وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه تربیت معلم آذربایجان

دانشکده علوم پایه

پایان نامه مقطع کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی

عنوان :

حل عددی برای دسته خاص از دستگاه معادلات انتگرال – دیفرانسیل ولترای غیرخطی با یک روش ساده با دقت بالا

استاد راهنما :

دکتر علی خانی

استاد مشاور :

دکتر ناصر آقازاده

پژوهشگر :

آیدین استوار

مهر ماه ۱۳۸۹

تبریز– ایران

بسم اللّٰه الرّحمن الرّحيم

تقدیم به

پدر و مادر بزرگوارم

تشکر و قدردانی

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر علی خانی، به خاطر کمک های بی دریغش که به پایان نامه محتوا بخشیدند و با من همچون یک برادر بودند، صمیمانه تشکّر و قدردانی کنم.

از جناب آقای دکتر ناصر آقازاده که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبّل فرمودند، کمال امتنان را دارم.

و در پایان بوسه می زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می کنم وجود مقدّس شان را و تشکر می کنم از خواهر دو قلوی عزیزم که همواره در تمام مراحل زندگی مشوّق و راهنمای من بوده اند.

آیدین استوار

فهرست مندرجات

چکیده

در این رساله روش تاو عملیّاتی همراه با تجزیه ادومیان برای حل عددی از معادله انتگرال — دیفرانسیل ولترای غیر خطی و نیز دستگاه معادلات انتگرال — دیفرانسیل ولترای غیر خطی به کار رفته است. همچنین از تقریب پاده برای بهبود بخشیدن جواب حاصل استفاده شده است. این روش ضمن برخورداری از دقّت کافی، از محاسبات پیچیده ای نیز برخوردار نیست و در تمامی مراحل از عملیّات ساده ماتریسی استفاده شده است.

در انتهای هر فصل مثالهایی آورده شده است که نتایج آنها دقّت و کارآیی خوب روش تاو عملیّاتی را نشان می دهد.

واژه‌های کلیدی: روش تاو عملیّاتی، روش تجزیه ادومیان، معادله انتگرال-دیفرانسیل ولترای غیر خطی، دستگاه معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترای غیر خطی، تقریب پاده.

پیشگفتار

معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال—دیفرانسیل غیرخطی در بسیاری از مدلهای ریاضی پدیده‌های غیرخطی شاخه‌های مختلف علوم مانند دینامیک سیالات، فیزیک حالت جامد، فیزیک پلاسما، زیست شناسی و فیزیک نظری ظاهر می‌شوند. معادلات انتگرال — دیفرانسیل در سال‌های اخیر، حجم وسیعی از مطالعات را به خود اختصاص داده است. چون امکان پیدا کردن جواب تحلیلی برای اکثر معادلات انتگرال—دیفرانسیل غیرخطی خیلی مشکل و پیچیده است لذا برای حلّ آنها، روشهای عددی مختلفی مورد بحث قرار می‌گیرد. در سال ۱۹۳۸ لانچسوز[۱]، روش جدیدی برای حلّ عددی معادلات دیفرانسیل از خانوادهٔ روشهای طیفی معرفی کرد و به دلیل ظهور پارامتر τ آنرا روش تاو نامید. در این روش مانند سایر روشهای خانوادهٔ طیفی، جواب تقریبی بصورت بسط بر حسب توابع پایه‌ای نوشته می‌شود. در سال ۱۹۸۱ نسخه‌ای از روش تاو بنام روش تاو عملیّاتی اوّلین بار توسط اورتیز[۲] و سمرا[۳] برای حلّ عددی معادلات دیفرانسیل بکار گرفته شد. از سال ۱۹۹۹ شهمراد، حسینی، رحیمی، پورمحمود، عبادی و خانی این روش را برای حلّ عددی انواع معادلات انتگرال و معادلات انتگرال—دیفرانسیل خطی و غیر خطی مورد بحث قرار داده‌اند. در این رساله روش تجزیه ادومیان همراه با تاو عملیّاتی را برای حلّ عددی معادلات انتگرال—دیفرانسیل ولترای غیرخطی بدون خطی‌سازی قسمتهای غیرخطی تعمیم می‌دهیم و از تقریب پاده برای بهبود بخشیدن جواب حاصل از

---

[۱] C. Lanczos

[۲] E. L. Ortiz

[۳] H. Samara

روش مذکور استفاده می شود. در فصل اوّل به مفاهیم اوّلیّه که در فصل های بعدی مورد استفاده قرار می گیرند، می‌پردازیم. فصل دوم، در مورد روش تاو عملیّاتی و تجزیهٔ ادومیان و تقریب پاده می باشد. در فصل سوّم ، حلّ عددی معادلات انتگرال—دیفرانسیل ولترای غیر خطی باترکیب روش تاو عملیّاتی و تجزیهٔ ادومیان همراه باتقریب پاده بیان شده است. و بالاخره فصل چهارم تعمیم این روش برای حلّ عددی دستگاه معادلات انتگرال—دیفرانسیل ولترای غیرخطی با ترکیب روش تجزیهٔ ادومیان همراه با تاو عملیّاتی اختصاص یافته است.

فصل ۱

مفاهیم مقدّماتی

۱.۱ مقدمه

تعریف ۱.۱.۱ هر معادله‌ای را که در آن تابع مجهول زیر علامت انتگرال قرار داشته باشد، معادلهٔ انتگرال گویند. یا به بیان دیگر، هرمعادله به شکل

$$y(x) - \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} F(x,t,y)dt = f(x) \quad (۱)$$

را یک معادلهٔ انتگرال گویند. در معادلهٔ (۱)، λ عددی معلوم و $\alpha(x)$، $\beta(x)$، $f(x)$ و F توابعی معلوم هستند و $y(x)$ تابع مجهول است. منظور از حلّ معادلهٔ (۱)، پیدا کردن تابع مجهول $y(x)$ است که در آن صدق کند.

تعریف ۲.۱.۱ اگر یک معادلهٔ انتگرال شامل مشتقّاتی از تابع مجهول نیز باشد، آنرا معادلهٔ انتگرال—دیفرانسیل گویند.

مثال ۱.۱.۱ فرض کنید $y(x)$ تابع مجهول باشد در این حالت به معادلهٔ

$$Dy(x) = f(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)F(y(t))dt \quad (۲)$$

معادلهٔ انتگرال—دیفرانسیل گویند. در معادلهٔ (۲)، $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ حدود انتگرال، تابع دو متغیرهٔ $k(x,t)$ به عنوان هستهٔ معادله و تابع $f(x)$ توابعی معلوم هستند و D عملگر دیفرانسیل است. هرگاه عملگر D عملگر همانی باشد آنگاه معادلهٔ (۲) به صورت

$$y(x) = f(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)F(y(t))dt$$

نوشته می‌شود که یک معادلهٔ انتگرال است.

معادلات انتگرال در مسائلی از مباحث فیزیک، زیست شناسی، شیمی و مهندسی ظاهر می‌شوند. به نظر بوچر[۱] نام معادلهٔ انتگرال توسط بویس—ریموند[۲] در سال ۱۸۸۸ پیشنهاد شده است هر چند که اوّلین پیدایش معادلهٔ انتگرال توسط آبل[۳] به رسمیّت شناخته شده است. آبل در رساله‌اش در سالهای ۱۸۲۳ تا ۱۸۲۶ مشغول بررسی معادلاتی نظیر

$$f(x) = \int_{a}^{\infty} (x-t)^{-\alpha} f(t)dt, \qquad ۰ < \alpha < ۱$$

بود که در آن $f(x)$ یک تابع پیوسته است و در شرط $f(\alpha) = ۰$ صدق می‌کند. همچنین عقیده‌ای وجود دارد که اوّلین پیدایش معادلهٔ انتگرال به کار لاپلاس[۴] در سال ۱۷۸۲ برمی‌گردد که روی تبدیلات لاپلاس و معکوس آنها مطالعه می‌کرد. به عنوان مثال، تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ به صورت

$$L\Big(f(t)\Big) = F(s) = \int_{۰}^{\infty} e^{-st} f(t)dt, \ s > ۰$$

است، به شرط آنکه انتگرال فوق به ازای $s > ۰$ همگرا باشد. یا در مسألهٔ پیدا کردن تبدیل معکوس لاپلاس تابع $F(s) = \frac{۱}{s^{۲}}, \ s > ۰$ با حلّ معادلهٔ انتگرال

$$\frac{۱}{s^{۲}} = \int_{۰}^{\infty} e^{-st} f(t)dt, \ s > ۰$$

---

[۱] M. Bocher

[۲] Bois-Reymond

[۳] Abel

[۴] Laplace

مواجه می‌شویم. بنابراین به نظر می‌رسد که معادلهٔ انتگرال توسط لاپلاس شروع شده باشد. در سال ۱۸۲۰ فوریه[۵] تبدیلات فوریه را مطرح کرد که پیدا کردن تبدیل معکوس فوریه به حلّ معادلهٔ انتگرال منجر شد. همچنین درسال ۱۸۲۶ پواسن[۶] در بررسی علم مغناطیس، معادلهٔ

$$y(x) - \lambda \int_{0}^{x} k(x,t)y(t)dt = f(x)$$

را مورد بررسی قرار داد که در آن $y(x)$ تابع مجهول است. در سال ۱۸۷۰ نیومن[۷] ثابت کرد که یافتن جواب مسألهٔ دیریکله[۸] با تعیین جواب یک معادلهٔ انتگرال معادل است که اصطلاحاً به آن معادلهٔ انتگرال با شرایط مرزی می‌گویند. در سال ۱۸۹۶ ولترا[۹] در مطالعهٔ موضوع رشد جمعیّت، به مسألهٔ

$$y(x) + \int_{a}^{x} k(x,t)y(t)dt = f(x)$$

برخورد کرد. در سال ۱۹۰۰ فردهلم[۱۰] معادلهٔ

$$y(x) = f(x) + \int_{a}^{b} k(x,t)y(t)dt$$

را مورد مطالعه قرار داد [۱].

۲.۱ دسته‌بندی معادلات انتگرال

۱.۲.۱ معادلهٔ انتگرال فردهلم

معادلهٔ انتگرال فردهلم خطی نوع دوّم به شکل

$$y(x) - \lambda \int_{a}^{b} k(x,t)y(t)dt = f(x), \quad x \in [a,b] \tag{۳}$$

Fourier[۵]

Poisson[۶]

Neumann[۷]

Direclet[۸]

V. Volterra[۹]

Fredholm[۱۰]

است. در معادلهٔ (۳)، λ، b و a اعدادی معلوم، تابع $k(x,t)$ هستهٔ معادلهٔ انتگرال و تابع $f(x)$ توابعی معلوم هستند. اگر

$$f(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)y(t)dt, \quad x \in [a,b] \tag{۴}$$

آنگاه معادلهٔ (۴) را معادلهٔ انتگرال فردهلم خطی نوع اوّل گویند. معمولاً تابع جواب در این نوع معادلات به تابع $f(x)$ خیلی حسّاس است بدین معنی که تغییرات جزئی در تابع $f(x)$ باعث تغییرات زیاد در تابع جواب می‌شود. به عبارت دیگر این نوع مسائل بد وضع هستند که روشهای خاصّی را برای حلّ می‌طلبند[۷]. هرگاه $f(x) = ۰$ معادلهٔ (۳) را معادلهٔ همگن، در غیر اینصورت آنرا معادلهٔ غیرهمگن می‌گویند. معادلهٔ همگن را مسألهٔ مقدار مشخّصه و $y(x)$ را تابع مشخّصهٔ عملگر انتگرال نیز می‌گویند[۷]. بایستی توجه کنیم که می‌توانیم مسائل مقدار مرزی را به معادلهٔ انتگرال فردهلم تبدیل کنیم. به عنوان مثال مسألهٔ مقدار مرزی

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = x, \ ۰ < x < ۱, \\ y(۰) = ۱, \ y(۱) = ۰ \end{cases}$$

به معادلهٔ انتگرال فردهلم خطی ناهمگن نوع دوّم به صورت

$$y(x) - \int_۰^۱ k(x,t)y(t)dt = ۲x - ۱$$

تبدیل می‌شود که در آن هستهٔ $k(x,t)$ به شکل

$$k(x,t) = \begin{cases} t(۱ - x) & ۰ \le t \le x \\ x(۱ - t) & x \le t \le ۱ \end{cases}$$

است. یا به عنوان مثال دیگر مسألهٔ همگن با مقدار مرزی

$$\begin{cases} y''(x) - \lambda y(x) = ۰, \ a < x < b, \\ y(a) = ۰, \ y(b) = ۰. \end{cases}$$

به معادلهٔ انتگرال فردهلم خطی همگن نوع دوّم

$$y(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)y(t)dt = ۰$$

تبدیل می‌شود که هستهٔ آن عبارت است از[۲۵]:

$$k(x,t) = \begin{cases} \dfrac{(t-a)(x-b)}{b-a}, & a \le t \le x \\ \\ \dfrac{(x-a)(t-b)}{b-a}, & x \le t \le b. \end{cases}$$

تعریف ۱.۲.۱ S و T را به ترتیب مربع و مثلث بستهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

$$S = \{(x,t)|\ a \le x \le b,\ a \le t \le b\} \quad T = \{(x,t)|\ a \le t \le x \le b\}$$

تعریف ۲.۲.۱ تابع $k(x,t)$ را بر مربع S یا مثلث T دارای نقاط ناپیوسته با توزیع منظم گوییم هر گاه:

۱) نقاط ناپیوستگی آن روی تعدادی متناهی از منحنی‌های هموار باشد.

۲) هر یک از منحنی‌های هموار قسمت فوق، هر خط موازی با محورهای مختصات را حداکثر در تعداد متناهی نقطه قطع کند.

تعریف ۳.۲.۱ فضای تابعی $\Re$ عبارت است از مجموعهٔ تمام توابعی مانند $k(x,t)$ که بر S یا T تعریف شده و

۱) $k(x,t)$ بر دامنهٔ تعریف S یا T کراندار باشد.

۲) نقاط ناپیوستگی $k(x,t)$ بر S یا T دارای توزیع منظم باشد.

قضیه ۱.۲.۱ (قضیهٔ متناوب فردهلم) معادلهٔ انتگرال فردهلم خطی غیرهمگن جواب یکتا دارد اگر و تنها اگر معادلهٔ انتگرال فردهلم همگن نظیر آن فقط جواب بدیهی داشته باشد.

برهان. ر. ک. [۷]. ■

قضیه ۲.۲.۱ هرگاه $k(x,t)$ در معادلهٔ انتگرال فردهلم خطی نوع دوّم در فضای تابعی $\Re$ باشد و $f(x)$ در $[a,b]$ پیوسته باشد و $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$، که در آن M کران بالای تابع $k(x,t)$ است، آنگاه معادلهٔ انتگرال فردهلم خطی جواب یکتا دارد که در $[a,b]$ پیوسته است[۷].

هر معادله به شکل

$$y(x) - \lambda \int_a^b F(x,t,y)dt = f(x) \qquad (5)$$

را معادلهٔ انتگرال فردهلم غیرخطی گویند که در آن $f(x)$ و $F(x,t,y)$ توابعی پیوسته هستند. با فرض $f(x) + \lambda \int_a^b F(x,t,y)dt = T(y)$، می‌توان معادلهٔ (۵) را به شکل $y(x) = T(y)$ نوشت که آن را شکل عملگری معادلهٔ انتگرال فردهلم غیرخطی می‌گویند.

تعریف ۴.۲.۱ تابع $F(x,t,y)$ نسبت به متغیر $y(t)$ در شرط لیپشیتس صدق می‌کند هرگاه عددی مثبت مانند L (بنام ثابت لیپشیتس) موجود باشد به طوریکه برای هر $(x,t,a(t)),(x,t,b(t)) \in D_F$ داشته باشیم

$$|F(x,t,a(t)) - F(x,t,b(t))| \leq L|a(t) - b(t)|$$

که در آن $D_F = \{(x,t,y) : x,t \in [a,b], y \in [c,d]\}$.

تعریف ۵.۲.۱ (نقطهٔ ثابت یک عملگر) اگر $T : X \to X$ یک عملگر باشد، نقطهٔ $x_0 \in X$ را نقطهٔ ثابت عملگر T می‌گوئیم اگر $T(x_0) = x_0$.

تعریف ٦.۲.۱ (نگاشت انقباضی) نگاشت $T : X \to X$ را نگاشت انقباضی می‌گوییم اگر عددی حقیقی و نامنفی مانند α، $0 \leq \alpha < 1$ موجود باشد به طوری که برای هر $x_1,\ x_2 \in X$ داشته باشیم:

$$|T(x_1) - T(x_2)| \leq \alpha |x_1 - x_2|.$$

قضیه ۳.۲.۱ (قضیهٔ نقطهٔ ثابت) اگر $T:X\to X$ نگاشت انقباضی باشد آنگاه T فقط یک نقطهٔ ثابت دارد.

برهان. ر. ک. [۲۵]. ■

ثابت می‌شود که اگر عملگر T، نظیر معادلهٔ انتگرال فردهلم غیرخطی (۵) ، در شرط لیپشیتس صدق کند و $|\lambda| < \frac{1}{L(b-a)}$ که در آن عدد L ثابت لیپشیتس عملگر T است آنگاه معادلهٔ $y(x)=Ty(x)$ جواب یکتا دارد. بایستی دقّت کنیم که فقط پیوستگی $F(x,t,y)$ برقراری شرط لیپشیتس را نتیجه نمی‌دهد. اگر $\frac{\partial F}{\partial y}(x,t,y)$ در D_F پیوسته باشد آنگاه $F(x,t,y)$ نسبت به $y(t)$ در شرط لیپشیتس صدق می‌کند و ثابت لیپشیتس به صورت $L=\max_{(x,t)\in D}|\frac{\partial F}{\partial y}|$ بدست می آید[۲۵].

۲.۲.۱ معادلهٔ انتگرال ولترا

معادلهٔ انتگرال ولترای خطی نوع دوّم، به شکل

$$y(x)-\lambda\int_a^x k(x,t)y(t)dt=f(x),\quad x\in[a,b] \tag{۶}$$

است. در معادلهٔ (۶)، λ و a اعدادی معلوم، تابع $k(x,t)$ بنام هستهٔ معادلهٔ انتگرال و تابع $f(x)$ توابعی معلوم هستند. اگر

$$f(x)=\lambda\int_a^x k(x,t)y(t)dt,\quad x\in[a,b] \tag{۷}$$

آنگاه معادلهٔ (۷) را معادلهٔ انتگرال ولترای خطی نوع اوّل می‌گویند. هرگاه $f(x)=0$، معادلهٔ (۶) را همگن، در غیر این صورت آنرا غیرهمگن می‌گویند. مسألهٔ مقدار اوّلیّه، به یک معادلهٔ انتگرال ولترا قابل تبدیل است. به عنوان مثال مسألهٔ مقدار اوّلیّهٔ ناهمگن

$$\begin{cases} y''(x)+y(x)=\cos x \\ y(0)=0,\ y'(0)=1. \end{cases}$$

به معادلهٔ انتگرال ولترای خطی ناهمگن نوع دوّم به شکل

$$y(x)+\int_0^x (x-t)y(t)dt=\cos x - x$$

تبدیل می‌شود. به عنوان دوّمین مثال، مسألهٔ مقدار اوّلیّهٔ خطی

$$\begin{cases} y''(x) - sin(x)y'(x) + e^x y(x) = x \\ y(\circ) = ۱,\ y'(\circ) = -۱. \end{cases}$$

به معادلهٔ انتگرال ولترای خطی ناهمگن نوع دوّم به شکل

$$y(x) - \int_\circ^x \Big(\sin x + (t-x)(e^t + \cos t)\Big) y(t)dt = \frac{x^۳}{۶} - x$$

تبدیل می‌شود[۲۵].

با فرض اینکه همواره $k(x,x) \neq \circ$ و $k(x,t)$ نسبت به x مشتق‌پذیر باشد، معادلهٔ انتگرال ولترای خطی نوع اوّل

$$f(x) = \lambda \int_\circ^x k(x,t)y(t)dt,\ x \in [\circ, b]$$

را می‌توان به معادلهٔ انتگرال ولترای خطی نوع دوّم

$$y(x) - \int_\circ^x h(x,t)y(t)dt = g(x),\ x \in [\circ, b]$$

تبدیل نمود که در آن $g(x) = \dfrac{۱}{\lambda k(x,x)} \dfrac{df}{dx}$ و $h(x,t) = \dfrac{-۱}{k(x,x)} \dfrac{\partial k(x,t)}{\partial x}$ (ر.ک.[۱]).

برای مثال می‌توان معادلهٔ انتگرال ولترای خطی نوع اوّل

$$\sin x = \int_\circ^x e^{x-t} y(t)dt$$

را به معادلهٔ انتگرال ولترای خطی نوع دوّم

$$y(x) + \int_\circ^x e^{x-t} y(t)dt = \cos x$$

تبدیل نمود[۲۵].

هر معادلهٔ انتگرال ولترا را می‌توان یک معادلهٔ انتگرال فردهلم در نظر گرفت که هستهٔ آن به صورت

$$k(x,t) = \begin{cases} k(x,t), & a \leq t \leq x \\ \circ, & x < t \leq b. \end{cases}$$

است که در آن $k(x,t)$ موجود در ضابطهٔ اوّل همان هستهٔ معادلهٔ انتگرال ولترا است.

قضیه ۴.۲.۱ اگر در معادلهٔ انتگرال ولترا

$$y(x) - \lambda \int_a^x k(x,t)y(t)dt = f(x), \quad x \in [a,b] \qquad (۸)$$

تابع $f(x)$ در $[a,b]$ پیوسته و تابع $k(x,t)$ در فضای تابعی $\Re$ باشد آنگاه معادلهٔ (۸)، جواب یکتا دارد که در $[a,b]$ پیوسته است[۲۵].

لازم به ذکر است که معادلهٔ انتگرال ولترای (۸) را می‌توان به صورت $(I-T)y(x) = 0$ نیز نمایش داد که در آن $Ty(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)y(t)dt$.
ثابت می‌شود که اگر توابع $f(x)$ و $k(x,t)$ پیوسته باشند آنگاه عملگر T یک نگاشت انقباض است و معادلهٔ $y(x) = Ty(x)$ بنا بر قضیهٔ نقطهٔ ثابت ۳.۲.۱ دارای جواب یکتا است[۲۵].
معادلهٔ انتگرال ولترای غیرخطی به صورت

$$y(x) - \lambda \int_a^x F(x,t,y)dt = f(x), \quad x \in [a,b] \qquad (۹)$$

است. در معادلهٔ (۹)، برای وجود و یکتایی جواب آن کافی است تابع $f(x)$ در $[a,b]$ پیوسته و تابع $F(x,t,y)$ نسبت به هر سه متغیر x,t,y در ناحیهٔ

$$D = \{(x,t,y) : a \le x \le b, a \le t \le b, c \le y \le d\}$$

پیوسته باشد. علاوه بر آن $F(x,t,y)$ نسبت به y در شرط لیپشیتس صدق کند[۲۵]. معادلات انتگرال غیرخطی در حالت کلّی جواب یکتا ندارند و حلّ تحلیلی آنها بسیار مشکل است.

۳.۲.۱ معادلات انتگرال منفرد

یک معادلهٔ انتگرال را منفرد نامند هرگاه حداقل یکی از دو کران انتگرال بینهایت باشد یا اینکه هستهٔ آن کراندار نباشد. انتگرال فوریهٔ تابع $y(x)$ به صورت

$$F(y(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} y(x)dx$$

تعریف می‌شود که یک انتگرال منفرد با دامنهٔ انتگرال‌گیری نامتناهی است. حالتی از معادلات انتگرال منفرد با هستهٔ نامتناهی به صورت

$$y(x) - \int_a^x \frac{g(x,t)}{(x-t)^\alpha} y(t)dt = f(x), \quad 0 < \alpha < 1 \qquad (۱۰)$$

هستند که درآن $g(x,t)$ تابعی کراندار است. برای معادلات انتگرال منفرد با هستهٔ نامتناهی دو حالت را در نظر می‌گیریم که روش حلّ آنها کاملاً متفاوت است. معادلهٔ (۱۰) را معادلهٔ انتگرال منفرد از نوع ضعیف یا معادلهٔ انتگرال با هستهٔ منفرد ضعیف گویند هرگاه $0 < \alpha < 1$. دستهٔ دیگر، معادلات انتگرال منفرد قوی است. هرگاه $\alpha = 1$ معادلهٔ (۱۰) را معادلهٔ انتگرال منفرد با هستهٔ کوشی هم می‌نامند[۲۵].

معادلات

$$y(x) - \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{0} \cos(x-t) y^2(t)dt = x$$

$$y(x) - \frac{1}{6}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-t)y(t)dt = 1 + x^2$$

مثالهایی از معادلات انتگرال منفرد ($k(x,\ t) = (x-t)^\alpha$) با حدود انتگرال‌گیری نامتناهی هستند.

معادلات

$$x^2 = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} y(t)dt$$

$$x = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} y(t)dt, \qquad 0 < \alpha < 1$$

$$y(x) = 1 + 2\sqrt{x} - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} y(t)dt \qquad (۱۱)$$

مثالهایی از معادلات انتگرال منفرد هستند که علت منفرد بودن آنها نامتناهی بودن هسته در کران بالای انتگرال‌گیری است. معادلات انتگرال آبل در حالت کلّی به شکل

$$f(x) = \int_a^x \frac{g(x,t)}{(x-t)^\alpha} y(t)dt, \quad 0 < \alpha < 1, \quad x \in [a,b]$$

هستند. این معادلات اوّلین بار توسط ریاضیدان نروژی بنام نیلز آبل در سال ۱۸۲۳ معرفی و مورد بررسی قرارگرفت. معادلهٔ انتگرال (۱۱)، از نوع ولترای نوع دوّم منفرد بطور ضعیف است که این نوع معادلات در مسائلی نظیر انتقال گرما، رشد کریستالها و مکانیک سیالات ظاهر می‌شوند.