بسم الله الرحمن الرحیم

۱۵۸۶۸۷-۹۰۳۳۲۳۱

دانشگاه اصفهان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش جبر

مطالعه خواص همولوژیکی مدول های نیمه دوگانی

استاد راهنما:
دکتر جواد اسدالهی

پژوهشگر:
پریسا مسعودیان خوزانی

آبان‌ماه ۱۳۸۹

شیوه نگارش پایان نامه
رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش جبر خانم پریسا مسعودیان خوزانی

تحت عنوان:

خواص همولوژیکی مدولهای نیمه دوگانی

در تاریخ **۸۹/۸/۴** توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ....عالی........... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه دکتر **جواد اسدالهی** با مرتبه علمی دانشیار امضاء

۲- استاد داور داخل گروه دکتر **شکراله سالاریان** با مرتبه علمی دانشیار امضاء

۳- استاد داور خارج گروه دکتر **محمود بهبودی** با مرتبه علمی استادیار امضاء

مهر و امضای مدیر گروه ....

گروه ریاضی دانشگاه اصفهان

سپاس و ستایش ایزد متعال را سزاست که به انسان نیروی تفکر و تعقل بخشید تا بتواند به معراج درایت راه یابد.

از پدر و مادر و خانواده ی عزیزم که همواره در تمامی مراحل زندگی مرا یاری نموده اند صمیمانه تقدیر و تشکر می نمایم.

این مجموعه را مدیون راهنمایی های استاد گرامی و بزرگوارم جناب آقای دکتر جواد اسدالهی می دانم که دلسوزانه و در نهایت صبر و شکیبایی مرا راهنمایی نموده اند. گرچه تشکر من قطره ای در برابر دریای بی کران محبت ها و کمک های ایشان می باشد، بر خود لازم می دانم از زحمات بی دریغ ایشان صادقانه سپاس گزاری نموده و از درگاه ایزد منان توفیق روزافزون برای ایشان خواهانم. امیدوارم که رهنمودهای ایشان در آینده نیز روشنگر راهم باشد.

زحمات اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر شکراله سالاریان و جناب آقای دکتر محمود بهبودی را ارج نهاده و از تمام بزرگوارانی که در طول تحصیل و شکل گیری این پایان نامه مرا یاری نموده اند تشکر می نمایم.

تقدیم به:

اسوه تلاش و ایمان

پدرم

دریای صبر و مهر

مادرم

و

همه آنهایی که دوست شان دارم...

چکیده

در این پایان نامه رفتار همولوژیکی مدول نیمه دوگان را بررسی می کنیم. هدف ما ، برقراری ارتباط بین کوهمولوژی نسبی (نسبت به کلاس C- تصویری ها و C- تزریقی ها) و کوهمولوژی مطلق می باشد. لذا در ابتدا مفهوم کوهمولوژی نسبی نسبت به کلاس دلخواهی از R- مدول ها را بیان نموده و به مطالعه مدول نیمه دوگان می پردازیم. هم چنین کلاس باس، آسلاندر، کلاس C- تصویری ها و C- تزریقی ها را نسبت به مدول نیمه دوگان C معرفی کرده و ارتباط بین آن ها را مشخص می کنیم. سپس بُعد C- تصویری و بُعد C- تزریقی مدول ها را تعریف نموده و ارتباط بین بُعد C- تصویری و بُعد تصویری مدول ها را بیان می کنیم. هم چنین به صورت دوگان ارتباط بین بُعد C- تزریقی و بُعد تزریقی مدول ها را بیان می نمائیم.

کلمات کلیدی: مدول دوگان ، مدول نیمه دوگان ، مدول تماماً بازتابی ، کلاس C- تصویری ، کلاس C- تزریقی ، بُعد C- تصویری ، بُعد C- تزریقی ، کوهمولوژی نسبی.

فهرست مطالب

۱ ۱

۱.۱ مفاهیم اولیه ۱

۲.۱ کوهمولوژی نسبی ۱۹

۲ مدول نیمه‌دوگان و دوگان ۳۱

۱.۲ مدول نیمه‌دوگان و دوگان ۳۱

۲.۲ مدول تماماً بازتابی و ارتباط آن با مدول نیمه‌دوگان ۴۱

۳.۲ مدول‌های نیمه‌دوگان ودوگان روی حلقه گرنشتاین ۴۴

۴.۲ شرایط وجود مدول دوگان ۵۱

۳ بررسی کلاس باس و آسلاندرنسبت به مدول نیمه‌دوگان ۶۲

۱.۳ ویژگی کلاس‌های باس و آسلاندر ۶۲

۲.۳ ارتباط بین دو کلاس $\mathcal{A}_C(R)$ و $\mathcal{B}_C(R)$ ۶۵

۴ کلاس Cـ تصویری‌ها و Cـ تزریقی‌ها ۷۱

۱.۴ کلاس Cـ تصویری‌ها و Cـ تزریقی‌ها ۷۱

۲.۴ بُعد Cـ تصویری و بُعد Cـ تزریقی مدول‌ها ۷۸

۳.۴ کاربرد کلاس‌های Cـ تصویری و Cـ تزریقی ۸۴

۴.۴ رابطه بین کوهمولوژی نسبی و کوهمولوژی مطلق ۹۰

واژه نامه ۹۸

مراجع ۱۰۳

پیش‌گفتار

مدول نیمه‌دوگان در سال ۱۹۷۳ توسط فاکسبی [۱] در مرجع [۱۳]، در سال ۱۹۸۴ توسط گُلُد [۲] در مرجع [۱۴] و در سال ۱۹۷۴ توسط وسکانسیلوس [۳] در مرجع [۲۱] به طور مستقل معرفی شد و توسط افرادی از جمله واگستاف [۴]، وایت [۵]، رایتن [۶] و کریستینسن [۷] مورد مطالعه قرار گرفت.جالب است بدانیم مدول نیمه‌دوگان چگونه مطرح شده و چرا مطالعهٔ چنین مدولی در جبر همولوژیک مورد توجه واقع شده است. در زیر به بیان این مطلب می‌پردازیم.

فرض کنید R یک حلقه گرنشتاین باشد. در این صورت تابعگون $\mathrm{Hom}_R(-,R)$ از نظر همولوژیکی خوش رفتاربوده وخواص دوگانی دارد. بطور مثال اگر M یک Rـ مدول کوهن- مکالی ماکسیمال باشد، آنگاه Rـ مدول $\mathrm{Hom}_R(M,R)$ نیز کوهن- مکالی ماکسیمال بوده و $M \cong M^{**}$ که در آن $(-)^* = \mathrm{Hom}_R(-,R)$. برای اثبات می‌توان به گزاره ۳.۳ در فصل ۳ از مرجع [۵] مراجعه کرد.

حال فرض کنید حلقه R گرنشتاین نباشد. اینک این سؤال مطرح می‌شود که تابعگون فوق در چه صورتی از نظر همولوژیکی خوش رفتار می‌باشد. گروتندیک [۸] Rـ مدول D را دوگان نامید هرگاه در شرایط زیر

[۱] Foxby

[۲] Golod

[۳] Vasconcelos

[۴] Wagstaff

[۵] White

[۶] Reiten

[۷] Christensen

[۸] Grothendieck

صدق کند:

۱. D یک Rـ مدول با تولید متناهی بوده و تحلیل تصویری از نوع متناهی می‌پذیرد.

۲. $\mathrm{Hom}_R(D, D) \cong R$.

۳. به ازای هر $i \geq ۱$، $\mathrm{Ext}^i_R(D, D) = ۰$.

۴. Rـ مدول D بُعد تزریقی متناهی داشته باشد.

او نشان داد اگر حلقه R دارای Rـ مدول دوگان D باشد، آنگاه $\mathrm{Hom}_R(-, D)$ از نظر همولوژیکی خوش رفتار بوده و رفتاری مشابه رفتار تابعگون $\mathrm{Hom}_R(-, R)$ روی حلقه گرنشتاین را دارد. بطور مثال اگر M یک Rــ مدول کوهن- مکالی ماکسیمال باشد، آنگاه $\mathrm{Hom}_R(M, D)$ یک Rــ مدول کوهن- مکالی ماکسیمال بوده و $M \cong M^{**}$ که در آن $(-)^* = \mathrm{Hom}_R(-, D)$.

خوش رفتاری همولوژیکی تابعگون $\mathrm{Hom}_R(-, D)$ یکی از مزیت‌های مدول دوگان می‌باشد. اما مشکلی که در رابطه با این مدول وجود دارد، موجود نبودن مدول دوگان به ازای هر حلقه دلخواه است. افرادی از جمله شارپ[۹]، فاکسبی و رایتن هر کدام به طور مستقل بیان نمودند که حلقه R دارای مدول دوگان است اگر و تنها اگر حلقه R کوهن- مکالی بوده و تصویر همریخت حلقه‌ای گرنشتاین باشد. موجود نبودن مدول دوگان به ازای هر حلقه، محققان را بر آن داشت که به دنبال جایگزین مناسبی برای مدول دوگان باشند که برای هر حلقه موجود باشد. مشکل اصلی مربوط به متناهی بودن بُعد تزریقی مدول دوگان D می‌باشد، لذا با حذف شرط متناهی بودن بُعد تزریقی مدول دوگان، وجود Rـ مدولی به نام مدول نیمه‌دوگان مطرح می‌شود، که به ازای هر حلقه R، مدول نیمه‌دوگان موجود می‌باشد. در این پایان‌نامه سعی بر این بوده که قضایای موجود در جبر همولوژیک را برای مدول‌های نیمه‌دوگان بیان و اثبات نماییم.

این پایان‌نامه در چهار فصل تنظیم شده است.

فصل اول:

این فصل شامل دو بخش می‌باشد. در بخش اول برخی تعاریف و قضایای مورد نیاز در قسمت‌های بعد را بیان می‌نماییم. در بخش دوم مفاهیم و مطالب مورد نیاز برای بیان مفهوم کوهمولوژی نسبی را ذکر کرده و

[۹] Sharp

کوهمولوژی نسبی را معرفی می‌کنیم.

فصل دوم:

این فصل شامل چهار بخش می‌باشد. در بخش اول مدول نیمه‌دوگان و دوگان را معرفی کرده و برخی از ویژگی‌های این مدول‌ها را بیان می‌نماییم. در بخش دوم Rـ مدول تماماً Cـ بازتابی را معرفی کرده و ارتباط بین مدول نیمه‌دوگان و مدول تماماً Cـ بازتابی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در بخش سوم رفتار مدول نیمه‌دوگان روی حلقه گرنشتاین را مطالعه کرده و ثابت خواهیم کرد روی حلقه گرنشتاین مدول نیمه‌دوگان منحصر به فرد می‌باشد. در بخش چهارم شرط لازم و کافی برای وجود مدول دوگان را بیان و اثبات می‌کنیم.

فصل سوم:

این فصل شامل دو بخش می‌باشد. در بخش اول ویژگی‌های دو کلاس باس و آسلاندر را بیان کرده و نشان می‌دهیم کلاس باس شامل Rـ مدولهای با بُعد تزریقی متناهی و کلاس آسلاندر شامل Rـ مدولهای با بُعد تصویری متناهی است. و در بخش دوم به بررسی ارتباط بین این دو کلاس می‌پردازیم.

فصل چهارم:

این فصل شامل چهار بخش می‌باشد. در بخش اول کلاس Rـ مدول‌های Cـ تصویری و Rـ مدول‌های Cـ تزریقی را معرفی کرده و ویژگی‌های آن را بیان می‌نماییم. در بخش دوم بُعد Cـ تصویری و بُعد Cـ تزریقی را معرفی کرده و مطالب مربوط به آن را ذکر می‌کنیم و در بخش سوم برخی از کاربردهای بُعد Cـ تصویری و Cـتزریقی مدول‌ها را بیان می‌نماییم. و در بخش آخر به بررسی رابطهٔ بین کوهمولوژی نسبی (نسبت به کلاس Cـ تصویری‌ها و Cـ تزریقی‌ها) و کوهمولوژی مطلق می‌پردازیم.

فصل ۱

این فصل شامل دو بخش می‌باشد. در بخش اول برخی تعاریف و قضایای مورد نیاز در قسمت‌های بعد را بیان می‌نماییم. در بخش دوم مفاهیم و مطالب مورد نیاز برای بیان مفهوم کوهمولوژی نسبی را ذکر کرده و کوهمولوژی نسبی را معرفی می‌نماییم.

۱.۱ مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۱ یک رسته خانواده‌ای است مانند $\mathcal{C}$، متشکل از:

(i). یک کلاس از اشیاء که معمولاً آن‌ها را با $A, B, C, \cdots$ نمایش می‌دهیم.

(ii). به هر جفت از اشیاء در $\mathcal{C}$، مجموعه‌ای متناظرمی‌شود که با $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ نشان می‌دهیم. اعضای این مجموعه را ریخت‌هایی از A به B می‌نامیم و با نماد $f : A \longrightarrow B$ نمایش می‌دهیم. این مجموعه‌ها باید دارای این خاصیت باشند که برای هر چهار شی A, B, C و D که $(A,B) \neq (C,D)$،

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \cap \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D) = \varnothing$$

(iii). به‌ازای هر سه شی A, B و C از $\mathcal{C}$، قانون ترکیب

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C)$$

با ضابطه $(g,f) \mapsto gf$، موجود باشد به گونه‌ای که شرایط زیر برقرار باشند:

۱. شرکت پذیری: اگر $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$، $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C)$ و $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D)$، آن‌گاه $h(gf) = (hg)f$.

۲. همانی: به‌ازای هر شی A از $\mathcal{C}$ ریختی مانند $1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,A)$ موجود باشد به طوری که به‌ازای هر $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ و $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,A)$ داشته باشیم $f1_A = f$ و $1_A g = g$.

تعریف ۲.۱ رسته $\mathcal{C}$ را جمعی گوییم هرگاه:

۱. به ازای هر دو شی A و B متعلق به رسته $\mathcal{C}$، مجموعه $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ یک گروه آبلی (جمعی) باشد.

۲. به ازای اشیاء A، B، C و D و ریخت‌های مناسب بین آن‌ها، خاصیت توزیع‌پذیری برقرار باشد. یعنی در دیاگرام زیر

$$A \xrightarrow{h} B \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} C \xrightarrow{k} D$$

داشته باشیم:

$$(f+g)h = fh + gh \qquad , \qquad k(f+g) = kf + kg$$

۳. رسته $\mathcal{C}$ دارای شی صفر باشد.

۴. رسته $\mathcal{C}$ نسبت به حاصلجمع مستقیم و حاصلضرب مستقیم دو شی بسته باشد. یعنی به ازای هر دو شی متعلق به رسته $\mathcal{C}$ مانند A و B، $A \prod B$ و $A \coprod B$ نیز متعلق به اشیاء رسته $\mathcal{C}$ باشند.

مثال ۱.۱ به ازای هر حلقه جابجایی و یکدار R، رسته Rـ مدول‌ها و رسته گروه‌های آبلی، رسته‌هایی جمعی هستند. رسته گروه‌ها، یک رسته جمعی نیست.

تعریف ۳.۱ به ریخت $f: C \longrightarrow D$ از رسته $\mathcal{C}$، تک‌ریختی (یا تکین) گوییم، هرگاه به ازای هر شی B و ریخت‌های $g, h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C)$، از $fg = fh$ نتیجه شود $g = h$.

به ریخت $f : C \longrightarrow D$، بروریختی (یا برویی) گوییم، هرگاه به ازای هر شی E و ریخت‌های $k, t \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D, E)$، از $kf = tf$ نتیجه شود $k = t$.

مثال ۲.۱ براحتی می‌توان دید یک ریخت در رسته مجموعه‌ها تک‌ریختی (بروریختی) است اگر و تنها اگر یک به یک (پوشا) باشد.

تعریف ۴.۱ در رسته جمعی $\mathcal{C}$، هسته و هم‌هسته‌ی ریخت $f : B \longrightarrow C$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

هسته $f : B \longrightarrow C$، ریختی مانند $i : A \longrightarrow B$ است که $fi = 0$ و اگر $j : A' \longrightarrow B$ ریخت دیگری باشد به طوری که $fj = 0$، آن‌گاه ریخت یکتای $\rho : A' \longrightarrow A$ موجود باشد به قسمی که $j = i\rho$.

هم‌هسته ریخت $f : B \longrightarrow C$، ریختی مانند $\pi : C \longrightarrow D$ است به قسمی که $\pi f = 0$ و اگر $\gamma : C \longrightarrow D'$ ریخت دیگری باشد که $\gamma f = 0$ آن‌گاه ریخت منحصر به فرد $\gamma' : D \longrightarrow D'$ موجود باشد به قسمی که $\gamma = \gamma'\pi$.

مثال ۳.۱ در رسته مجموعه‌ها و رسته Rـ مدول‌ها، نگاشت شمول $\mathrm{Ker}f \longrightarrow A$، هسته ریخت $f : A \longrightarrow B$ می‌باشد. همچنین نگاشت پوشای $B \longrightarrow \mathrm{Coker}f$، هم‌هسته ریخت $f : A \longrightarrow B$ است.

تعریف ۵.۱ رسته جمعی $\mathcal{C}$ را آبلی گوییم هرگاه:

۱. هر ریخت در $\mathcal{C}$ دارای هسته وهم‌هسته باشد.

۲. به ازای هر دو شی دلخواه A و B متعلق به رسته $\mathcal{C}$ و هر ریخت $f : A \longrightarrow B$،

$$\begin{tikzcd} Kerf \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[r, "\pi"] & Cokerf \\ & Cokeri \arrow[r, "\bar{f}", "\cong"'] & Ker\pi \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

ریخت القائی $\bar{f}$ در دیاگرام فوق، یک‌ریختی باشد.

مثال ۴.۱ به ازای هر حلقه جابجایی و یکدارR، رسته Rـ مدول‌ها یک رسته آبلی است. رسته گروه‌های آبلی مثالی دیگر از رسته‌های آبلی می‌باشد. رسته گروه‌ها، یک رسته آبلی نیست، زیرا جمعی نیست.

اکنون مثالی از رسته‌ای ارائه می‌نماییم که جمعی بوده ولی آبلی نیست.

مثال ۵.۱ رسته Rـ مدول‌های تصویری که آن را با نماد $\mathcal{P}(R)$ نمایش می‌دهیم، رسته‌ای جمعی بوده اما چون بین Rـ مدول‌های تصویری همریختی وجود دارد که هم‌هسته‌ی آن متعلق به رسته $\mathcal{P}(R)$ نمی‌باشد، لذا رسته‌ی Rـ مدول‌های تصویری آبلی نیست.

درسرتاسراین پایان‌نامه R را حلقه‌ای جابجایی و یکدار در نظر می‌گیریم. رسته Rـ مدول‌ها را با نماد $\mathcal{E}(R)$ نمایش می‌دهیم همچنین رسته‌ی Rـ مدول‌های با تولید متناهی را با نماد $\mathcal{E}^{fg}(R)$ و رسته گروه‌های آبلی را با نماد Ab نمایش می دهیم.

تعریف ۶.۱ دنباله‌ای از اشیاء و ریخت‌های واقع در یک رسته آبلی مانند،

$$(X_\bullet, d_\bullet) : \cdots \longrightarrow X_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots$$

را همبافت گوییم هرگاه به ازای هر عدد صحیح n داشته باشیم $d_n \circ d_{n+1} = 0$. همبافت $X_\bullet$ را دقیق گوییم هرگاه به ازای هر $n \in \mathbb{Z}$ داشته باشیم $\mathrm{Ker} d_n = \mathrm{Im} d_{n+1}$.

تعریف ۷.۱ همبافت $X_\bullet$ را کراندار گوییم هرگاه به ازای $|n| \gg 0$ داشته باشیم $X_n = 0$.

تعریف ۸.۱ همبافت $X_\bullet$ را از نوع متناهی گوییم هرگاه به ازای هر i، X_i با تولید متناهی باشد.

تعریف ۹.۱ فرض می‌کنیم A، B و C هر کدام Rــ مدول‌هایی دلخواه باشند. در این صورت اگر همبافت

$$\circ \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow \circ$$

دقیق باشد، آن را دنباله‌ی دقیق کوتاه می‌گوییم.

دنباله‌ی دقیق کوتاه

$$\circ \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow \circ$$

را شکافنده گوییم، هر گاه نگاشت $\psi' : C \longrightarrow B$ موجود باشد به طوری که $\psi\psi' = ۱_C$.

تعریف ۱۰.۱ نگاشت $\mathrm{T} : \mathcal{E}(R) \longrightarrow \mathcal{A}b$ را یک تابعگون همورد (پادورد) گوییم هرگاه:

(i). به ازای هر شی A در $\mathcal{E}(R)$، $\mathrm{T}A$ یک شی در $\mathcal{A}b$ باشد.

(ii). اگر $f : A \to B$ یک هم‌ریختی در $\mathcal{E}(R)$ باشد، آن گاه $\mathrm{T}f : \mathrm{T}A \to \mathrm{T}B$ $(\mathrm{T}f : \mathrm{T}B \to \mathrm{T}A)$ یک ریخت در $\mathcal{A}b$ می‌باشد، به گونه‌ای که:

۱. اگر $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ هم‌ریختی‌هایی در $\mathcal{E}(R)$ باشند، آن گاه $\mathrm{T}(gf) = \mathrm{T}g\mathrm{T}f$ $(\mathrm{T}(gf) = \mathrm{T}f\mathrm{T}g)$.

۲. برای هر شی A در $\mathcal{E}(R)$ داشته باشیم: $\mathrm{T}(۱_A) = ۱_{\mathrm{T}A}$.

تعریف ۱۱.۱ تابعگون همورد $\mathrm{T}: \mathcal{E}(R) \longrightarrow Ab$ را دقیق چپ می‌نامیم هرگاه به ازای هر دنباله دقیق کوتاه از Rـ مدول‌ها و Rـ هم‌ریختی‌ها مانند $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} K \longrightarrow 0$ ، دنباله‌ی زیر دقیق باشد.

$$0 \longrightarrow T(M) \xrightarrow{T(\varphi)} T(N) \xrightarrow{T(\psi)} T(K)$$

همچنین تابعگون همورد T را دقیق راست گوییم، هرگاه به ازای هر دنباله‌ی دقیق کوتاه مانند بالا، دنباله‌ی

$$T(M) \xrightarrow{T(\varphi)} T(N) \xrightarrow{T(\psi)} T(K) \longrightarrow 0$$

دقیق باشد. تابعگون T دقیق نامیده می‌شود هرگاه هم دقیق چپ و هم دقیق راست باشد. تعاریف بالا به طور مشابه برای تابعگون پادورد هم تعریف می‌شود.

مثال ٦.۱ فرض می‌کنیم A و B متعلق به رسته Rـ مدول‌ها باشند. آن گاه:

- تابعگون $\mathrm{Hom}_R(A,-): \mathcal{E}(R) \longrightarrow Ab$، همورد و دقیق چپ می‌باشد.
- تابعگون $\mathrm{Hom}_R(-,B): \mathcal{E}(R) \longrightarrow Ab$، پادورد و دقیق چپ می‌باشد.
- تابعگون $- \otimes_R B: \mathcal{E}(R) \longrightarrow Ab$، همورد و دقیق راست است.
- تابعگون $A \otimes_R -: \mathcal{E}(R) \longrightarrow Ab$، همورد و دقیق راست است.

تعریف ۱۲.۱ فرض می‌کنیم $(X_\bullet, d_\bullet)$ و $(X'_\bullet, d'_\bullet)$ دو هم‌بافت باشند. منظور از نگاشت $f: (X_\bullet, d_\bullet) \longrightarrow (X'_\bullet, d'_\bullet)$ دنباله‌ای از ریخت‌ها به صورت $f_n: X_n \longrightarrow X'_n$ می‌باشد، هرگاه به ازای هر عدد صحیح n داشته باشیم $f_n \circ d_{n+1} = d'_{n+1} \circ f_{n+1}$. به عبارت دیگر نمودار زیر جابجا شود:

$$\begin{tikzcd}
(X_\bullet, d_\bullet): \cdots \arrow[r] & X_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] \arrow[dr, phantom, "\curvearrowright"] & X_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] \arrow[dr, phantom, "\curvearrowright"] & X_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
(X'_\bullet, d'_\bullet): \cdots \arrow[r] & X'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & X'_n \arrow[r, "d'_n"'] & X'_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

در این صورت نگاشت f را یک نگاشت زنجیری گوییم.

تعریف ۱۳.۱ دو نگاشت زنجیری $f,g : X_\bullet \longrightarrow X'_\bullet$ را هموتوپ گوییم و به صورت $f \simeq g$ نمایش می‌دهیم، هرگاه به ازای هر عدد صحیح مانند n، ریخت $s_n : X_n \longrightarrow X'_{n+1}$ موجود باشد به گونه‌ای که:

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad : f_n - g_n = d'_{n+1}\, s_n + s_{n-1}\, d_n.$$

تعریف ۱۴.۱ فرض می‌کنیم $(X_\bullet, d_\bullet)$ یک همبافت باشد. به ازای هر عدد صحیح مانند n، nـ اُمین **گروه همولوژی** همبافت $X_\bullet$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{H}_n(X_\bullet) = \mathrm{Ker} d_n / \mathrm{Im} d_{n+1}$$

بعلاوه فرض کنیم $f : X_\bullet \longrightarrow X'_\bullet$ یک نگاشت زنجیری بین همبافت‌ها باشد. در این صورت به ازای هر $n \in \mathbb{Z}$، f نگاشتی بین گروه‌های همولوژی به صورت

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_n(f) : \mathrm{H}_n(X_\bullet) &\longrightarrow \mathrm{H}_n(X'_\bullet) \\ z_n + \mathrm{Im} d_{n+1}(X_\bullet) &\longmapsto f_n(z_n) + \mathrm{Im} d'_{n+1}(X'_\bullet) \end{aligned}$$

القا می‌کند. براحتی دیده می‌شود که این نگاشت یک همریختی خوش‌تعریف بین گروه‌های همولوژی است. $\mathrm{H}_n(f)$ را نگاشت القائی بوسیله f نامیده و معمولاً آن را با f_* نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۵.۱ نگاشت زنجیری $f : X_\bullet \longrightarrow X'_\bullet$، راشبه **یک‌ریختی** گوییم، اگر به ازای هر عدد صحیح n، $\mathrm{H}_n(f) : \mathrm{H}_n(X_\bullet) \longrightarrow \mathrm{H}_n(X'_\bullet)$، یک‌ریختی باشد.

تذکر ۷.۱ فرض می‌کنیم دو نگاشت زنجیری g و f هموتوپ باشند، آن گاه به ازای هر n داریم:

$$\mathrm{H}_n(f) = \mathrm{H}_n(g)$$

اثبات. به قضیه ۱۴ فصل ٦ از مرجع [۱۹] مراجعه کنید. □

تعریف ١٦.١ Rـ مدول P تصویری نامیده می‌شود هرگاه تابعگون

$$\mathrm{Hom}_R(P, -) : \mathcal{E}(R) \longrightarrow \mathcal{A}b$$

دقیق باشد.

Rـ مدول E تزریقی نامیده می‌شود هرگاه تابعگون

$$\mathrm{Hom}_R(-, E) : \mathcal{E}(R) \longrightarrow \mathcal{A}b$$

دقیق باشد. همچنین Rـ مدول F یکدست نامیده می‌شود هرگاه تابعگون

$$F \otimes_R - : \mathcal{E}(R) \longrightarrow \mathcal{A}b$$

دقیق باشد.

تعریف ۱۷.۱ فرض می‌کنیم M مدولی ناصفر روی حلقه‌ی R باشد. یک تحلیل تصویری برای M، دنباله‌ای دقیق به‌صورت

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$