بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين الرحمن الرحيم مالك يوم الدين اياك نعبد واياك نستعين اهدنا الصراط المستقيم صراط الذين انعمت عليهم غير المغضوب عليهم ولا الضالين

۸۷۹۶۹

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی (کاربردی)

بررسی یک پیش شرط ساز برای روش تاو

توسط

مجتبی حاجی‌پور

استاد راهنما

دکتر سید محمد حسینی

استاد مشاور

دکتر فریده قریشی

خرداد ۱۳۸۷

بسمه‌تعالی

آیین‌نامهٔ چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرّس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان‌نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرّس، مبیّن بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش‌آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

مادّهٔ ۱ در صورت اقدام به چاپ پایان‌نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اطلاّع دهد.

مادّهٔ ۲ در صفحهٔ سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه)، عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد/رسالهٔ دکتری نگارنده در رشتهٔ ریاضی کاربردی است که در سال ۱۳۸۷ در دانشکدهٔ علوم پایه دانشگاه تربیت مدرّس به راهنمایی ~~سرکار خانم~~/جناب آقای دکتر سید محمد حسینی، مشاورهٔ سرکار خانم/~~جناب آقای~~ دکتر فریده قریشی و مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر ______ از آن دفاع شده است.»

مادّهٔ ۳ به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت چاپ) را به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اهداکند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر در معرض فروش قرار دهد.

مادّهٔ ۴ در صورت عدم رعایت مادّهٔ ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ‌شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت مدرّس، تأدیه کند.

مادّهٔ ۵ دانشجو تعهد و قبول می‌کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در مادّهٔ ۴ را از محلّ توقیف کتابهای عرضه‌شدهٔ نگارنده برای فروش، تأمین نماید.

مادّهٔ ۶ اینجانب مجتبی حاجی پور دانشجوی رشته ریاضی کاربردی مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می‌شوم.

نام و نام‌خانوادگی: مجتبی حاجی پور ۲۲/ ۱۷/ ۸۷

تاریخ و امضا:

۱۳۸۷/ ۱۲/ ۸

دستورالعمل حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی

دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیات علمی، دانشجویان، دانش آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی که با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد ذیل را رعایت نمایند:

ماده ۱– حقوق مادی و معنوی پایان نامه‌ها / رساله‌های مصوب دانشگاه متعلق به دانشگاه است و هرگونه بهره‌برداری از آن باید با ذکر نام دانشگاه و رعایت آیین‌نامه‌ها و دستورالعمل‌های مصوب دانشگاه باشد.

ماده ۲– انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و استاد راهنما مسئول مکاتبات مقاله باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳– انتشار کتاب حاصل از نتایج پایان نامه / رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی دانشگاه باید با مجوز کتبی صادره از طریق حوزه پژوهشی دانشگاه و بر اساس آئین نامه های مصوب انجام می‌شود.

ماده ۴– ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق حوزه پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵– این دستورالعمل در ۵ ماده و یک تبصره در تاریخ ۱۳۸٤/٤/۲۵ در شورای پژوهشی دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب لازم الاجرا است و هرگونه تخلف از مفاد این دستورالعمل، از طریق مراجع قانونی قابل پیگیری می شود.

نام و نام خانوادگی

امضاء

۸۲/۴/۲۵

اگر شایسته تقدیم باشد، به

مادرم و روان پاک پدرم

قدردانی

سپاس و ستایش معبود یگانه را که پرتو الطاف بی‌شمارش بر لحظه لحظهٔ زندگی‌ام ساطع و آشکار است. حمد و ثنا می‌گزارم او را که فکرت و اندیشه را در بستر روحم روان ساخت و بهره‌گیری از خوان گستردهٔ دانش اساتیدم را نصیب و روزی‌ام گردانید.

امتنان و سپاس می‌گزارم تلاشها، زحمات و راهنمایی‌های ظریف، ارزشمند و بی‌شائبهٔ استاد فرزانه و گرانمایه‌ام، جناب آقای دکتر سید محمد حسینی را که با حمیت و جدیت، مرا به دقت، اندیشه، درک و تعمق وامی‌داشتند. مراتب سپاس و قدردانی را از راهنمائیهای دلسوزانه سرکار خانم دکتر فریده قریشی ابراز می‌دارم. همچنین از جناب آقای دکتر اسمائیل بابلیان که قبول زحمت فرمودند و داوری پایان‌نامه بنده را بعهده گرفتند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از مادر مهربان و برادر عزیزم آقای دکتر احمد حاجی‌پور به خاطر عشق و حمایت مداومشان تشکر می‌کنم .

چکیده

روش تاو محاسباتی را می‌توان به عنوان یکی از روش‌های طیفی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی و مشتقات جزئی خطی قلمداد نمود. در این روش جواب تقریبی معادله یعنی $u^{(n)}(x)$ روی $[-1, 1]^d$، $d \geqslant 1$ به صورت یک سری متناهی $u^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\phi_i(x)$ در نظر گرفته می‌شود بطوریکه $\phi_i(x)$ ها توابع پایه‌ای روی $[-1, 1]^d$ هستند و ضرایب a_i، $0 \leqslant i \leqslant n$ لازم است که محاسبه شوند. در مسائل خطی ضرایب $\underline{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n)^T$، از معادله ماتریسی $\mathbf{M}\underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{F}}$ بدست می‌آیند. در این روش $\mathbf{M}$ ماتریس مربعی از مرتبه $(n + 1) \times (n + 1)$ بوده و معمولاً دارای $O(n^2)$ عنصر غیر صفر است. در این مسائل با افزایش درجه تقریب n، عدد حالت $\mathbf{M}$ به سرعت رو به افزایش می‌گذارد و در نتیجه تعیین جواب این دستگاه هزینه‌های محاسباتی زیادی را تحمل خواهد نمود. ما برای به دست آوردن یک پیش‌شرط ساز مناسب که افزایش عدد حالت ماتریس $\mathbf{M}$ را کنترل نماید توابع پایه‌ای و آزمون جدیدی را معرفی خواهیم نمود. ما در این پایانامه روش پیش شرط سازی شده جدید را برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی، دستگاههای معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات انتگرال– دیفرانسیل و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئیْ بکار می‌بریم. سپس نتایج عددی حاصل از روش‌های تاو استاندارد، تاو پیش شرط سازی شده کابوس و روش تاو جدید را با هم مقایسه می‌کنیم که نتایج عددی ارائه شده بیانگر کارایی روش تاو جدید بدست آمده است.

واژه‌های کلیدی : روش تاو کابوس، روش تاو جدید، معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی.

فهرست مندرجات

۱ چندجمله‌ایهای متعامد ۶

۱.۱ مقدمه ۶

۲.۱ دستگاه چندجمله‌ایهای متعامد ۷

۳.۱ چندجمله‌ایهای فوق کروی ۹

۱.۳.۱ چندجمله‌ایهای گِگِنبائر ۹

۲.۳.۱ چندجمله‌ایهای چبیشف ۱۲

۳.۳.۱ چندجمله‌ایهای لژاندر ۱۴

۴.۱ پایه متعامد برای چندجمله‌ایهای d متغیره ۱۵

۲ روش تاو محاسباتی ۱۷

۱.۲ مقدمه ۱۷

۲.۲ تاو محاسباتی برای معادلات دیفرانسیل معمولی ۱۸

۱.۲.۲ معرفی یک معادله دیفرانسیل معمولی ۲۰

۳.۲ همگرایی روش تاو ۲۶

۴.۲ تخمین خطای روش تاو ۲۸

۵.۲ فرمول‌بندی روش تاو تکه‌ای برای مسئله ODE ۲۹
۱.۵.۲ شرایط پیوستگی ۳۰
۲.۵.۲ نمایش ماتریسی برای شرایط تکمیلی ۳۱
۳.۵.۲ تعیین معادلات خطی نهایی ۳۲

۶.۲ پیاده‌سازی روش تاو برای معادلات انتگرال– دیفرانسیل ۳۳

۷.۲ نتایج عددی ۳۶

۳ عملگر تاو کابوس برای معادلات دیفرانسیل معمولی ۴۰

۱.۳ مقدمه ۴۰

۲.۳ روش تاو کابوس ۴۱
۱.۲.۳ عملگر انتگرال ۴۲
۲.۲.۳ پیاده سازی پیش‌شرط ساز کابوس ۴۳
۳.۲.۳ معادلات دیفرانسیل خطی ۴۴
۴.۲.۳ وجود و همگرایی تقریب تاو کابوس ۴۵

۳.۳ محاسبه پایه کابوس ۴۶

۴.۳ پیاده سازی روش تاو کابوس ۴۷

۴ استفاده از پیش‌شرط ساز در روش تاو ۵۲

۱.۴ مقدمه ۵۲

۲.۴ روش تاو جدید ۵۳
۱.۲.۴ توابع تست و توابع پایه‌ای روش تاو جدید ۵۴
۲.۲.۴ شکل عملگری روش تاو جدید ۵۵
۳.۲.۴ آنالیز خطا ۵۶

۳.۴ ویژگیهای روش تاو جدید ۵۷
۱.۳.۴ پیاده‌سازی روش تاو برای مسئله مرتبه دوم با ضرایب ثابت ۵۹

۴.۴ پیاده‌سازی روش تاو برای دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی ۶۰
۱.۴.۴ معرفی یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی ۶۱
۲.۴.۴ فرمول‌بندی سنتی روش تاو برای دستگاه معادلات دیفرانسیل ۶۲
۳.۴.۴ نمایش ماتریسی جدید روش تاو برای دستگاه معادلات دیفرانسیل . ۶۵

۵.۴ نتایج عددی ۶۶

۶.۴ نتیجه‌گیری ۷۳

۵ حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با استفاده از روش تاو ۷۴

۱.۵ مقدمه ۷۴

۲.۵ اپراتور مشتق، انتقال و اثر چندجمله‌ایهای دو متغیره ۷۵

۳.۵ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی(PDE) ۷۶
۱.۳.۵ عملگر دیفرانسیل ۷۶
۲.۳.۵ شرایط تکمیلی ۷۷
۳.۳.۵ طرف راست ۷۸
۴.۳.۵ ساخت یک معادله برای ماتریس ضرایب ۷۸
۵.۳.۵ جواب تقریبی تاو $u_{nm}(x,y)$ برای معادله دیفرانسیل ۷۸

۴.۵ حل عددی معادله جبری $D(A)=\Phi$ ۷۹

۵.۵ پیاده‌سازی جدید روش تاو برای PDE ۸۱

۶.۵ مثال عددی ۸۴

۱.٦.۵ تعیین معادلات خطی نهایی ٨٦
۷.۵ نتیجه‌گیری ۹۰

مقدمه

معادلات حاکم بر پدیده‌های مختلف فیزیکی عموماً دارای شکل پیچیده‌ای هستند به طوری که اغلب آن‌ها به صورت تحلیلی قابل حل نیستند. برای حل چنین معادلاتی سعی می‌شود جواب تقریبی که به قدر کافی به جواب واقعی نزدیک باشد برای آن‌ها در نظر گرفته شود. مسئله تقریب سالهاست فکر بسیاری از ریاضیدانان را به خود مشغول نموده است و پیشرفت‌های چشمگیر ابزارهای محاسباتی موجب شده است تا قادر به انجام عملیات محاسباتی با سرعت و دقت بسیار بالایی شویم. همین امر لزوم پرداختن به جنبه‌های عملی مسئله تقریب را بیش از پیش افزایش می‌دهد. بنابراین مباحث مربوط به تقریب مناسب جواب معادله بسیار دارای اهمیت است. وایراشتراس[۱] در سال ۱۸۸۵ قضیه‌ای را اثبات نمود که این قضیه وجود یک چندجمله‌ای تقریبی را برای یک تابع پیوسته بر بازهٔ $[a,b]$ تضمین می‌نماید. علیرغم اینکه مباحث مختلفی ارائه شده است که در هر یک فرمول معینی برای ساختن چندجمله‌ای تقریب ارائه می‌دهند. به خاطر محدود بودن ابزارهای محاسباتی و در مواردی بزرگ‌بودن درجهٔ تقریب، هیچ یک از مباحث مطرح شده پاسخی عملی محسوب نمی‌شد. اما سؤالی که مطرح بود این بود که چگونه می‌توان چندجمله‌ای مانند $P_n(x)$ از درجه حداکثر n پیدا نمود به قسمی که :

$$\max_{x\in[a,b]} |P_n(x) - f(x)|$$

[۱] Weierstrass

برای یک تابع داده شده $f(x)$، حداقل شود؟ چبیشف [۲] برای حالت خاص اما مهم جواب مناسبی برای سؤال فوق یافت. چبیشف نشان داد که اگر $f(x) = x^n$ آنگاه چندجمله‌ای

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), \qquad x \in [-۱, ۱]$$

موسوم به n-امین چندجمله‌ای چبیشف پاسخ مناسبی به سؤال مذبور است.

لانکزوس [۳] (۱۹۳۸) از اولین کسانی بود که خواص عملی چندجمله‌ایهای چبیشف و سری چبیشف را مورد بررسی قرار داد. وی با معرفی چندجمله‌ایهای کانونیک [۲۱] راه را برای یافتن بهترین تقریب هموار نمود و روشی به نام روش تاو را ابداع نمود که آن را روش تاو لانکزوس [۴] نامگذاری نموده‌اند. تحقیقات بر روی روش تاو توسط اورتیز[۵]، فاکس[۶](۱۹۶۸) و لوک[۷](۱۹۵۵) دنبال شد.

در سال ۱۹۶۹ اورتیز ضمن تحلیل نظری از روش تاو، فرمول بازگشتی برای تولید چندجمله‌ایهای کانونیک را ارائه نمود[۲۶] و بدینوسیله میدان عمل را برای روش باز نمود. سپس اورتیز در سال ۱۹۷۴ تولید تقریب تاو بر حسب پایه‌های دلخواه از چندجمله‌ایهای متعامد را ارائه نمود. توسعه روش برای حل دستگاههای معادلات دیفرانسیل و مسئله پایداری روش توسط کریسکی[۸] و روسو[۹] (۳–۱۹۸۲) مطرح شد[۶]. اما مشکلی که وجود داشت پیچیدگی پیاده‌سازی روش تاو بود که سرانجام در سال ۱۹۸۱ اورتیز و سامارا[۱۰] روش تاو محاسباتی [۱۱] [۲۷] را بر اساس روش تاو برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی غیر خطی با ضرایب چندجمله‌ای ارائه دادند. همچنین اورتیز و سامارا در سال ۱۹۸۴ روش تاو محاسباتی را برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی همراه

[۲] Chebyshev

[۳] Lanczos

[۴] Lanczos Tau method

[۵] Ortiz

[۶] Fox

[۷] Luke

[۸] Crisci

[۹] Russo

[۱۰] Samara

[۱۱] Operational Tau Method

با ضرایب چندجمله‌ای مورد بررسی قرار دادند[۲۸]. در سال ۱۹۸۸ روس [12] و فیفر [13] به این سؤال که آیا این روش تاو محاسباتی همواره همگراست یانه ؟ پاسخ دادند و نشان دادند[۳۲] که روش تاو محاسباتي اورتیز و سامارا در پایه‌های چبیشف یک نوع روش پتروف—گالرکین [14] است و همگرایی آن از قضیه همگرایی ویْنیکو [15] پیروی می‌کند[۳۷]. سرانجام در سال ۲۰۰۳ حسینی [16] و شهمراد روش تاو محاسباتی را برای حل معادلات انتگرال— دیفرانسیل فرمول بندی کردند[۱۸]—[۱۹] و نتایج بسیار مناسبی برای حل این دسته از معادلات بدست آوردند.

در مسائل خطی، با اعمال روش تاو محاسباتی، نهایتاً به دستگاهی به صورت $\mathbf{M}\underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{F}}$ دست می‌یابیم که $\mathbf{M}$ ماتریس مربعی از مرتبه $(n+1) \times (n+1)$ بوده و معمولاً دارای $O(n^2)$ عنصر غیر صفر است که معمولاً حل این معادله بدون استفاده از یک روش مناسب از نظر زمان و حافظه اشغال‌شده مقرون به صرفه نیست. به عبارت دیگر با افزایش درجه تقریب n عدد حالت $\mathbf{M}$ به سرعت رو به افزایش می‌گذارد و بنابراین حل دستگاه فوق عملاً دچار مشکل می‌شود. در سال ۱۹۹۴ کابوس [17] با معرفی یک عملگر انتگرال روش تاو را اصلاح نمود به طوری که توابع پایه‌ای جدید حاصل جملاتی که بیشترین اثر را در افزایش عدد حالت ماتریس $\mathbf{M}$ دارا هستند کنترل کند[۳]. اما محاسبات نشان دادند که روش تاو اصلاح شده کابوس تحت تأثیر خطای گردکردن می‌باشد; حسینی و قریشی [18] در سال ۲۰۰۴ پیش شرط ساز جدیدی را ارائه دادند[۱۲] که بطور چشمگیری عدد حالت ماتریس $\mathbf{M}$ را کنترل می‌کند و برخلاف روش کابوس خطای گردکردن در آن تأثیر چندانی ندارد که در نتیجه آن روش تاو جدید نتایج دقیقتری را تولید می‌کند.

کار این پایانامه اساساً مبتنی بر [۱۲] می‌باشد که قرار است اثر پیش شرط ساز معرفی‌شده را بر معادلات

[12] Roos

[13] Pfeifer

[14] Galerkin-Petrov

[15] Vainikko's convergence theorem

[16] S.M. Hosseini

[17] Cabos

[18] F. Ghoreishi

دیفرانسیل با مشتقات جزئی مورد بررسی قرار دهیم.

ما در این پایانامه روش تاو جدید را برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی فرمول بندی و سپس برای برخی مسائل پیاده‌سازی نموده‌ایم. همچنین ما پیش شرط ساز جدید را برای تاو تکه‌ای و دستگاههای معادلات دیفرانسیل فرمول‌بندی و پیاده‌سازی می‌کنیم.

آنچه که در این پایانامه می‌آید بررسی روش تاو محاسباتی استاندارد، روش تاو کابوس و روش تاو جدید در حل معادلات دیفرانسیل معمولی، دستگاههای معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات انتگرال— دیفرانسیل و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌باشد.

سیر مطالب به گونه زیر دنبال می‌شود:

در فصل اول دستگاههای متعامد را مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس چندجمله‌ایهای متعامدِ گِگِنبائر، چبیشف و لژاندر و رابطه بین آنها را معرفی می‌کنیم.

در فصل دوم روش تاو محاسباتی را برای معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلادت انتگرال—دیفرانسیل فرمول‌بندی می‌کنیم. همچنین روش تاو تکه‌ای را برای یک معادله دیفرانسیل معمولی پیاده‌سازی می‌کنیم. در انتها نتایج عددی مربوط به برخی مسائل که با استفاده از روش تاو محاسباتی حل شده‌اند گزارش شده است.

در فصل سوم با استفاده از عملگر انتگرال که توسط کابوس معرفی شد، روش تاو را اصلاح می‌کنیم; همچنین طی قضیه‌ای نشان می‌دهیم که عدد حالت ماتریس نهایی حاصل از روش تاو پیش شرط سازی شدهٔ کابوس از بالا کراندار است. در ادامه نحوه بدست آوردن پایه‌های جدید را مفصلاً شرح می‌دهیم و برای یک مسئله دیفرانسیل معمولی ماتریس نهایی حاصل از روش کابوس و روش تاو در پایه چبیشف مشخص و نتاج عددی مربوطه را گزارش می‌کنیم.

در فصل چهارم با معرفی توابع پایه‌ای بر مبنای چند جمله‌ایهای لژاندار و چند جمله‌ایهای چبیشف و توابع آزمون جدیدی بر مبنای نوع خاصی از چند جمله‌ایهای گگنبایر که بر اساس مرتبه ODE انتخاب می شوند روش تاو جدیدی را پایه‌ریزی می‌نماییم. سپس نشان

می‌دهیم که ماتریس نهایی بدست آمده از روش تاو جدید کنترل می‌شود و با افزایش درجه تقریب عدد حالت افزایش نمی‌یابد. همچنین در این فصل یک نمایش ماتریسی جدید را برای پیاده‌سازی روش تاو برای دستگاههای معادلات دیفرانسیل ارائه می‌دهیم. در انتها با گزارش عددی حاصل از اعمال روش تاو جدید بر برخی مسائل کارایی روش تاو جدید را نشان می‌دهیم.

در فصل پنجم ابتدا روش تاو محاسباتی را برای یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی فرمول بندی می‌کنیم. سپس با استفاده از یک پیاده‌سازی جدید روش تاو جدید را برای این دسته از معادلات فرموله می‌کنیم. در انتهای فصل نتایج عددی حاصل از روش تاو استاندارد، روش تاو کابوس و روش تاو جدید برای چند مسئله گزارش شده است.

همانطور که اشاره شد این پایانامه اختصاص به پیش شرط سازهای روش تاو برای حل مسائل دیفرانسیلی خطی دارد و همانطور که گزارش شده است پیش شرط سازهای موجود نمی‌توانند به نحو مطلوبی عدد حالت ماتریس نهایی حاصل از اعمال روش تاو بر معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را کنترل نمایند، بنابراین بدست آوردن پیش شرط سازی که بتواند عدد حالت ماتریس نهایی حاصل از اعمال روش تاو بر معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را کنترل نماید بعنوان یک کار جدید دنبال می‌شود. البته ناگفته نماند که بررسی خطای حاصل از روش تاو برای این دسته از معادلات نیز هنوز به عنوان یک مسئله باز تلقی می‌شود.

فصل ۱

چندجمله‌ایهای متعامد

۱.۱ مقدمه

معادلات حاکم بر پدیده‌های مختلف فیزیکی عموماً دارای شکل پیچیده‌ای هستند به طوری که اغلب آن‌ها به صورت تحلیلی قابل حل نیستند. بدین منظور برای حل چنین معادلاتی سعی می‌شود جواب تقریبی که به قدر کافی به جواب واقعی نزدیک باشد برای آن‌ها در نظر گرفته شود. از این رو مباحث مربوط به تقریب مناسب جواب معادله بسیار دارای اهمیت است. از قضایای بنیادی این مسئله می‌توان به قضیه وایراشتراس اشاره نمود:

قضیه وایراشتراس[۱]: اگر تابع $f(x)$ بر بازه $[a,b]$ پیوسته باشد دنباله‌ای از چندجمله‌ایها مانند $\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$ موجود است به طوری که به طور یکنواخت روی $[a,b]$ به تابع f همگرا است[۲]. به عبارتی دیگر

$$\forall\epsilon > 0, \quad \exists N, \ \forall n \geqslant N \qquad |P_n(x) - f(x)| < \epsilon, \qquad \forall x \in [a,b]$$

چندجمله‌ایهای متعامد از جمله چندجمله‌ایهایی هستند که برای تقریب توابع هموار می‌توانند مفید باشند و از ابزار اولیه و مهمی هستند که در حل معادلات دیفرانسیل و انتگرال به طور مؤثری مورد استفاده قرار می‌گیرند. از این رو در ادامه به طور مختصر به آنها اشاره می‌کنیم.

تعریف ۱.۱ فرض کنیم چندجمله‌ایهای $u(x)$ و $v(x)$ روی بازه $[a,b]$ تعریف شده باشند و تابع وزن نامنفی $\omega(x)$ روی حداقل (a,b) تعریف شده باشد. ضرب داخلی پیوسته این دو تابع به صورت

[۱] Weierstrass Theorem

زیر نمایش داده می‌شود(با این فرض که انتگرال وجود داشته باشد).

$$(u,v)_\omega = \int_a^b u(x)v(x)\omega(x)dx,$$

تابع وزن نامنفی $\omega(x)$ روی بازه (a,b) باید دارای خواص زیر باشد

$$۱)\quad \int_a^b |x|^n\omega(x)dx < \infty, \qquad n \geqslant ۰$$
$$۲)\quad \int_a^b v(x)\omega(x)dx = ۰ \quad \Leftrightarrow \quad v(x) = ۰, \qquad \forall x \in (a,b)$$

که $v(x)$ تابعی نامنفی و پیوسته است.

تعریف ۲.۱ دو تابع $u(x)$ و $v(x)$ را روی $[a,b]$ نسبت به تابع وزن $\omega(x)$ متعامد گوییم هرگاه

$$(u,v)_\omega = \int_a^b u(x)v(x)\omega(x)dx = ۰,$$

۲.۱ دستگاه چندجمله‌ایهای متعامد

در این بخش دستگاه چندجمله‌ایهای متعامد را معرفی نموده و از آنها در تقریب یک تابع مفروض هموار استفاده خواهیم نمود.

فرض کنیم $\{P_k\}_{k=۰}^{\infty}$ دنباله‌ای از چندجمله‌ایهای جبری باشد بطوریکه درجه P_k برابر k بوده و این چندجمله‌ایها دوبه‌دو نسبت به تابع وزن $\omega(x)$ روی $[-۱,۱]$ متعامد یکه نرمال هستند یعنی

$$\int_{-۱}^{۱} P_k(x)P_m(x)\omega(x)dx = \delta_{km} \quad , \quad \delta_{km} = \begin{cases} ۰ & m \neq k \\ ۱ & m = k \end{cases}.$$

قضیه کلاسیک وایراشتراس نشان می‌دهد که چنین دستگاهی یک فضای $\mathcal{L}_\omega^۲[-۱,۱]$ بوده و کامل است بطوریکه نرم هر عنصر v متعلق به این فضا همراه با ضرب داخلی متناظر متناهی است. یعنی

$$||v||_\omega = \left(\int_{-۱}^{۱} |v(x)|^۲\omega(x)dx\right)^{\frac{۱}{۲}} < \infty,$$

کامل بودن سیستم $\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$ نشان می‌دهد که برای هر $u \in \pounds_{\omega}^{2}[-1, 1]$ می‌توان نوشت:

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{u}_k P_k, \tag{۱.۱}$$

به طوری که $\widehat{u}_k$ ها یعنی ضرایب بسط به صورت زیر قابل محاسبه هستند:

$$\widehat{u}_k = \frac{1}{\| P_k \|_{\omega}^{2}} \int_{-1}^{1} u(x) P_k(x) \omega(x) dx = (u, P_k)_{\omega}.$$

برای $n > 0$ سری قطع شده را برای (۱.۱) به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\mathbb{P}_n u = \sum_{k=0}^{n} \widehat{u}_k P_k = \sum_{k=0}^{N} (u, P_k)_{\omega} P_k. \tag{۲.۱}$$

اگر $\mathbb{P}_n$ را فضای چندجمله‌ایهای با درجه کمتر یا مساوی n بنامیم آنگاه

$$\forall v \in \mathbb{P}_n \quad , \quad (\mathbb{P}_n u, v)_{\omega} = (u, v)_{\omega}.$$

زیرا رابطه (۲.۱) نشان می‌دهد برای هر $P_m \in \mathbb{P}_n$ داریم:

$$(\mathbb{P}_n u, P_m)_{\omega} = \sum_{k=0}^{n} (u, P_k)_{\omega} (P_k, P_m)_{\omega} = (u, P_m),$$

بنابراین می‌توان گفت $\mathbb{P}_n u$ تصویر متعامد u بر $\mathbb{P}_n$ است. کامل بودن فضای $\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$ نشان می‌دهد متناظر هر $u \in \pounds_{\omega}^{2}[-1, 1]$ ([۳۶] را ببینید)

$$\|u - \mathbb{P}_n u\|_{\omega} \longrightarrow 0 \quad , \quad n \longrightarrow \infty$$

در بخش بعد سه نوع دستگاه چندجمله‌ای متعامد فوق کروی، چبیشف و لژاندر را مورد بررسی قرار می‌دهیم و سپس یک دستگاه متعامد را برای چندجمله‌ایهای d متغیره تعریف می‌کنیم.

۳.۱ چندجمله‌ایهای فوق کروی

چندجمله‌ایهای فوق کروی [۲] در حقیقت چندجمله‌ایهای ژاکوبی متقارن [۳] هستند$(\alpha = \beta)$ که به عنوان جوابِ مسئله ستورم — لیوویل [۴] تکین

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)^{\alpha+1}\frac{dP_n^{(\alpha)}(x)}{dx}\right) + n(n+2\alpha+1)(1-x^2)^{\alpha}P_n^{(\alpha)}(x) = 0, \qquad (۳.۱)$$

روی $[-1, 1]$ بدست می‌آیند([۳۶] و[۱]) و دارای فرمول بازگشتی زیر هستند.

$$\begin{cases} P_0^{(\alpha)}(x) = 1, \quad G_1^{(\alpha)}(x) = (2\alpha+1)x \\ xP_n^{(\alpha)}(x) = \dfrac{n+2\alpha}{2n+2\alpha+1}P_{n-1}^{(\alpha)}(x) + \dfrac{n+1}{2n+2\alpha+1}P_{n+1}^{(\alpha)}(x), \end{cases} \qquad (۴.۱)$$

۱.۳.۱ چندجمله‌ایهای گِگِنبائر

در چندجمله‌ایهای فوق کروی با انتخاب $\alpha = m - \frac{1}{2}$ چندجمله‌ایهای گِگِنبائر [۵] بدست می آیند که به طور بازگشتی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} G_0^{(m-\frac{1}{2})}(x) = 1, \quad G_1^{(m-\frac{1}{2})}(x) = 2mx \\ xG_n^{(m-\frac{1}{2})}(x) = \dfrac{n+2m-1}{2n+2m}G_{n-1}^{(m-\frac{1}{2})}(x) + \dfrac{n+1}{2n+2m}G_{n+1}^{(m-\frac{1}{2})}(x), \end{cases}$$

چندجمله‌ایهای گِگِنبائر به صورت زیر نیز تعریف می‌شوند

$$G_n^{(m-\frac{1}{2})}(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{-m}{n-k}\binom{n-k}{k}(2x)^{n-2k}. \qquad (۵.۱)$$

---

[۲] Ultraspherical

[۳] Symmetric Jacobi Polynomials:

$$P_k^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{\nu=0}^{k}\binom{k+\alpha}{k-\nu}\binom{k+\beta}{\nu}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{\nu}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{k-\nu}, \quad \alpha = \beta$$

[۴] Sturm-Liouville

[۵] Gegenbauer