۸۷/۱/۱۰۱۲۱۲

۸۷/۱۰/۱۰

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تربیت معلم سبزوار

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی کاربردی

موضوع:

حل مسائل بهینه سازی محدب با استفاده از روش جبری- دیفرانسیلی و روش های نقطه درونی جدید

استاد راهنما:

دکتر سید ابوالفضل علوی

استاد مشاور:

دکتر سهراب عفتی

پژوهش و نگارش:

معصومه عباسی ملکسری

شهریور ۱۳۸٤

باسمه تعالی

دانشکده علوم پایه

شماره : ۶ ۳۰/۲۹

تاریخ : ۸۴/۷/۳

پیوست :

جلسه دفاع از پایان نامه **معصومه عباسی ملکسری** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی در ساعت ۱۱ تاریخ ۸۴/۶/۳۰ روز **چهارشنبه** در اتاق شماره ۲۴۳ تشکیل گردید. پس از بررسی و نظر هیأت داوران ، پایان نامه نامبرده با نمره ۱۹/۲۵ و درجه عالی مورد تأیید قرار گرفت.

عنوان رساله : حل مسایل بهینه سازی محدب با استفاده از روش جبری- دیفرانسیلی و روشهای نقطه درونی جدید

تعداد واحد : ۶ واحد

داور رساله : دکتر هادی فراهی

دانشیار دانشگاه فردوسی مشهد

داور رساله : دکتر عبداله قلی زاده

استادیار دانشگاه تربیت معلم سبزوار

استاد راهنما : دکتر سیدابوالفضل علوی

استادیار دانشگاه تربیت معلم سبزوار

استاد مشاور : دکتر سهراب عفتی

استادیار دانشگاه تربیت معلم سبزوار

۱۳۸۷/۱۰/ - ۵۱

نماینده تحصیلات تکمیلی : دکتر علی اصغر علوی

استادیار دانشگاه تربیت معلم سبزوار

مدیر گروه ریاضی : دکتر سهراب عفتی

استادیار دانشگاه تربیت معلم سبزوار

سپاسگزاری

اکنون که کار پژوهش و نگارش این پایان نامه با عنایت پروردگار بزرگ به پایان رسید، بر خود لازم می دانم از تمام عزیزانی که مرا در این راه یاری نموده اند تشکر و سپاسگزاری نمایم، از جناب آقای **دکتر سید ابوالفضل علوی** به عنوان استاد راهنما، از جناب آقای **دکتر سهراب عفتی** به عنوان استاد مشاور، که با درایت و راهنمایی های موثر شان کمک بسیاری به من کردند و نیز از تمام دوستان عزیزم، بویژه آقایان **حمید روح پرور، مهدی اسماعیلی** و **داریوش قاسمی** کمال تشکر را دارم.

تقدیم:

تقدیم به:

پدر مهربان

مادر فداکار

و برادران عزیزم

بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست

عنوان **صفحه**

عنوان **صفحه**

فصل پنجم. حل مسائل برنامه ریزی خطی با استفاده از روش های نقطه درونی جدید

عنوان **صفحه**

پیوست و مراجع

برای حل مسائل بهینه سازی خطی تحقیقات فراوانی تاکنون انجام شده و در این راستا روش های عددی گوناگونی ارائه گردیده است، در این میان مهمترین فاکتور برای مقایسه این روش ها، سرعت و دقت این روش ها برای حل مسائل می باشند، در این پایان نامه دو روش از روش هایی که به تازگی برای حل مسائل بهینه سازی خطی ارائه شده، و دارای سرعت و دقت بالایی می باشند مورد بررسی قرار می گیرند. این پایان نامه شامل پنج فصل می باشد:

در فصل اول، تاریخچه مختصری از مسائل بهینه سازی خطی بیان می شود. فصل دوم شامل تعاریف و قضایای مورد نیاز در این پایان نامه می باشد، در فصل سوم روش جبری دیفرانسیلی برای حل مسائل بهینه سازی خطی معرفی می گردد. و کارایی این روش برای حل این مسائل با استفاده از مثال های گوناگون نشان داده می شود. فصل چهارم شامل حل مسائل برنامه ریزی درجه دوم و غیر خطی محدب با استفاده از روش جبری دیفرانسیلی است که در حقیقت توسیع روش معرفی شده در فصل سوم برای حل رده وسیعی از مسائل بهینه سازی است، در این فصل نیز با استفاده از مثال های عددی متنوع کارایی این روش نشان داده می شود. در فصل پنجم روش های نقطه درونی جدید برای حل مسائل بهینه سازی خطی مورد بررسی قرار می گیرند، اساس کار در این فصل معرفی توابع مانع جدید می باشد، عملکرد این توابع مانع با استفاده از مثال های عددی نشان داه می شود.

این پایان نامه همچنین شامل برنامه های کامپیوتری برای حل مسائل برنامه ریزی خطی و درجه دوم با استفاده از روش جبری- دیفرانسیلی در حالت کلی می باشد.

فصل اول

تاریخچه برنامه ریزی خطی

چون بخش وسیعی ازاین پایان نامه درباره روش های جدید حل مسائل برنامه ریزی خطی است، بنابراین تصمیم گرفته شد تاریخچه مختصری از برنامه ریزی خطی و پیدایش آن در این فصل آورده شود.

تاریخچه و ظهور بهینه سازی خطی[1](LO)

بهینه سازی خطی قرنها ست که بکار برده شده است . حوزه بهینه سازی خطی در ابتدا به نام برنامه ریزی خطی بوده است ، اما امروزه لغت برنامه ریزی معمولاً به فعالیتهای برنامه های کامپیوترهای شخصی نسبت داده می شود. بنابراین بکار بردن لغت طبیعی تر «بهینه سازی» مانع اشتباه می شود. بنابراین، ترجیح می دهیم عنوان بهینه سازی خطی را به کار ببریم و این اصطلاح هم اکنون به طور عمومی پذیرفته شده است.

هدف از بهینه سازی ریاضی، مینیمم سازی (ماکزیمم سازی) یک تابع با چندین متغییر تحت مجموعه ای از قیود است. بهینه سازی ریاضی مسئله بسیار مهمی است که در بسیاری از وضعیت های جهان واقعی بوجود می آید.

بهینه سازی خطیLO بخشی از بهینه سازی ریاضی است که با مسئله مینیمم سازی یا ماکزیمم سازی یک تابع خطی با محدودیت های خطی در شکل مساوی ویا نا مساوی سرو کار دارد. کاربردهای زیادی دارد.

در طول سالهای ۱۹٤۰ بسیاری از مسائل LO مربوط به جنگ جهانی دوم مطرح شدند و معلوم شد که یک روش محاسباتی برای حل مسائل بهینه سازی خطی مورد نیاز است. دنتزیک روش سیمپلکس را در سال ۱۹٤۷ برای حل مسائل LO مطرح نمود. روش سیمپلکس به طور صریح ساختار ترکیباتی اش را برای تعیین جواب با حرکت از یک راس به راس مجاور یکی از مجموعه های شدنی با مقادیر صعودی از تابع هدف برای مسائل ماکزیمم سازی یا مقادیر نزولی از تابع هدف برای مسائل مینیمم سازی جستجو می کند. از زمان معرفی روش سیمپلکس توسط دنتزیک تا کنون بهینه سازی خطی به طور وسیعی در ارتش، صنعت، اقتصاد، شهر سازی و سایر حوزه ها بکار گرفته شده است.

ویژگی بهینه سازی خطی از عوامل متعددی از جمله توانمندی مدل سازی برای مسائل بزرگ و

---

۱. linear optimization

و پیچیده و نیز بکار گیری کامپیوتر های نسل جدید در حل مسائل بزرگ با استفاده از الگوریتم های کارا ناشی شده است. در طول جنگ جهانی دوم و پس از آن معلوم شد که برنامه ریزی و هم آهنگی پروژه های مختلف و استفاده موثر از منابع کمیاب یک ضرورت است.

تیم Scoop (محاسبات علمی برنامه های بهینه)نیروی هوایی ایالات متحده کار جدی خود را در ژوئن ۱۹٤۷ شروع کرد. ما حصل آن ابداع روش سیمپلکس توسط دنتزیک در پایان تابستان ۱۹٤۷ بود. بهینه سازی خطی به سرعت مورد توجه اقتصاددانان، ریاضی دانان آمار دانان و موسسات دولتی قرار گرفت. در تابستان ۱۹٤۹ کنفرانسی در بهینه سازی با مسئولیت کمیته Cowlesبرای تحقیق در اقتصاد برگزار شد. مقالات ارائه شده در این کنفرانس اندکی بعد از سال ۱۹۵۱ به همتT.c.Koopmans در کتابی تحت عنوان "تحلیل فعالیت تولید و تخصیص" جمع-آوری شد.

از زمان ابداع روش سیمپلکس تاکنون افراد زیادی در پیشرفت بهینه سازی خطی، در قالب تئوری ریاضی آن، معرفی روشها و کدهای محاسباتی کارا، کشف الگوریتم های نوین و کاربردهای جدید و کاربردهای بهینه سازی خطی به عنوان ابزاری برای حل مسائل پیچیده مثلاً بهینه سازی گسسته، بهینه سازی غیر خطی مسائل ترکیباتی، مسائل برنامه ریزی احتمالی و مسائل کنترل بهینه اشتراک داشته اند. الگوریتم سیمپلکس در پنجاه وهشت سال گذشته دائماً بهبود داده شد و به طور موفقیت آمیزی توسط بسیاری از دانشمندان و محققین هم از لحاظ تئوری و هم از لحاظ عملی پیشرفت حاصل کرد و کارائی عملی الگوریتم ثابت شد. در حالت کلی تشخیص داده شده است که روش سیمپلکس بسیار نیرومند وکارا می باشد و به موفقیت فراوانی چه در تئوری و چه در کاربرد رسیده است. هم اکنون بیشتر حل کننده های خطی تجاری از روش سیمپلکس استفاده می کنند. در تلاش برای توضیح کارائی قابل توجه روش سیمپلکس افراد بهینه ساز با یکدیگر به رقابت پرداختند تا ثابت کنند که یک مسئلهLO با استفاده از روش سیمپلکس در زمان چند جمله ای قادر به حل است. این موضوعات متعلق به حوزه ای از نظریه پیچیدگی است. تاکنون هیچکس نتوانست پیچیدگی چند جمله ای الگوریتم سیمپلکس را ثابت کند. خاصیت پیچیدگی چند جمله ای مهمتر از نظریه تئوری می باشد .

کلی[1] و مینتی[2] [۱] مسئله ای ساختندکه درآن روش سیمپلکس (با استفاده از قانون بزرگترین ضریب) برای حل کردن به زمان نمائی برحسب اندازه مسئله(طول ورودی)نیاز داشت[3]. پیچیدگی نمائی بدترین حالت روش سیمپلکس بسیاری از محققین را تحریک کرد تا بدنبال یک الگوریتم چند جمله ای زمانی برای حل مسئله بهینه سازی خطی باشندواین در توسعه دو الگوریتم جدید برایLO تاثیر گذار بود: الگوریتم بیضی وار و الگوریتم نقطه درونی.

خاچیان [٤] و [۵] در سال ۱۹۷۹، اولین الگوریتم چند جمله ای زمانی را برای حل مسائل بهینه سازی خطی با استفاده از بیضی وار شر[4] [۲] ویودین [5] ونیمروفیسکی[6] [۳] ارائه داد. الگوریتم وی شبیه روش بیضی واری بود که در ابتدا برای مسائل بهینه سازی غیر خطی توسعه پیدا کرده بود. با این تکنیک خاچیان ثابت کرد که LO متعلق به رده ای از مسائل حل پذیر به طور چند جمله ای است. و الگوریتم بیضی وار یک پیچیدگی تکرار $O(n^2L)$ با مجموع $O(n^4L)$ بیت عملگر دارد که L اندازه ورودی یک نمونه مسئله است وn تعداد متغییرهاست: نتایج خاچیان بلافاصله مورد تشویق نشریات بین المللی قرار گرفت و الگوریتم بیضی وار بعدها موضوع تحقیقات متمرکز و وسیعی از دانشمندان زیادی چه از نظر تئوری و چه از نظر محاسباتی بود.اگر چه نتایج خاچیان بازتاب نظری زیادی نداشت اما متاسفانه علی رغم انتظارات بالا، در عمل الگوریتم همواره به بدترین کران خودمی رسید ونتوانست بر الگوریتم های پایه گذاری شده روی روش سیمپلکس غلبه کند.

کارمارکار سال ۱۹۸٤ الگوریتم جدید خودش را برای LO ارائه داد که عصر جدیدی از روشهای نقطه درونی (IPM's)[7] را آغاز کرد. الگوریتم کارمارکار یک چند جمله ای زمانی است که روشی موثر تر از روش سیمپلکس است و پیچیدگی تکرار چند جمله ای $O(n^2)$ با مجموع $O(n^{3.5}L)$ بیت عملگر دارد. کارمارکار همچنین اعلام کرد وی قادر به حل مسائل بهینه سازی خطی مقیاس بزرگ، بسیار سریع تر از اجرا های موجود روش سیمپلکس می باشد. الگوریتم کارمارکار با روش سیمپلکس بسیار فرق دارد .روش سیمپلکس روشی ترکیباتی است که در میان

---

۱. klee ۲. Minty

۳. صریح تر :۱- 2^n تکرار نیاز نبودتا یک برنامه ریزی خطی با n متغییر و ۲n محدودیت حل شود.

٤. Shor ۵.Yudin ٦. Nemiroreskii

۷. Intereior point method

نقاط راسی ناحیه شدنی برای رسیدن به یک نقطه راسی بهینه تکرارمی شود .با این وجود، بیشتر ایده های زیربنایی الگوریتم کارمارکار از حوزه بهینه سازی غیر خطی ابداع شده است. این رده جدید از روشها، روشهای نقطه درونی نامیده شدند. این روشها در میان یک سری از نقاط اکیداً شدنی (نقاط درونی پلی تُپ[1]) متحول می شوند و به یک جواب بهینه (تقریبی) می رسند. پیچیدگی این الگوریتم از پیچیدگی الگوریتم خاچیان کمتر است واجرای الگوریتم کارمارکار در عمل ثابت شد که موثر تر است، به خصوص زمانی که اندازه مسئله بزرگ باشد. در آن زمان نام کارمارکار و الگوریتمش در صفحه اول روزنامه New York Times ثبت شد و این بسیاری از دانشمندان و محققین بهینه سازی را به این زمینه جدید جذب کرد. بعدها صدها مقاله در ارتباط با این الگوریتم جدید منتشر شد. از طرف دیگر در آن زمان کارمارکار فقط کارائی الگوریتم را به طور نظری نشان داد و این در حالی بود که نتایج محاسباتی قابل اثبات به اندازه کافی وجود نداشت. بنابراین ادعاهای او درباره کارایی محاسباتی با اندکی شک و تردید از سوی برخی متخصصین در زمینه بهینه سازی ریاضی مواجه شد. چند سال بعد ثابت شد که روشهای نقطه درونی هم در تئوری وهم در عمل کارا هستند . مقاله کارمارکار بسیاری از محققین را به این حوزه هدایت کرد. بعد از مدت کوتاهی ، وندربی[2]، مکیتن[3]، و فریدمن[4] [٦] وبارنز[5] [٧] یک ساده سازی طبیعی از الگوریتم کارمارکاررا پیشنهاد دادند. در سال ١٩٦٧ روشن شد که دایکن[6] [٨] پیشنهادی بسیار شبیه داشته است.

این روزها، آن روش مقیاس آفین[7] نامیده می شود. در سال ١٩٨٧، مجیدو[8] [٩] چهار چوبی برای الگوریتم های نقطه درونی اولیه ـ دوگان ارائه داد. مقاله قابل توجه دیگر الگوریتم رنگر[9] [١٠] بود. رنگر اولین کسی بود که یک کران $O(\sqrt{n}L)$ تکرار را برای روش زیر مسیر[10] اثبات کرد روشهای زیر مسیر، آشکارا تکرارها را در یک همسایگی از مسیر مرکزی[11] (بعداً تعریف می شود) محدود می کنند و مسیر مرکزی را تا رسیدن به یک جواب بهینه دنبال می کنند. اگر چه روش زیر مسیر رنگر یک کران تکرار بهتر نسبت به الگوریتم کارمارکار داشت ولی در عمل کارا نبود، بعدها، ویدا[1] [١١] الگوریتم زیر مسیر رنگر را اصلاح کرد و یک الگوریتم با یک پیچیدگی

---

١. Poly top
٢. Vanderbei
٣. Mekton
٤. Freedman
٥. Barnes
٦. Dikin
٧. Affine-scalling method
٨. Megido
٩. Renger
١٠. Path_ following method
١١.Central path

عمومی[1] $O(n^3L)$ را توصیف کرد . همچنین ویدا اولین توسع دهنده روشهای زیر مسیر برای کنترل نمائی بسیاری از محدودیت ها در بعضی حالت هایی بود که بعنوان روش بیضی وار انجام شد.

تقریباً در همان زمان ، گنزگا[2] [۱۲] هم همان پیچیدگی را پیشنهاد داد. همچنین درآن زمان کاجیما[3]، میزنو[4] و یوشیز[5] [۱۳] یک روش زیر مسیر اولیه- دوگان پیشنهاد دادند. چندی بعد این روش با پیچیدگی یکسان با الگوریتم ویدا $O(n^3 L)$ توسط خود آنها [۱٤] و منتریو[6] و ادلر[7] [۱۵] اصلاح شد. خانواده دیگری از الگوریتم ها روی تابع پتانسیل پایه ریزی شد که بعداً توسعه داده شد. این الگوریتم ها از یک تابع پتانسیل برای ارزش هر تکرار استفاده می کنند. تابع پتانسیل تکرار ها را دور از ناحیه شدنی نگه می دارد در هر تکرار، الگوریتم تلاش می کند تا تابع پتانسیل را با یک ثابت کاهش دهد در مقابل، الگوریتم ها به یک کران تکرار چند جمله ای می رسند.

الگوریتم کارمارکار یک الگوریتم پتانسیل کاهشی فقط اولیه است. گنزگا[۱٦] یک الگوریتم پتانسیل کاهشی فقط اولیه ارائه داد. الگوریتم وی، الگوریتم کارمارکار هر دو الگوریتم های $o(nL)$ تکرار هستند. در سال ۱۹۹۰، تاد[8] و ئی[9] [۱۷] اولین الگوریتم با استفاده از تابع پتانسیل اولیه ـ دوگان را در تحلیل های خودشان ارائه دادند. اما الگوریتم آنها به یک الگوریتم زیر مسیر بیشتر شبیه بود تا به یک الگوریتم پتانسیل کاهشی. اولین الگوریتم پتانسیل کاهشی محض با کران پیچیدگی$O(\sqrt{n}L)$تکرار شایسته ای[۱۸] بود. گنزگا [۱۹] یک بازبینی عالی روی روشهای زیر مسیر ارائه داد. بعداً، تاد[۲۰] یک مقاله عالی درباره تابع پتانسیل ارائه داد. همچنین اخیراً چند کتاب درباره روشهای نقطه درونی منتشر شده است . آنها نستروف[10] و نیمروفسکی[۲۱] و وندربی[۲۲] رایت[۲۳] و ئی[۲٤] هستند.

در میان همه انواع روشهای نقطه درونی اولیه دوگان متقارن نقش بسیار مهمی را درنظریه و عمل بازی می کنند. در یک جمله آنها به خوبی در نظریه تحلیل شده‌اند و بهترین کران پیچیدگی بدترین حالت را دارند . به عبارت دیگر آنها بسیار Robust[11] هستند و در عمل بسیار کارا می باشند. اخیراً گرایشی برای گسترش دادن این الگوریتم های تقریباً موفق برنامه ریزی خطی برای یک حوزه وسیع تر از جمله برنامه ریزی نیمه معین وبرنامه ریزی محدب بوجود آمده

---

۱. Vaidya ۲. Gonzago ۳. Kojima ٤. Mizuno
۵. Yoshise ٦. Monterio ۷. Adler ۸. Todd
۹. Ye ۱۰. Nesterov

۱۱. یک جواب Robust دریک مسئله بهینه سازی جوابی‌است که بهترین عملکردتحت بدترین حالت خودش (قانونMax - Min) رادارد.

است. نستروف و تاد [۲۵] یک الگوریتم نقطه درونی اولیه، دوگان متقارن برای ناحیه های شدنی بیان شده به صورت اشتراک یک مخروط متقارن با یک زیر فضای آفین ارائه دادند. بعداً تانسل [۲۶] روش نقطه درونی اولیه ـ دوگان برای مسائل بهینه سازی محدب در فرم مخروطی را عمومیت بخشید. تعمیم او فقط مسائل الگوریتم های قابل اجرا را تعمیم نداد. به عبارت دیگر از برنامه ریزی خطی به مسئله بهینه سازی محدب در فرم مخروطی تعمیم داد وی همچنین جستجو به حوزه وسیعتری گسترش داد .

نکته شایان توجه در اینجا این است که پیشرفت سریع LO فقط در نتیجه الگوریتم های کارا نیست بلکه همچنین درنتیجه پیشرفت هایی در تکنولوژی کامپیوتر است . در زمانهایی قبل از به وجود آمدن کامپیوتر های دیجیتالی تنها مدلهای بهینه سازی بسیار ساده شامل تعداد کمی متغییر و تعداد کمی قید توسط برخی ابزارها و روشهای خاص قابل حل بودند. بنابر این درآن روزها، به نگه داشتن مدلها بصورت بسیار کوچک و فشرده تاکید فراوانی می شد، در غیر اینصورت آنها قابل حل نبودند. اختراع کامپیوترهای دیجیتالی به طور باور نکردنی کل دنیا را وبنابراین حوزه بهینه سازی را تغییر داد. در ۵۰ سال اخیر با ترکیب کامپیوترها و روشهای ترکیبی کارا، تعداد زیادی از الگوریتم ها برای انواع گوناگونی از مسائل بهینه سازی به طور گسترده ای فراهم شده اند. امروزه قادر به حل مسائل بهینه سازی پیچیده وبزرگ هستیم که قبل از ظهور کامپیوترها از توانائی ما خارج بودند. برای مثال مدلهای خطی از مسائل جدول بندی خدمه کشتی که به بزرگی ۱۳ میلیون متغییر می باشد در حدود سه ثانیه روی یک کامپیوتر با سرعت بسیار بالا[۱] انجام می‌شود[۲۸].

بخشی از سرعت نایل شده درحل مسائل برنامه ریزی خطی در۵۰ سال اخیر در نتیجه پیشرفت در تکنولوژی کامپیوتر و بخش مهمی در نتیجه پیشرفت در زمینه IPM's برای LO می باشد.

۱. Four – processor silicon graphics power challenge works tation.

فصل دوم

پیشنیازها

تعاریف و قضایا

در این فصل تعاریف و قضایای مورد نیاز در این پایان نامه را بیان می کنیم[1].

۲-۱ روش تابع مانع[2]

توابع مانع مانند توابع جریمه[3] برای تبدیل یک مساله مقید به یک مساله نامقید یا یک دنباله از مسائل نامقید به کار می رود. روش تابع مانع برخلاف روش تابع جریمه بدین صورت عمل می کند که اگر جواب بهینه در مرز ناحیه شدنی قرار داشته باشد از درون ناحیه شدنی به طرف مرز و جواب بهینه حرکت می کند و بنابراین دنباله ای از نقاط شدنی را تولید می کند.

مساله اولیه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \mathrm{f}(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t} \quad & \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \le 0 \\ & \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} \end{aligned}$$

که در آن $\boldsymbol{g}$ یک تابع برداری است که مولفه هایش $\boldsymbol{g}_1,\cdots,\boldsymbol{g}_m$ هستند. در اینجا $\mathrm{f},\boldsymbol{g}_1,\cdots,\boldsymbol{g}_m$ توابع پیوسته روی $\boldsymbol{E}_n$ هستند و $\boldsymbol{X}$ یک مجموعه غیر تهی در $\boldsymbol{E}_n$ است.

مساله مانع برای مساله فوق به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \theta(\mu) \\ \text{s.t} \quad & \mu \ge 0 \end{aligned}$$

که در آن :

$$\theta(\mu) = \inf\{\mathrm{f}(\boldsymbol{x}) + \mu \mathrm{B}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) < 0,\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}\}$$

در اینجا B یک تابع مانع است که روی ناحیه $\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) < 0\}$ غیر منفی و پیوسته است و زمانیکه از درون به مرز ناحیه $\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \le 0\}$ نزدیک می شود به ∞ میل می کند. در حالت خاص می توان تابع مانع را به صورت زیر تعریف نمود:

$$\mathrm{B}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} \varphi[\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})] \qquad (۱)$$

که φ تابعی از یک متغیر است که روی $\{\mathrm{y} \mid \mathrm{y} < 0\}$ پیوسته است و در روابط زیر صدق می کند:

$$\begin{cases} \varphi(\mathrm{y}) \ge 0, & \mathrm{y} < 0 \\ \lim_{\mathrm{y} \to 0^-} \varphi(\mathrm{y}) = \infty \end{cases} \qquad (۲)$$

---

۱. دراین پایان نامه بردارها، توابع برداری و ماتریس ها با حروف انگلیسی پررنگ و اسکالرها توسط حروف انگلیسی کمرنگ معرفی شده اند .

۲. Barrier function ۳. Penalty function

به عنوان مثال یک تابع مانع به فرم زیر می باشد:

$$\mathrm{B}(x)=\sum_{i=1}^{m}\frac{-1}{g_i(x)}$$

تابع $\mathrm{f}(x)+\mu\mathrm{B}(x)$ تابع اصلی نامیده می شود که تابع متناهی روی ناحیه $\{x\,|\,g(x)<0\}$ مقدار متناهی می گیرد و مقدار ∞ را روی مرز خود می گیرد. پس با فرض اینکه مساله مینیمم سازی در یک نقطه درونی شروع شود این مطلب تضمین می کند که روش تابع مانع ناحیه $\{x\,|\,g(x)\le 0\}$ را ترک نمی کند.

۲-۲-۱ لم

فرض کنید $\mathrm{f}, g_1,\dots,g_m$ توابع پیوسته روی E_n باشند و فرض کنید X یک مجموعه غیر تهی بسته در E_n باشد. فرض کنید که مجموعه $\{x\in X\,|\,g(x)<0\}$ تهی نباشد و اینکه B یک تابع مانع است که روی $\{x\,|\,g(x)<0\}$ پیوسته است ودر (۱) و(۲) صدق می کند، بعلاوه فرض کنید که برای هر μ، اگر $\{x_k\}$ در X در رابطه $g(x_k)<0$ صدق کند و

$$\mathrm{f}(x_k)+\mu\mathrm{B}(x_k)\to\theta(\mu)$$

در این صورت $\{x_k\}$ یک زیر دنباله همگرا دارد و در این صورت:

۱. برای هر $\mu>0$ یک $x_\mu\in X$ با $g(x_\mu)<0$ وجود دارد به طوریکه:

$$\boldsymbol{\theta(\mu)=f(x_\mu)+\mu B(x_\mu)=\inf\{f(x)+\mu B(x)\,|\,g(x)<0, x\in X\}}$$

۲. $$\boldsymbol{\inf\{f(x)\,|\,g(x)\le 0, x\in X\}\le\inf\{\theta(\mu)\,|\,\mu>0\}}$$

۳. برای هر $\mu>0$، $\mathrm{f}(x_\mu)$، $\theta(\mu)$ توابع غیر نزولی از μ هستند و $\mathrm{B}(x_\mu)$ یک تابع غیر صعودی از μ است.

برهان:

$\mu>0$ را ثابت در نظر بگیرید. با توجه به تعریف θ، یک دنباله $\{x_k\}$ با $x_k\in X$ و $g(x_k)<0$ وجود دارد به طوریکه $\mathrm{f}(x_k)+\mu\mathrm{B}(x_k)\to\theta(\mu)$. با توجه به فرض دنباله $\{x_k\}$ زیر دنباله همگرای $\{x_k\}_{\mathrm{N}}$ با حد x_μ در X دارد. با توجه به پیوستگی g، $g(x_\mu)\le 0$. نشان داده می شود که $g(x_\mu)<0$. در غیر این صورت برای برخی از i ، $g_i(x_\mu)=0$ و چون تابع مانع B در (۱) و (۲) صدق می کند، برای $\mathrm{k}\in\mathrm{N}$، $\mathrm{B}(x_k)\to\infty$ و بنابراین $\theta(\mu)=\infty$ که غیر ممکن است. چون $\{x\in X\,|\,g(x)<0\}$ طبق فرض غیر تهی است، بنابراین $\theta(\mu)=\mathrm{f}(x_\mu)+\mu\mathrm{B}(x_\mu)$

که $x_\mu \in X$ و $g(x_\mu) < 0$. بنابراین قسمت (۱) ثابت شد.

حالا چون $B(x) \geq 0$، اگر $g(x) < 0$ در این صورت برای هر $\mu \geq 0$ ما داریم:

$$\theta(\mu) = \inf\{f(x) + \mu B(x) \mid g(x) < 0, x \in X\}$$
$$\geq \inf\{f(x) \mid g(x) < 0, x \in X\}$$
$$\geq \inf\{f(x) \mid g(x) \leq 0, x \in X\}$$

چون نامساوی بالا برای هر $\mu \geq 0$ برقرار است، قسمت(۲) نتیجه می شود.

برای اثبات قسمت (۳) فرض کنید $\mu > \lambda > 0$. چون $B(x) \geq 0$، بنابراین برای هر $x \in X$ با $g(x) < 0$ خواهیم داشت:

$$f(x) + \mu B(x) \leq f(x) + \lambda B(x)$$

پس $\theta(\mu) \geq \theta(\lambda)$. با توجه به قسمت (۱)، x_μ و x_λ وجود دارد به طوریکه:

$$f(x_\mu) + \mu B(x_\mu) \leq f(x_\lambda) + \mu B(x_\lambda) \tag{۳}$$

$$f(x_\lambda) + \lambda B(x_\lambda) \leq f(x_\mu) + \lambda B(x_\mu) \tag{٤}$$

با جمع کردن نامساوی های (۳) و(٤) و مرتب کردن آنها داریم:

$$(\mu - \lambda)[B(x_\mu) - B(x_\lambda)] \leq 0$$

چون $\mu > \lambda > 0$، بنابراین $B(x_\mu) \leq B(x_\lambda)$. با جایگذاری در (٤) خواهیم داشت که

$$f(x_\lambda) \leq f(x_\mu)$$

بنابراین قسمت (۳) ثابت شد، و در مجموع اثبات لم کامل می شود.

با توجه به لم فوق θ تابعی غیرنزولی از μ است بنابراین

$$.\inf_{\mu>0} \theta(\mu) = \lim_{\mu\to 0^+} \theta(\mu)$$

قضیه زیر نشان می دهد که جواب بهینه برای مساله اولیه در حقیقت مساوی با $\lim \theta_{\mu\to 0^+}(\mu)$ است، بنابراین یک مساله مجزا به فرم

$$\begin{array}{c} \text{Min} \;\; f(x) + \mu B(x) \\ x \in X \end{array}$$

به ازای یک μ به اندازه کافی کوچک می تواند حل گردد یا یک دنباله از مسائل به شکل بالا با مقادیر نزولی μ حل شود.