در این نوشته منظور از μ اندازه لبگ می‌باشد.

$L^2(\boldsymbol{R})$ با ضرب داخلی زیر یک فضای هیلبرت است

$$\langle f, g\rangle_{L^2(R)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\, dt.$$

برای راحتی از به کار بردن $L^2(\boldsymbol{R})$ به عنوان زیر نویس ضرب داخلی، صرف نظر می‌کنیم.

نرم روی $L^2(\boldsymbol{R})$ به صورت

$$\| f \| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2}.$$

می‌باشد.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنید $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ دو فضای هیلبرت با نرم‌های $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ و $\|\cdot\|_{\mathcal{K}}$ و ضرب‌های داخلی $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ و $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{K}}$ باشند. اگر S عملگر خطی از $\mathcal{H}$ به $\mathcal{K}$ باشد. دراین‌صورت

۱) S را کران‌دار گوییم، هرگاه

$$\|S\| = \sup\{\|Sx\|_{\mathcal{K}} : x \in \mathcal{H}, \|x\|_{\mathcal{H}} = 1\} < \infty$$

دراین‌صورت $\| S \|$ را نرم تبدیل خطی S می‌نامیم.

۲) اگر S عملگری کران‌دار باشد، عملگر **الحاقی** S، عملگر یکتای $S^* : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ است، به‌طوری‌که به ازای هر $x \in \mathcal{H}$ و $y \in \mathcal{K}$

$$\langle Sx, y\rangle_{\mathcal{K}} = \langle x, S^*y\rangle_{\mathcal{H}}$$

قضیه ۵.۱.۱ اگر عملگر T کران‌دار باشد، آن‌گاه T^* نیز کران‌دار است و

$$\| T \| = \| T^* \|$$

و

$$\| TT^* \| = \| T \|^{۲} = \| T^* \|^{۲}$$

قضیه ۶.۱.۱ عملگر کران‌دار و دوسویی بین دو فضای باناخ دارای معکوس کران‌دار است.

قضیه ۷.۱.۱ اگر $U : X \to Y$ کران‌دار باشد و $\| I - U \| < ۱$. آن‌گاه U دوسویی است و $U^{-۱} = \sum_{k=۰}^{\infty} (I - U)^k$. این سری بسط نیومن $U^{-۱}$ نامیده می‌شود. به علاوه

$$\| U^{-۱} \| \leq \frac{۱}{۱ - \| I - U \|}.$$

قضیه ۸.۱.۱ (نامساوی کوشی ـ شوارتز[۲]) فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد و $x, y \in \mathcal{H}$. آن‌گاه

$$|\langle x, y \rangle| \leq \| x \| \, \| y \| .$$

به‌ویژه برای فضای هیلبرت $L^{۲}(\boldsymbol{R})$، اگر $f, g \in L^{۲}(\boldsymbol{R})$ آن‌گاه

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} \, dx \right| \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^{۲} \, dx \right)^{۱/۲} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^{۲} \, dx \right)^{۱/۲}.$$

Cauchy-Schwartz inequality[۲]

هم‌چنین اگر $\{a_n\}_{n\in Z} \in \ell^{2}(Z)$ و $\{b_n\}_{n\in Z} \in \ell^{2}(Z)$، آن‌گاه

$$\left|\sum_{n\in Z} a_n\overline{b_n}\right| \le \left(\sum_{n\in Z} |a_n|^{2}\right)^{1/2} \left(\sum_{n\in Z} |b_n|^{2}\right)^{1/2}.$$

قضیه ۹.۱.۱ اگر $f \in L^{1}(\boldsymbol{R}^d)$ آن‌گاه برای همه $\alpha > 0$

$$\int_{R^d} f(x)dx = \int_{[0,\alpha]^d} \left(\sum_{k\in Z^d} f\left(x+\alpha k\right)\right) dx.$$

این بخش را با معرفی تبدیل فوریه به پایان می‌رسانیم.

تعریف ۱۰.۱.۱ **تبدیل فوریه** هر تابع $f \in L^{1}(\boldsymbol{R})$ به صورت

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2\pi i\xi x}\, dx,$$

و **تبدیل فوریه معکوس** آن به صورت

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\, e^{2\pi i x\xi}\, d\xi.$$

تعریف می‌شود.

تبدیل فوریه تابع f با $\mathcal{F}(f)$ و تبدیل فوریه معکوس آن با $\mathcal{F}^{-1}(f)$ نیز نمایش داده می‌شوند.

قضیه ۱۱.۱.۱ (پلانشرل [۳]) به هر $f \in L^{2}(\boldsymbol{R})$ می‌توان تابع $\hat{f} \in L^{2}(\boldsymbol{R})$ را طوری مربوط کرد که خواص زیر برقرار باشند

---

[۳] Plancherel

۱) هر گاه $f \in L^{1}(\boldsymbol{R}) \cap L^{2}(\boldsymbol{R})$، آن‌گاه $\hat{f}$ تبدیل فوریه f است؛

۲) به ازای هر $f \in L^{2}(\boldsymbol{R})$،

$$\|\hat{f}\|_{2} = \|f\|_{2}.$$

۳) نگاشت $f \longrightarrow \hat{f}$ یک یکریختی فضاهای هیلبرت از $L^{2}(\boldsymbol{R})$ به روی $L^{2}(\boldsymbol{R})$ می‌باشد.

قضیه ۱۲.۱.۱ فرض کنیم $f, g \in L^{2}(\boldsymbol{R})$، آن‌گاه

۱) $\langle \hat{f} \ , \ \hat{g} \rangle = \langle f \ , \ g \rangle$ (رابطه پارسوال)،

۲) $\|\hat{f}\|_{2} = \|f\|_{2}$ (فرمول پلانشرل).

قضیه ۱۳.۱.۱ فرض کنید $f \in L^{2}(\boldsymbol{R})$ و $\hat{f}$ تبدیل فوریه آن و D^k نمایش مشتق kام تابع f باشد، آن‌گاه

$$D^k \hat{f}(n) = (-2\pi i)^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) e^{-2\pi i n x} dx.$$

۲.۱ عملگرهایی روی $L^{2}(\boldsymbol{R})$

در این بخش عملگرهای روی $L^{2}(\boldsymbol{R})$ را که نقش کلیدی در قاب‌های گابور و موجک ها ایفا می کند، معرفی می کنیم.

تعریف ۱.۲.۱

۱) فرض کنیم $a \in \boldsymbol{R}$. **عملگر انتقال**[۴] به اندازه a را با T_a نمایش می‌دهیم و

$$T_a : L^2(\boldsymbol{R}) \to L^2(\boldsymbol{R})$$

$$(T_a f)(x) = f(x-a).$$

۲) فرض کنیم $b \in \boldsymbol{R}$. **عملگر مدولاسیون** [۵] به وسیله b را با E_b نمایش می‌دهیم و

$$E_b : L^2(\boldsymbol{R}) \to L^2(\boldsymbol{R})$$

$$(E_b f)(x) = e^{2\pi ibx}\, f(x).$$

۳) فرض کنیم $a \in \boldsymbol{R}$ و $a \neq 0$. **عملگر اتساع** [۶] را با D_a نمایش می‌دهیم و

$$D_a : L^2(\boldsymbol{R}) \to L^2(\boldsymbol{R})$$

$$(D_a f)(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\, f(\frac{x}{a}).$$

در این پایان‌نامه برای راحتی کار از قرار دادن پرانتزها صرف‌نظر می‌کنیم و به صورت $T_a f(x)$ نمایش می‌دهیم. بقیه عملگرها را نیز بدین صورت نمایش می‌دهیم.

چند شرط مهم درباره عملگرهای فوق در لم زیر بیان می‌شود.

لم ۲.۲.۱ عملگر انتقال در شرایط زیر صدق می‌کند

---

[۴] Translation

[۵] Modulation

[۶] Dilation