به نام خداوند بخشنده و مهربان

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(پلی‌تکنیک تهران)

دانشکده ریاضی و علوم‌کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (جبر)

موضوع:

خواص جبری ماتریس‌های وابسته به ساختارهای ترکیبیاتی

تهیه‌کننده:

مریم میرزاخواه

استاد راهنما:

دکتر داریوش کیانی

استاد مشاور:

دکتر فرهاد رحمتی

تابستان ۱۳۸۷

چکیده

منظور از n وجهی‌های تعمیم‌یافته از مرتبه (s,t)، نوع خاصی از فضاهای جزئاً خطی است که هر خط آنها شامل $s+1$ نقطه و هر نقطه بر روی $t+1$ خط قرار دارد. همچنین قطر گراف وقوع آنها برابر n است و هر دو راس گراف وقوع آنها مانند γ و δ که $d(\gamma,\delta)=i$ و $i<n$، در شرط $c_i(\gamma,\delta)=1$ صدق می‌نمایند. در این پایان‌نامه به بررسی برخی از خواص این دسته از طرح‌های بلوکی و ارتباط آنها با گراف‌های فاصله منظم می‌پردازیم. سپس شرط‌های لازم و کافی برای آنکه عدد رنگی گراف هم‌خطی آنها برابر سه یا چهار باشد را بیان می‌کنیم.

کمیت انرژی گراف بصورت مجموع قدرمطلق مقادیر ویژه آن تعریف می‌گردد. بررسی ارتباط انرژی یک گراف و زیرگراف‌های آن با استفاده از نامساوی‌های مقادیر منفرد، از جمله مسائلی است که بدان پرداخته می‌شود. سپس انرژی وقوع یک گراف تعریف می‌گردد و اثبات می‌شود انرژی وقوع یک گراف دو برابر انرژی گرافی دو بخشی است که از آن حاصل می‌گردد. در ادامه کران‌های بالا و پایین مشابه انرژی گراف، برای انرژی وقوع نیز بدست می‌آید. همچنین اثبات می‌گردد انرژی وقوع یک گراف، بطور اکید از انرژی وقوع هر زیرگراف سره آن بیشتر است.

کلمات کلیدی: گراف فاصله منظم، فضاهای جزئاً خطی، چندضلعی‌های تعمیم یافته، انرژی گراف، انرژی وقوع گراف.

فهرست مندرجات

پیش‌گفتار

انرژی یک گراف بعنوان مجموع قدر مطلق مقادیر ویژه آن، برای اولین بار توسط Gutman در [۱۳] معرفی شد. این کمیت، یکی از شاخه‌های نظریه جبری گراف است که با علم شیمی ارتباطی تنگاتنگ دارد. قضیه معروف Hückel (HMO، رجوع شود به [٦، ۲۵]) در مورد اوربیتال مولکول‌های هیدروکربن مزدوج اشباع نشده، این ارتباط را بیان می‌نماید. به هر مولکول هیدروکربن یک گراف متناظر می‌کنند، بطوریکه راس‌های آن را اتم‌های کربن مولکول تشکیل می‌دهند. دو راس این گراف مجاورند اگر و تنها اگر اتم‌های کربن متناظر آن دو با یکدیگر پیوند داشته باشند. قضیه Hückel اثبات می‌کند انرژی π–الکترون نهایی یک مولکول هیدروکربن مزدوج اشباع نشده برابر با انرژی گراف متناظر با آن می‌باشد. همچنین گرمای تشکیل یک هیدروکربن با انرژی π– الکترون آن ارتباط دارد. از این جهت بدست آوردن کران بالا یا پایین بهینه برای انرژی گراف از اهمیت بالایی برخوردار است. بررسی تغییرات انرژی یک گراف وقتی راس یا یالی از آن حذف می‌گردد، از مسائل دیگر انرژی گراف می‌باشد. چنانچه در فصل سوم مشاهده می‌شود، وقتی راسی از یک گراف حذف شود، انرژی آن کاهش می‌یابد. ولی مثال‌هایی موجودند که بیان می‌کند با حذف یک یال ممکن است انرژی گراف حاصل کاهش یا افزایش یابد و یا بدون تغییر باقی بماند. بدست آوردن شروط لازم و کافی برای اینکه حذف یک یال تحت چه شرایطی انرژی گراف حاصل را کاهش یا افزایش می‌دهد، از مهمترین مسائلی است که امروزه بدان پرداخته می‌شود. بطوریکه در کارگاه [۱]، این مساله یکی از مهمترین سئوالاتی بوده است که در بخش

انرژی گراف مطرح گردیده است. در [۹] به برخی از سئوالات مطرح این کارگاه، پاسخ داده شده است. نویسندگان این مقاله با استفاده از نامساوی‌های مقادیر منفرد و با دیدگاه کمی متفاوت با سایر مقالات در این شاخه، به اثبات قضیه‌ها پرداخته‌اند. در این دیدگاه برگرفته از [۲۲]، انرژی گراف بعنوان مجموع مقادیر منفرد ماتریس مجاورت تعریف می‌گردد. Nikiforov در [۲۲] کمیت انرژی را برای ماتریس‌های دلخواه با توجه به تعریف اخیر گسترش می‌دهد. در ادامه با استفاده از تعریف جدید Nikiforov، انرژی وقوع گراف را بعنوان انرژی ماتریس وقوع آن تعریف می‌کنیم. سپس رابطه‌ای بین انرژی وقوع یک گراف و انرژی گراف دوبخشی‌ای که با افزودن یک راس به هر یال گراف اولیه حاصل می‌شود، بدست می‌آید. در ادامه برخی از کران‌های بالا و پایین انرژی گراف برای انرژی وقوع اثبات می‌کنیم. در نهایت ارتباط انرژی وقوع یک گراف و زیرگراف‌های دلخواه آن بطور کامل بدست می‌آید که شاید از محاسن انرژی وقوع به حساب آید. یافته‌های اخیر ما در مورد انرژی وقوع گراف بعنوان مقاله‌ای آماده و ارسال گردیده است [۲۰].

دسته‌بندی فصل‌های این پایان‌نامه به اینگونه است که در فصل اول، تعریف‌ها و قضیه‌های مقدماتی نظریه گراف، جبرخطی و نظریه جبری گراف بیان گردیده است. پیکره اصلی پایان‌نامه از فصل دوم آغاز می‌گردد. مرجع اصلی در نگارش این فصل، [۲] می‌باشد. در ابتدای این فصل ارتباط مقادیر ویژه یک گراف و عدد رنگی آن مورد بررسی قرار می‌گیرد و به بررسی گراف‌های منظم با عدد رنگی ۳ می‌انجامد. در ادامه این فصل به بررسی چندضلعی‌های تعمیم یافته پرداخته می‌شود. چندضلعی‌های تعمیم یافته از مرتبه (s,t) با دو رویکرد تعریف می‌گردند. در رویکرد اول $n-$ضلعی‌های تعمیم یافته با n زوج، بعنوان یک گراف فاصله منظم با پارامترهایی که توسط s و t بیان می‌شود و در دیگری $n-$ضلعی‌های تعمیم یافته بعنوان یک فضای جزئاً خطی با خواص ویژه مشخص می‌گردند. از جمله قضیه‌های مهم مربوط به چندضلعی‌های تعمیم یافته، قضیه Fiet-Higman می‌باشد که برخلاف ظاهر تعریف چندضلعی‌های تعمیم یافته، متناهی بودن آنها را بیان می‌کند. بررسی گراف‌های با عدد رنگی ۳، به مشخص کردن

چندضلعی‌های تعمیم یافته‌ای که عدد رنگی گراف راسی آنها ۳ است، می‌انجامد. در ادامه بعنوان تعمیمی از این مساله، چندضلعی‌های تعمیم یافته‌ای که گراف راسی آن دارای عدد رنگی ۴ می‌باشد را مشخص می‌کنیم. در فصل سوم نیز ابتدا به بررسی خواص مقدماتی کمیت انرژی می‌پردازیم. سپس ارتباط انرژی یک گراف و زیرگراف‌های دلخواه آن را مطالعه می‌کنیم. مرجع‌های اصلی در نگارش این فصل [۸، ۹] بوده‌اند. در انتها به بررسی انرژی وقوع یک گراف می‌پردازیم.

در پایان شایان ذکر است، قضیه‌هایی که با علامت * مشخص شده‌اند، نتایج جدیدی هستند که در این پایان‌نامه اثبات شده‌اند.

مریم میرزاخواه

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

مهر ۱۳۸۷

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل تعریف‌ها و قضیه‌هایی که در فصل‌های مختلف پایان‌نامه بکار رفته‌اند را به اختصار بیان می‌کنیم. در ابتدا مقدمات مربوط به نظریه گراف و سپس تعریف‌ها و قضیه‌های مورد نیاز جبرخطی و نظریه جبری گراف مطرح می‌گردد. لازم به ذکر است که قضیه‌ها بدون اثبات آورده شده‌اند، در مقابل هر قضیه مرجعی معرفی شده که خواننده در صورت نیاز می‌تواند با مراجعه به آن اثبات قضیه را مشاهده نماید. تعریف‌های مربوط به نظریه گراف از مرجع‌های [۴]، [۳] و [۲۶] و همچنین تعریف‌ها و قضیه‌های مربوط به جبرخطی و نظریه جبری گراف از مرجع‌های [۷] و [۱۸] برداشت شده است.

۱.۱ تعریف‌ها و قضایا

در تمامی فصل‌های این پایان‌نامه G، گرافی ساده[۱]، بدون جهت[۲]، متناهی[۳]، دارای n راس (از اندازه n) و m یال است. مجموعه راس‌های G را با $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ و مجموعه یال‌های آن را با $E(G) = \{e_1, \ldots, e_m\}$ نمایش می‌دهیم. دو راس v_i و v_j را مجاور[۴] نامند، هرگاه یال e در $E(G)$ موجود باشد بطوریکه v_i و v_j، راس‌های انتهایی e باشند. همچنین دو یال e_i و e_j را مجاور نامند هرگاه دارای

۱ Simple
۲ Undirected
۳ Finite
۴ Adjacent

راس انتهایی مشترک باشند.

◄ **تعریف (۱—۱).** ماتریس مجاورت[۵] گراف G را با $A(G)$ نمایش می‌دهیم. $A(G) = (a_{ij})$ ماتریسی از مرتبه n است و بطوریکه سطرها و ستون‌های آن با راس‌های گراف G برچسب‌گذاری شده‌اند و درایه‌های آن بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$a_{ij} = \begin{cases} ۱ & \text{هرگاه بین راس } v_i \text{ و } v_j \text{ یالی موجود باشد.} \\ ۰ & \text{در غیراینصورت} \end{cases}$$

◄ **تعریف (۱—۲).** ماتریس وقوع[۶] گراف G را با $I(G)$ نمایش می‌دهیم. $I(G) = (x_{ij})$ ماتریسی $n \times m$ است، بطوریکه سطرها و ستون‌های آن به ترتیب با راس‌ها و یال‌های گراف G برچسب‌گذاری شده‌اند و درایه‌های آن بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$x_{ij} = \begin{cases} ۱ & \text{هرگاه راس } v_i \text{ بر روی یال } e_j \text{ قرار داشته باشد.} \\ ۰ & \text{در غیراینصورت} \end{cases}$$

◄ **تعریف (۱—۳).** گراف H را زیرگرافی از گراف G نامند هرگاه $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$.

به برخی از زیرگراف‌های هر گراف، اسامی خاص نسبت می‌دهند که در ادامه برخی از آنها را مرور می‌کنیم. فرض کنید S زیر مجموعه‌ای ناتهی از $V(G)$ باشد، زیرگراف القایی راسی توسط S را بزرگترین زیرگراف G با مجموعه راس‌های S می‌نامند. همچنین فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی از یال‌های گراف G باشد، زیرگراف القایی یالی توسط X کوچکترین زیرگراف G با مجموعه یال‌های X است. اغلب زیرگراف القایی راسی را به اختصار زیرگراف القایی می‌نامیم. زیر گراف H از گراف G یک زیرگراف فراگیر[۷] G نامیده می‌شود هرگاه $V(H) = V(G)$. برای $E \subseteq E(G)$، زیرگراف فراگیر از گراف G

[۵] Adjacency Matrix
[۶] Incidence Matrix
[۷] Spanning subgraph

با مجموعه یال‌های $E(G) \setminus E$ را با نماد $G \setminus E$ نمایش می‌دهیم. همچنین اگر H زیرگرافی دلخواه از گراف G باشد، زیر گراف القایی یالی گراف G با مجموعه یال‌های $E(G) \setminus E(H)$ را بانماد $G \setminus H$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید G و H دو گراف با مجموعه راس‌های مجزا باشند، $G \bigoplus H$ گرافی است با مجموعه راس‌های $V(G) \cup V(H)$ و مجموعه یال‌های $E(G) \cup E(H)$.

◄ تعریف **(۱—۴).** برای هر دو راس $v, u \in V(G)$، طول کوتاهترین مسیر بین u و v را فاصله[۸] u و v می‌نامند و با $d(u,v)$ نمایش می‌دهیم. بزرگترین فاصله بین راس‌های گراف G را قطر[۹] گراف G می‌نامند و با $diam(G)$ نمایش می‌دهیم. اگر هر دو راس گراف G توسط مسیری به یکدیگر متصل باشند، G را گرافی همبند[۱۰] و در غیر اینصورت ناهمبند[۱۱] می‌نامند. همچنین هر زیرگراف همبند ماکسیمال در گراف G را یک مولفه همبندی[۱۲] G می‌نامند.

◄ نمادگذاری **(۱—۵).** یک مسیر، دور و گراف ستاره از مرتبه n را با نمادهای P_n، C_n و S_n نمایش می‌دهیم.

◄ تعریف **(۱—۶).** فرض کنید G گرافی دلخواه باشد، مجموعه $S \subseteq V(G)$ را یک خوشه[۱۳] نامند، هرگاه هر دو راس S توسط یالی به یکدیگر متصل باشند. اندازه بزرگترین خوشه یک گراف را عدد خوشه‌ای[۱۴] آن می‌نامند.

◄ تعریف **(۱—۷).** همچنین مجموعه $C \subseteq V(G)$ را یک مجموعه مستقل[15] نامند، هرگاه هیچ دو راسی از آن به یکدیگر متصل نباشد. اندازه بزرگترین مجموعه مستقل گراف G را با $\alpha(G)$ نمایش

۸ Distance
۹ Diameter
۱۰ Connected
۱۱ Disconnected
۱۲ Component
۱۳ Clique
۱۴ Clique Number
۱۵ Independent Set ,Coclique

می‌دهیم و آن را عدد استقلال [16] گراف G می‌نامند.

◄ **تعریف (۱—۸).** به زیر مجموعه‌ای از یال‌های گراف که با حذف آنها گراف ناهمبند شود، یک برش گفته می‌شود. همچنین اگر با حذف یالی مانند $e \in E(G)$، گراف G ناهمبند شود، یال e پل نامیده می‌شود.

◄ **تعریف (۱—۹).** رنگ‌آمیزی راسی گراف G را رنگ آمیزی سره[17] نامند، هرگاه هیچ دو راس مجاور در گراف G همرنگ نباشند، چنین رنگ‌آمیزی‌ای مجموعه $V(G)$ را به مجموعه‌های مستقل افراز می‌نماید. هر یک از این مجموعه‌های مستقل ایجاد شده را یک کلاس رنگی می‌نامند. کمترین تعداد کلاس‌های رنگی در میان رنگ‌آمیزی‌های سره گراف G که را عدد رنگی [18] گراف G می‌نامند و آن را با $\chi(G)$ نمایش می‌دهیم.

◄ **تعریف (۱—۱۰).** رنگ‌آمیزی یالی گراف G را رنگ آمیزی سره یالی [19] نامند، هرگاه هیچ دو یال مجاور همرنگ نباشند. کمترین تعداد رنگ در میان تمامی رنگ‌آمیزی‌های سره یالی، را عدد رنگی یالی گراف می‌نامند و آن را با نماد $\chi_l(G)$ نمایش می‌دهیم.

◄ **قضیه (۱—۱۱).** [۳، ص.۹۳] فرض کنید G گرافی دو بخشی و ناتهی باشد، در اینصورت $\chi_l(G) = \Delta(G)$.

◄ **تعریف (۱—۱۲).** فرض کنید G گرافی دلخواه باشد. گراف یالی [20] مربوط به گراف G، گرافی است که راس‌های آن یال‌های G می‌باشد و دو یال هم متصلند اگر و تنها اگر در راسی مشترک باشند و آن را با نماد $L(G)$ نمایش می‌دهیم. بوضوح اگر G همبند باشد، $L(G)$ نیز همبند می‌باشد. همچنین اگر

[16] Independence Number
[17] Proper Coloring
[18] Choromatic Number
[19] Proper Edge Coloring
[20] Line Graph

گراف G گرافی k–منظم باشد، $L(G)$ گرافی $(2k-2)$–منظم می‌باشد.

◄ **تعریف (۱—۱۳).** گراف G را گرافی l–بخشی[۲۱] نامند هرگاه بتوان راس‌های گراف را به l مجموعه مستقل افراز نمود. هرگاه هر راس از گراف G با تمام راس‌های دیگر به جز راس‌های بخش خود مجاور باشد، گوییم گراف G l–بخشی کامل است. به ازای هر l، گراف l–بخشی کامل را با نماد $K_{n_1,\ldots,n_l}$ نمایش می‌دهیم بطوریکه به ازای هر i، n_i معرف تعداد اعضای بخش i–ام می‌باشد. عدد رنگی یک گراف l–بخشی حداکثر l است و بالعکس یک گراف با عدد رنگی l یک گراف l–بخشی می‌باشد.

◄ **نمادگذاری (۱—۱۴).** فرض کنید G گرافی دلخواه باشد. به ازای هر راس $v \in V(G)$، مجموعه $\{u \in V(G) | d(v,u) = i\}$ را با نماد $G_i(v)$ نمایش می‌دهیم.

◄ **تعریف (۱—۱۵).** فرض کنید G گرافی همبند با قطر d باشد. G را گراف فاصله‌منظم[۲۲] نامند هرگاه اعداد صحیح و نامنفی c_i و b_i $(i = 0, \ldots, d)$ چنان موجود باشند که به ازای هر دو راس v و u بطوریکه $d(v,u) = i$، داشته‌باشیم

$$c_i = |G_1(v) \cap G_{i-1}(u)| \text{ و } b_i = |G_1(v) \cap G_{i+1}(u)|.$$

دنباله $\{b_0, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$، آرایه فاصله منظمی نامیده می‌شود. البته بوضوح داریم: $b_0 = k$، $b_d = 0$، $c_0 = 0$ و $c_1 = 1$.

◄ **تعریف (۱—۱۶).** G را گراف قویاً منظم[۲۳] با پارامترهای (n, k, λ, μ) نامند هرگاه G گرافی n راسی، k–منظم باشد، بطوریکه هر دو راس مجاور دقیقاً λ همسایه مشترک و هر دو راس غیرمجاور دقیقاً

---
[۲۱] Multi partite
[۲۲] Distance regular
[۲۳] Strongly regular

دارای μ همسایه مشترک باشند.

◄ **قضیه (۱—۱۷).** [۴، ص.۸] فرض کنید G گرافی با قطر دو باشد. در اینصورت G گرافی فاصله منظم است اگر و تنها اگر قویاً منظم با $\mu > 0$ باشد.

برای قضیه فوق، با استفاده از پارامترهای (n, k, λ, μ) می‌توان آرایه فاصله منظمی را بصورت $\{k, k-1-\lambda; 1, \mu\}$ بدست آورد. همچنین اگر $\mu = k$، آنگاه G گراف چند بخشی کامل است و اگر $\mu = 0$، آنگاه G بصورت اجتماعی از گراف‌های کامل هم مرتبه می‌باشد.

فرض کنید A ماتریسی مربعی باشد، ترانهاده مزدوج ماتریس A را با نماد A^* $(A^*_{ij} = \overline{A_{ji}})$ نمایش می‌دهیم. هرگاه $A = A^*$، ماتریس A را خودالحاق[۲۴] می‌نامند. همچنین ماتریس متقارن A را نیمه معین مثبت[۲۵] می‌نامند، هرگاه به ازای هر بردار x، داشته باشیم $x^*Ax \geq 0$ و آن را با نماد $A \geq 0$ نمایش می‌دهیم.

صفرهای چندجمله‌ای $det(A - xI) = 0$ را مقادیر ویژه[۲۶] ماتریس A می‌نامند. تکرر مقدار ویژه λ_i آن با m_i نمایش می‌دهیم. فرض کنید $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ مقادیر ویژه متمایز ماتریس A باشند بطوریکه بصورت غیر صعودی مرتب شده‌اند، دنباله $\lambda_1^{m_1} \ldots \lambda_r^{m_r}$ را طیف[۲۷] ماتریس A نامیده و آن را با $Spec(A)$ نمایش می‌دهیم.

طبق قضایای جبرخطی می‌دانیم هرگاه A ماتریسی خودالحاق باشد، مقادیر ویژه آن حقیقی هستند و همچنین ماتریس یکانی P چنان موجود است که ماتریس P^*AP ماتریسی قطری است.

◄ **تعریف (۱—۱۸).** فرض کنید A و B دو ماتریس مربعی به ترتیب از مرتبه n و m باشند$(m \leq n)$. می‌گوییم مقادیر ویژه ماتریس B مقادیر ویژه ماتریس A را در هم می‌بافند[۲۸] هرگاه به ازای هر i

۲۴ Self Adjoint
۲۵ Positive semi-definite
۲۶ Eigenvalue
۲۷ Spectrum
۲۸ Interlace

$(i = ۱, \ldots, m)$، داشته باشیم $\lambda_i(A) \geq \lambda_i(B) \geq \lambda_{n-m+i}(A)$.

◄ قضیه **(۱—۱۹).** (interlacing)[۱۵، ص.۷] فرض کنید S ماتریسی از مرتبه $n \times m$ و با درایه‌های مختلط باشد بطوریکه $S^*S = I_m$. همچنین A ماتریسی خودالحاق از مرتبه n می‌باشد. قرار می‌دهیم $B = S^*AS$. در اینصورت مقادیر ویژه ماتریس B مقادیر ویژه ماتریس A را در هم می‌بافد.

◄ قضیه **(۱—۲۰).** [۱۵، ص.۸] فرض کنید A ماتریسی خودالحاق باشد و بصورت $A = \begin{bmatrix} A_{۱۱} & A_{۱۲} \\ A^*_{۱۲} & A_{۲۲} \end{bmatrix}$ افراز گردیده است. آنگاه مقادیر ویژه زیر ماتریس $A_{۱۱}$ مقادیر ویژه ماتریس A را در هم می‌بافد.

◄ قضیه **(۱—۲۱).** [۷، ص.۵۱] فرض کنید A و B دو ماتریس متقارن از مرتبه n و با درایه‌های حقیقی باشند و $C = A + B$، در اینصورت

$$\lambda_{i+j+۱}(C) \leq \lambda_{i+۱}(A) + \lambda_{j-۱}(B)$$

$$\lambda_{n-i-j}(C) \geq \lambda_{n-i}(A) + \lambda_{n-j}(B)$$

به ازای هر $۰ \leq i, j \leq n$ و $i + j \leq n - ۱$.

بخصوص به ازای هر i $(i = ۱, \ldots, n)$ داریم:

$$\lambda_i(C) \geq \lambda_i(A) + \lambda_n(B). \qquad (۱)$$

◄ قضیه **(۱—۲۲).** [۱۸، ص.۳۴۲] فرض کنید V فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و T عملگری خطی روی V باشد. در اینصورت عملگر یکانی U و عملگر نامنفی N روی V موجودند بطوریکه $T = UN$ و همچنین عملگر N برای T یکتا می‌باشد.

◄ قضیه **(۱—۲۳).** [۱۶، ص.۵۹۴] فرض کنید A ماتریسی خودالحاق از مرتبه n باشد. همچنین

$u_1, \ldots, u_i$ بردارهای ویژه متعامد یکه مربوط به مقدار ویژه $\lambda_1(A), \ldots, \lambda_i(A)$ به ازای هر i باشد ($i = 0, 1, \ldots, n$). در اینصورت

۱) به ازای هر $x \in < u_1, \ldots, u_i >$، $\lambda_i(A) \leq \frac{x^*Ax}{x^*x}$ بطوریکه ($i, x \neq 0$) و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر x بردار ویژه نظیر مقدار ویژه λ_i در ماتریس A باشد.

۲) به ازای هر $x \in < u_{i+1}, \ldots, u_n >$، $\lambda_{i+1}(A) \geq \frac{x^*Ax}{x^*x}$ بطوریکه ($i \neq n, x \neq 0$) و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر x بردار ویژه نظیر مقدار ویژه λ_{i+1} در ماتریس A باشد.

◄ تعریف **(۱—۲۴).** مقادیر ویژه گراف G را مقادیر ویژه ماتریس مجاورت آن تعریف می‌کنند و آن‌ها را با $\lambda_1(G), ..., \lambda_n(G)$ نمایش می‌دهیم.

◄ تعریف **(۱—۲۵).** گراف folded $n-$cube گرافی است از مرتبه 2^n که راس‌های آن را با دنباله‌های به طول n از صفر و یک تشکیل می‌دهند. دو راس این گراف با یکدیگر مجاورند اگر و تنها اگر دنباله‌های متناظر آنها تنها در یک جایگاه متفاوت باشند یا هیچ دو جایگاه یکسان از آنها مقدار برابری نداشته باشند. اگر $n \geq 3$، این گراف دارای پارامترهای فاصله منظمی ($d = [\frac{n}{2}]$) بصورت $b_i = n - i$ و $c_i = i$ اگر $2i < n$ و برای $n-$های زوج $c_d = n$ است. همچنین مقادیر ویژه آن بصورت $\lambda_i(G) = n - 4i$ با تکرر $m_i = \begin{pmatrix} n \\ 2i \end{pmatrix}$ می‌باشد ($i = 0, \ldots, d$).

◄ قضیه **(۱—۲۶).** [۷، ص.۸۴] اگر G گرافی دلخواه دارای n راس و m یال باشد. در اینصورت $\frac{2m}{n} \leq \lambda_1(G)$ و تساوی رخ می‌دهد اگر و تنها اگر G گرافی منظم باشد.

فرض کنید G و H دو گراف دلخواه به ترتیب دارای n و n' راس و m و m' یال باشند، با استفاده از این دو گراف می‌توان با تعریف عملگرهایی، گراف‌های جدیدی ساخت.

گراف $G + H$ گرافی است با مجموعه راس‌های $V(G) \times V(H)$ است و دو راس (x_i, y_j) و $(x_{i'}, y_{j'})$ به یکدیگر متصلند اگر و تنها اگر $i = i'$ و راس y_j در گراف H به راس $y_{j'}$ متصل باشد یا $j = j'$ و

راس x_i در گراف G به راس $x_{i'}$ متصل باشد. گراف $G+H$ دارای $nm'+n'm$ یال می‌باشد و همچنین ماتریس مجاورت آن به فرم $A(G+H)=A(G)\otimes I_{n'}+I_n\otimes A(H)$ می‌باشد. که در آن $\otimes$ ضرب تانسوری ماتریس‌ها می‌باشد.

گراف $G\times H$ گراف دیگری است با مجموعه راس‌های $V(G)\times V(H)$ است و دو راس (x_i,y_j) و $(x_{i'},y_{j'})$ به یکدیگر متصلند اگر و تنها اگر راس x_i در گراف G به راس $x_{i'}$ و راس y_j در گراف H به راس $y_{j'}$ متصل باشند. گراف $G\times H$ دارای $۲mm'$ یال می‌باشد و همچنین ماتریس مجاورت آن به فرم $A(G\times H)=A(G)\otimes A(H)$ می‌باشد. همچنین مقادیر ویژه گراف‌های $G+H$ و $G\times H$ به ترتیب بصورت $\lambda_i(G)+\lambda_j(H)$ و $\lambda_i(G)\lambda_j(H)$ هستند، بطوریکه $۱\le i\le n$ و $۱\le j\le n'$.

در پایان برخی از گراف‌ها موجودند که توسط مقادیر ویژه‌شان شناخته می‌شوند. گراف‌های دوبخشی از جمله این گراف‌ها هستند.

◄ **گزاره (۱—۲۷).** [۷، ص.۸۷] گراف G دوبخشی است اگر و تنها اگر به ازای هر i، $\lambda_i(G)=-\lambda_{n-i+۱}(G)$ $(i=۱,\ldots,n)$.

فصل ۲

مقادیر ویژه و عدد رنگی

در این بخش با استفاده از مقادیر ویژه و خواص آنها، کران‌هایی برای عدد رنگی گراف بدست می‌آوریم. با توجه به نکاتی که در فصل اول مطرح شد، برای گراف G، $\chi(G) \leq ۲$ اگر و تنها اگر به ازای هر i، $\lambda_i(G) = -\lambda_{n-i+۱}(G)$ $(i = ۱, \ldots, n)$. البته برای عدد رنگی بیش از ۲ لزوماً نمی‌توان از طریق طیف گراف، آن گراف را مشخص نمود. بطور دقیق‌تر گراف‌هایی با طیف یکسان و عدد رنگی متفاوت موجوداند. در ادامه مثالی از این نوع گراف‌ها ارائه می‌شود.

گرافی که توسط d بار استفاده از عملگر $\times$ بر روی گراف کامل از مرتبه q تولید می‌شود را گراف همینگ می‌نامند و آن را با نماد $H(d,q)$ نمایش می‌دهیم. این گراف، گرافی فاصله منظم با قطر d و دارای عدد رنگی و عدد استقلال q می‌باشد. همچنین مکمل این گراف نیز دارای عدد استقلال و عدد رنگی q می‌باشد.

گراف Shrikhande گرافی قویاً منظم با پارامترهای $(۱۶, ۶, ۲, ۲)$ و دارای مقادیر ویژه $۶^{۱}\, ۲^{۶}\, -۲^{۹}$ می‌باشد. Shrikhande در [۲۴] ثابت نمود که گراف‌های قویاً منظم با پارامترهای گراف $H(۲,n)$ برای تمام n ها به جز برای ۴ یکتا می‌باشد. در حالت $n = ۴$ گراف Shrikhande و $H(۲,۴)$ تنها گراف‌های با پارامترهای فوق می‌باشند. این گراف دارای عدد استقلال و عدد رنگی ۴ می‌باشد. همچنین مکمل گراف Shrikhande دارای عدد رنگی ۶ و عدد استقلال ۳ می‌باشد. در نتیجه مکمل گراف Shrikhande و گراف

$H(۲,۴)$ دارای پارامترها قویاً منظمی یکسان و در نتیجه دارای مقادیر ویژه برابر ولی عدد رنگی متفاوت می‌باشند.

در پایان شایان ذکر است که مشخص نمودن اینکه گراف دلخواه G دارای عدد رنگی $\chi \geq ۳$ است یا خیر، یک مساله $NP-$تام می‌باشد (رجوع شود به [۱۱]).

۱.۲ رنگ‌آمیزی هافمن

Hoffman در [۱۷] کران پائینی برای عدد رنگی گراف دلخواه G به شرح زیر بدست آورده است.

◄ قضیه **(۲—۱).** اگر G گرافی با حداقل یک یال باشد، آنگاه

$$\chi(G) \geq ۱ - \frac{\lambda_۱(G)}{\lambda_n(G)}. \tag{۱}$$

اگر در نامساوی ۱ برای گراف G حالت تساوی اتفاق بیفتد، گفته می‌شود G دارای رنگ‌آمیزی هافمن است. برای مثال گراف‌های دوبخشی طبق گزاره ۱—۲۷ دارای رنگ‌آمیزی هافمن می‌باشند. Hoffman همچنین برای گراف‌های $k-$منظم گزاره زیر را اثبات نموده است (به [۴، ص.۱۰] رجوع شود):

◄ گزاره **(۲—۲).** اگر G گرافی $k-$منظم و C مجموعه‌ای مستقل در G باشد، آنگاه:

$$|C| \leq n\frac{-\lambda_n(G)}{k-\lambda_n(G)}. \tag{۲}$$

و اگر تساوی اتفاق بیفتد آنگاه هر راس $v \in V(G)$ که در C نباشد، دقیقاً $-\lambda_n(G)$ همسایه در C دارد.

◄ نکته **(۲—۳).** اگر C بزرگترین کلاس رنگی در رنگ‌آمیزی‌های سره گراف G با $\chi(G)$ رنگ باشد، بوضوح نامساوی $\chi(G)|C| \geq n$ برقرار است. دراینصورت نامساوی ۱، برای گراف‌های منظم از گزاره فوق

نتیجه می‌گردد. بعلاوه شرطی لازم برای حالت تساوی ارائه می‌دهد.

◄ گزاره **(۲—۴).** فرض کنید G گرافی k−منظم با رنگ‌آمیزی هافمن باشد. دراینصورت گزاره‌های زیر برقرار است.

۱) کلاس‌های رنگی G دارای اندازه برابر هستند.

۲) هر راس $v \in V(G)$ دارای $\lambda_n(G)-$ همسایه در هر کلاس رنگی که شامل v نباشد، است.

بعلاوه $m_n \geq \chi(G) - ۱$ و تساوی بیانگر آن است که گراف G تنها یک رنگ‌آمیزی سره با $\chi(G)$ رنگ (با در نظر گرفتن یکریختی) دارد.

برهان . به ازای هر کلاس رنگی C_i، تلفیق نامساوی ۲ و هافمن بودن رنگ‌آمیزی ایجاب می‌کند که $|C_i| \leq \frac{n}{\chi(G)}$. حال با توجه به $\sum_{i=۱}^{\chi(G)} |C_i| = n$ داریم به ازای هر i، $|C_i| = \frac{n}{\chi(G)}$ $(i = ۱, \ldots, \chi(G))$. همچنین نامساوی ۲ برای گراف G در حالت تساوی برقرار است و در اینصورت بنا بر گزاره ۲—۲، قسمت‌های ۱ و ۲ حکم اثبات می‌گردد. در ادامه به ازای هر دو کلاس رنگی دلخواه C_i و C_j از گراف G، اگر درایه‌های بردار $U_{ij} = (u_۱, \ldots, u_n)$ را با راس‌های گراف G اندیس‌گذاری و بصورت

$$u_k = \begin{cases} ۱ & v_k \in C_i \\ -۱ & v_k \in C_j \\ ۰ & \text{در غیراینصورت} \end{cases} \qquad k = ۱, \ldots, n;$$

تعریف گردند، به سادگی می‌توان چک کرد که بردارهای U_{ij}، بردارهای ویژه مربوط به مقدار ویژه $\lambda_n(G)$ می‌باشند. با توجه به تعداد انتخاب‌های کلاس‌های رنگی C_i و C_j، حداقل $\chi(G) - ۱$ بردار ویژه مستقل خطی بدست می آید. حال اگر رنگ‌آمیزی گراف G منحصر به فرد نباشد، یعنی حداقل یک رنگ‌آمیزی غیر یکریخت با رنگ‌آمیزی اولیه موجود است. پس دارای کلاس‌های رنگی غیر یکریخت با رنگ‌آمیزی اولیه می‌باشد. در نتیجه بردارهای ویژه دیگری وجود دارند که بصورت ترکیب خطی بردارهای بدست آمده از رنگ‌آمیزی اولیه نیستند. □