دانشگاه پیام نور

مرکز مشهد

پایان نامه

برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض

گروه ریاضی

عنوان پایان نامه

زیر مدولهای اول و رادیکال روی حلقه جابجایی

آیدا واله نامقی

استاد راهنما:

جناب آقای دکتر سعید رجایی

استاد مشاور:

جناب آقای دکتر کاظم خشیارمنش

مهر ماه 1389

این دانش را آسان بدست نیاورده ام ...

آن را مرهون زحمات بی دریغ و بی شائبه اساتیدی هستم که ب دون چشمداشت ، دانش و تجربه خود را در اختیار طالبان علم قرار می دهند.

از جناب آقای دکتر سعید رجایی که راهنماییهای ایشان چراغ پر فروغ راهم بود تشکر و قدردانی می نمایم.

همسر عزیزم (جناب آقای منوچهر کیش حضرت) بجا و به موقع

میدانم که بخاطر همه خوبیها و همدلیهایت از تو تشکر کنم .

این مجلد را تقدیم می کنم به

پدر و مادر عزیزم که گرد ایام بر موها و چهره شان نشست تا شاهد

رشد و بالندگی ام باشند .

فهرست مطالب

مقدمه:

در تمام فصل های این پایان نامه حلقه ها با عنصر یکه هستند و همه ی مدول ها یکانی هستند. در این جا ، برای پرداختن به زیرمدولی که تجزیه ی اولیه کاهش یافته دارد همه ی شرایط کافی را فراهم می کنیم. عموماً رادیکال زیر مدول، اول نیست و رادیکال ، برابر اشتراک زیرمدول ها، مانند آن چه در ایده ال ها داشتیم نیست. در اینجا شرایط لازم برای نگهداری برخی خواص مدول ها بررسی می شود.این شرایط به بحث در مورد بعد، مدولهای متناهیاً تولید شده و طیف ایده ال اول داده شده، می پردازد. در حقیقت ما با در دست داشتن بعضی شرایط ، می توانیم اول بودن رادیکال یک زیر مدول را بررسی کنیم . به عنوان نمونه، می توانیم با در دست داشتن یک زیر مدول اولیه به طوری که ایده ال تولید شده توسط آن ، رادیکال ایده ال باشد، اول بودن خود زیر مدول را بررسی کنیم.

قضیه : اگر Q یک زیر مدول اولیه از هر R–مدول A باشد به طوری که $(Q:A)$ رادیکال ایده ال باشد ، آن گاه Q زیر مدول اول است.

هم چنین می توان با داشتن محدودیت هایی روی حلقه ی جابجایی R، به عنوان یک حوزه ی صحیح–یک بعدی، نوتری و یا شبه موضعی– برای یک زیر مدول اول ، شرایط اول بودن رادیکال آن را بررسی نماییم. هم چنین، ما اول بودن رادیکال یک زیر مدول را می توانیم در شرایطی بررسی کنیم که زیر مدول از نوع خاصی باشد ، برای ترغیب بیشترخواننده به این موضوع می توانیم قضیه زیر را داشته باشیم که در ادامه، اثبات آن را می آوریم.

قضیه: اگر R حلقه ی جابجایی با عنصر یکه و F ، R–مدول آزاد متناهیاً تولید شده باشد، برای هر زیر مدول از نوع $Q=qF$ ، که q ایده ال اولیه از R است، $radQ$ اول می باشد.

ما هم چنین بررسی می کنیم که آیا شرایطی که برای ایده ال ها در حلقه ها داشتیم برای مدول ها همچنان برقرار است یا خیر ؟ مثلا برای دو زیر مدول اول ، آیا اشتراک آن ها نیز این خاصیت را خواهد داشت ؟ که جواب، با در اختیار داشتن برخی شرایط، مثبت خواهد بود . در آخرین قضایای فصل اول، درباره این مطلب بیشتر خواهیم دانست.

تحقیق در مورد رادیکال یک زیر مدول، از اوایل سال ۱۹۸۰ در [1]شروع گردیده است . تعداد زیادی از ریاضی دانان سعی کردند مطالب بیشتری در مورد خواص مدول ها و ترکیباتشان مانند آن چه در ایده ال ها داریم به دست آورند.برای مثال با در دست داشتن یک ایده ال I از حلقه (جابجایی با عنصر یکه) R، تعریف زیر را داریم:

$$\sqrt{I} = \{r \in R \;\; | \;\; r^n \in I \quad for \;\; some \quad n \in Z^+\}$$

اکنون سوالی پیش می آید که آیا خواصی که برای ایده ال ها و رادیکال آن ها برقرار است برای مدول ها و زیر مدول ها نیز همان گونه است یا خیر ؟ آیا رادیکال اشتراک زیر مدول های اول N و L از R-مدول A، خواصی شبیه آن چه در ایده ال ها داشتیم را دارد؟ به عبارت دیگر آیا تساوی زیر برقرار است ؟

$$rad(N \cap L) = radN \cap radL$$

در فصل دوم، به بررسی این مورد می پردازیم.

در این جا، R حلقه ی جابجایی با عنصر یکه و M، R-مدول یکانی است. برای یک زیر مدول N از مدول M، ایده ال $(N : M)$ را مجموعه $\{r \in R : rM \subseteq N\}$ می گیریم . متشابهاً برای هر عنصر $s \in R$:

$$(N :_M s) = \{m \in M; \quad sm \in N\}$$

در فصل های پایانی در مورد مدول های تابی و موضعی سازی یک مدول وبررسی خواص این ها خواهیم پرداخت.

تعاریف و مفاهیم بنیادی:

در بخش اول این فصل به معرفی برخی مفاهیم و تعاریف اولیه می پردازیم.

تعریف ۱-۱: فرض کنید R یک حلقه ی جابجایی با عنصر یکه باشد و A مجموعه ای نا تهی. A را همراه عمل جمع $+: A\times A\to A$ و ضرب در اسکالر $\cdot: R\times A\to A$، R-مدول چپ گوییم اگر:

۱- $(A,+)$ گروهی آبلی باشد.

۲-به ازای هر دو عضو $x,y\in A$ و هر عضو $r\in R$، $r(x+y)=rx+ry$.

۳- به ازای هر عضو $x\in A$ و هر دو عضو $r,s\in R$، $(r+s)x=rx+sx$.

٤- به ازای هرعضو $x\in A$ وهر دو عضو $r,s\in R$، $(rs)x=r(sx)$.

٥- به ازای هر عضو $x\in A$، $1x=x$.

R-مدول راست به طور متشابه تعریف می گردد.

تعریف ۲-۱: اگر A، R - مدول و B زیرمجموعه ای ناتهی از A باشد ،گوییم B زیرمدول A است و می نویسیم $B\le A$،اگر B با همان اعمال جمع و ضرب اسکالر موجود در A، R - مدول باشد.

تعریف۳-۱: برای زیر مدول B از R-مدول A، مجموعه ی $\{r\in R | rA\subseteq B\}$ به صورت $(B:A)$ نوشته می شود که ایده ال پوچ ساز $\frac{A}{B}$ است، یعنی $(B:A)=ann(\frac{A}{B})$ زیرا :

$$\begin{aligned} ann(\frac{A}{B}) &= \{r \in R \mid \ r(\frac{A}{B}) = 0_{\frac{A}{B}} = B\} \\ &= \{r \in R \mid \ r(a+B) = B \quad \forall a \in A\} \\ &= \{r \in R \mid \ ra \in B \qquad \forall a \in A\} \\ &= \{r \in R \mid \ rA \subseteq B\} \\ &= (B:A) \end{aligned}$$

تعریف۴–۱: زیرمدول محض B از R–مدول A اول است هرگاه

$$ra \in B \quad \Rightarrow \quad a \in B \quad or \quad r \in (B:A)$$

تعریف۵–۱: : زیرمدول B از R–مدول A را زیر مدول رادیکالی (رادیکال زیر مدول) می نامیم اگر $radB = B$ باشد. رادیکال زیرمدول به صورت $radB$ نوشته می شود و اشتراک همه ی زیرمدول های اول از A شامل B می باشد.

تعریف۶–۱: B زیرمدول اولیه از R – مدول A است اگر

$$\forall r \in R, a \in A; \quad ra \in B, a \notin B \quad \Rightarrow \quad \exists n \in N \quad r^n A \subseteq B$$

یا به طور معادل

$$\forall r \in R, a \in A; \quad ra \in B \Rightarrow \quad r^n \in (B:A) \quad or \quad r \in \sqrt{(B:A)}$$

تعریف۷–۱: اگرحلقه ی R (نه لزوماً نوتری) تنها یک ایده ال ماکزیمال منحصر بفرد M داشته باشد ،آن را حلقه شبه موضعی می نامیم و به صورت (R,M) نشان می دهیم.

تعریف۸–۱: زیرمدول B از R–مدول A دارای تجزیه ی اولیه است هرگاه

$$B = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_n$$

که درآن Q_i ها زیرمدول های P_i – اولیه A هستند(یعنی $\sqrt{(Q_i : A)} = P_i$) که هیچ یک از Q_i ها شامل $Q_1 \cap \ldots \cap Q_{i-1} \cap Q_{i+1} \cap \ldots \cap Q_n$ نباشد و اگر ایده ال های اول P_i (یا $radQ_i$) مجزا باشند، گوییم تجزیه فوق کاهش یافته است.

تعریف۹–۱: اگر $B = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_n$ یک تجزیه ی اولیه مدول کاهش یافته باشد گوییم $radQ_i$ زیرمدول منفرد [1] از B است اگر $radQ_i$ می نیمال در مجموعه ی $\{radQ_1,..radQ_n\}$ باشد.

تعریف۱۰–۱ : هرگاه B یک زیر مدول از R – مدول A باشد،آن گاه زیر مدول اول P را می نیمال اول روی زیر مدول B گوییم هر گاه اگر P' زیرمدول اول دیگری از R –مدول A باشد به طوری که $B \subseteq P' \subseteq P$ ،آن گاه $P' = P$ است.

تعریف ۱۱–۱: اگر I, J دو ایده ال حلقه ی R باشند، آن ها را هم ماکزیمال گوییم اگر $I + J = R$.

تعریف ۱۲–۱: زیر مجموعه S از حلقه ی جابجایی R را مجموعه ی بسته ضربی گوییم هر گاه بسته، تحت ضرب باشد یعنی

$$\forall x, y \in S \Rightarrow \quad xy \in S$$

و $1 \in S$ ، $0 \notin S$.

تعریف ۱۳–۱: فرض کنید M ، R –مدول غیر صفر باشد. M را مدول ساده نامیم هرگاه $\{۰\}$ و M تنها زیر مدول های M باشند.

---

[1] -isolated prime submodules

تعریف ۱۴-۱: فرض کنید M، R-مدول باشد . زیر مجموعه X از M را مجموعه مولد برای M می نامیم اگر $M = RX$. اگر M، مجموعه ی مولد متناهی ای داشته باشد ، آن را متناهی مولد گوییم. (پس متناهی مولد بودن M معادل است با این که عضو هایی از M مثل $x_1,\cdots,x_n$ موجود باشند که $M = Rx_1+\cdots+Rx_n$). اگر M مجموعه ی مولد تک عضوی ای داشته باشد، آن را دوری می نامیم. (پس دوری بودن M معادل این است که عضوی از M مثل x موجود باشد به طوری که $M = Rx$).

تعریف ۱۵-۱: حوزه ی صحیح، عبارت است از حلقه ی تعویض پذیر R با این خاصیت اضافی که دارای مقسوم علیه صفر نیست . یعنی هرگاه به ازای عناصری چون $a,b\in R$، $ab=0$، آن گاه دست کم یکی از a و b باید صفر باشد.

تعریف ۱۶-۱: فرض کنیم R یک حلقه باشد ، I را ایده الی از R در نظر گیریم . U، R-مدول، M و N دو R-زیرمدول از U باشند. آن گاه مجموعه ی:

$$N:_M I=\{m\in M \quad | \quad I.m\subseteq N\}$$

یک R-زیرمدول از M (و از U) است. این را کلن(دو نقطه ی) مدول N با I در M می نامیم.

در این قسمت لمی را اثبات می کنیم که در تمام فصول این تحقیق همواره از آن استفاده می کنیم.

اگر B ماکزیمال، اول یا اولیه باشد به راحتی می توان نشان د اد که $(B:A)$ به ترتیب ماکزیمال،اول یا اولیه است.

لم: اگر N زیر مدول اول از M باشد، آن گاه

$P=(N:M)\in spec(R)$

اثبات:

گیریم $ab\in(N:M)$ و $a\notin(N:M)$، آن گاه $abM\subseteq N$، بنابراین برای هر $m\in M$،

$$(ab)m=(ba)m=b(am)\in N \qquad (*)$$

چون $a\notin(N:M)$، بنابراین $aM\not\subset N$، پس $s\in M$ موجود است ، به طوری که $as\notin N$. چون N اول است، از (*) داریم:

$$(ab)s=b(as)\in N \quad \Rightarrow b\in(N:M) \quad or \quad as\in N$$

چون $as\notin N$، بنابراین $b\in(N:M)$.

■

فصل اول – تجزیه ی اولیه و رادیکال یک زیر مدول

۱–۱ مقدمه

اگر q یک ایده ال اولیه از حلقه باشد می دانیم $\sqrt{q}$ یک ایده ال اول است،اما اگر Q یک زیرمدول اولیه باشد لزوماً نتیجه نمی دهد که $\sqrt{Q}$،زیرمدول اول است.به عنوان مثال $R=Z[x]$ و M یک R–مدول $R\oplus R$ و $N=R(2,x)+R(x,0)$ باشد،آن گاه N یک زیرمدول اولیه از M است به طوری که رادیکالش زیرمدول اول از M نیست.

در بخش ۲–۱ شروع به ساختن بعضی شرایط روی R و A می کنیم به طوری که برای هر زیرمدول اولیه Q، $radQ$ اول شود و در بخش ۳–۱ ایده ال تجزیه ی اولیه مدول کاهش یافته معرفی می گردد.

لم۱–۱ برخی حقایق اثبات شده ساده در مورد مدول های آزاد را جمع آوری کرده است:

لم ۱–۱: اگر F یک R–مدول آزاد باشد و $h,k,h_1,...,h_n$ ایده ال هایی از R، آن گاه:

i) h اولیه است $\Leftarrow$ hF اولیه است.

ii) h اول است $hF \Leftarrow$ اول است.

iii) $(hF:F)=h$.

iv) $hF\subseteq kF \quad \Leftarrow \quad h\subseteq k$.

v) $(h_1\cap h_2\cap...\cap h_n)F=h_1F\cap h_2F\cap...\cap h_nF$.

اثبات : نتیجه ٤–۱در [٤] .

■

لم ۲–۱: اگر Q یک زیرمدول اولیه از هر R–مدول A باشد به طوری که $(Q:A)$ رادیکال ایده ال باشد،آن گاه Q زیرمدول اول است.

اثبات:

فرض کنید $a \notin Q\,, ra \in Q$ چون Q زیرمدول اولیه است $r \in \sqrt{(Q:A)} = (Q:A)$ و داریم $rA \subseteq Q$، پس Q زیرمدول اول است.

■

اگر R حوزه ی صحیح باشد آن گاه $\{۰\}$ ایده ال اول است.بنابراین لم ۲–۱ نتیجه می دهد که اگر Q زیرمدول اولیه از A با $(Q:A) = 0$ باشد آن گاه Q یک زیرمدول اول است . بنابراین، هنگامی که سعی در اثبات اول بودن $radQ$ داریم، برای هر زیرمدول اولیه ی Q از یک مدول ، روی یک حوزه ی صحیح، کافی است فرض کنیم $(Q:A) \neq 0$.

۲–۱ رادیکال زیرمدول اولیه

قضیه ۳–۱: R حوزه ی صحیح یک بعدی و A یک R–مدول است .آن گاه برای هر زیرمدول اولیه Q از A، $radQ$ یک زیرمدول اول است.

اثبات:

فرض کنید ایده ال $(P:A)$ برای هر زیرمدول اول P شامل Q است. این ایده ا ل ها اول هستند و $Q \subseteq P$، نتیجه می دهد $(Q:A) \subseteq (P:A)$،زیرا

$$r \in R \quad \Rightarrow rA \subseteq Q \subseteq P \quad \Rightarrow rA \subseteq P \quad \Rightarrow r \in (P:A)$$

و این نتیجه می دهد $\sqrt{(Q:A)} \subseteq (P:A)$ برای همه P. برای هر یک از زیرمدول های اول P،ما زنجیری از ایده ال های $0 \subseteq \sqrt{(Q:A)} \subseteq (P:A)$ را می سازیم . چون $\dim R = 1$

است ،باید برای هر زیرمدول اول P شامل Q داشته باشیم $\sqrt{(Q:A)}=(P:A)$. از [7] قضیه ٦-٥ $\bigcap_{Q\subseteq P} P = radQ$ یک زیرمدول اول از A است.

■

نتیجه ٤-١: اگر R حوزه ی صحیح نوتری و F، R-مدول آزاد باشد به طوری که هر زیرمدول اول از F شامل تنها تعدادی متناهی زیرمدول اول باشد،آن گاه برای هر زیرمدول اولیه Q از F، $radQ$ اول است.

اثبات:

فرض کنید $0\subseteq p\subseteq p'$ یک زنجیر از ایده ال های اول در R باشد.اگر مشمولیت اخیر محض باشد ،آن گاه بنا به[3] قضیه ١٤٤ ، p' بهطور دقیق، شامل بی نهایت ایده ال اول می شود که با استفاده از لم ١-١ می توان نشان داد $p'F$ زیرمدول اول ، شامل تعداد نا متناهی زیرمدول اول است که متناقض با فرض متناهی بودن تعداد زیرمدول ه است.اکنون از قضیه ٣-١ می توان ادامه قضیه را با داشتن فرض یک بعدی بودن حوزه ی صحیح R دنبال کرد.

■

قضیه ٥-١: اگر (R,M) یک حلقه ی شبه موضعی و A یک R-مدول باشد آن گاه هر اشتراک از زیرمدول های ماکزیمال از A،اول است.

اثبات:

$\{M_i\}_{i\in I}$ را یک گردایه از زیر مدول های ماکزیمال A در نظر می گیریم . بنا به [7] هر $(M_i:A)$ یک ایده ال ماکزیمال از Rاست ونیز باید مساوی با M باشد . بنابراین $\bigcap_{i\in I} M_i$ ، بنابه[7]،قضیه ٦-٥ زیر مدول اول است.

■

نتیجه ۱-۶: اگر (R,M) حلقه ی شبه موضعی ، A هر R-مدول و B زیرمدولی از A باشد، به طوری که هر زیرمدول اول شامل B ماکزیمال است، آن گاه $radB$ اول است.

(زیرا $radB = \bigcap_{B\subseteq P} P = \bigcap_{B\subseteq M} M$ زیرمدولهای ماکزیمال همان اول ها هستند پ س $radB$ اول است.)

در این مورد ، در حقیقت $radB$ باید ماکزیمال باشد و نیز B مشمول در زیرمدول(اول)ماکزیمال منحصر بفرد باشد.

نتیجه ۱-۷: اگر (R,M) یک حلقه ی شبه موضعی و A، R-مدول باشد ،آن گاه هر زیرمدول اول از A ماکزیمال است اگر و تنها اگرهررادیکال زیرمدول از A ماکزیمال باشد.

اثبات:

فرض کنید هر زیرمدول اول از A ماکزیمال است و $radB$ یک رادیکال زیرمدول از A فرض شود.،آن گاه $radB = \bigcap_{B\subseteq P} P$ از قضیه ۱-۵ اول است.چون هر P ماکزیمال است. از فرض $radB$ ماکزیمال است.برعکس، از این که P زیرمدول اول باشد و $P = radP$ باشد ،دنبال می شود.

■

قضیه ۱-۸: اگر R حلقه ی جابجایی با عنصر یکه و F یک R-مدول آزاد متناهیاً تولید شده باشد،آن گاه برای هر زیرمدول Q از نوع $Q = qF$ که q ایده ال اولیه از R است، $radQ$ اول است.

اثبات:

از لم ۱-۱ (i)، $qF=Q$ زیرمدول اولیه است و $\sqrt{q}F$ زیرمدول اول است. نشان می دهیم $radQ=\sqrt{q}F$.

از [11] قضیه ٤-٤، $(radQ:F)=\sqrt{(Q:F)}$ از لم ۱-۱ (iii)، $(Q:F)=(qF:F)=q$، پس $\sqrt{(Q:F)}=\sqrt{q}$. اکنون داریم:

$$\sqrt{q}F=(radQ:F)F\subseteq radQ$$

(زیرا $rx\in(radQ:F)F$، آن گاه $r\in(radQ:F)$ و $x\in F$. پس $rF\subseteq radQ$ و $x\in F$ نتیجه می دهد $rx\in radQ$.)

به وضوح چون $\sqrt{q}F$ زیرمدول اول است و $Q=qF\subseteq\sqrt{q}F$. پس $radQ\subseteq\sqrt{q}F$. از این دو مورد نتیجه می شود $radQ=\sqrt{q}F$ و زیرمدول اول است.

■

توجه کنید اگر B هر زیرمدولی از R-مدول آزاد F به صورت $B=hF$ باشد، برای برخی ایده ال h از R. آن گاه $h=(B:F)$، زیرا

$$(B:F)F\subseteq B=hF \xrightarrow{1\text{-}1\quad(iv)} (B:F)\subseteq h$$

و همچنین واضح است $hF\subseteq B$ که یعنی $h\subseteq(B:F)$. پس $h=(B:F)$.

۱-۳ تجزیه ی اولیه مدول کاهش یافته

اولین لم این بخش خاصیتی از مدول را پیگیری می کند که مشابه آن را در حلقه ها تحت این قضیه داریم که : اگر q_2,q_1 ایده ال اولیه باشند آن گاه $q_1\cap q_2$ نیز ایده ال اولیه است.

لم ۹-۱: اگر A، R-مدول متناهیاً تولید شده و Q_1 و Q_2 زیرمدول های اولیه از A با $radQ_1=radQ_2$ باشد، آن گاه $Q_1\cap Q_2$ زیرمدول اولیه است.

اثبات:

چون Q_1 و Q_2 اولیه هستند،ایده ال های $\sqrt{(Q_1 : A)}$ و $\sqrt{(Q_2 : A)}$ اول هستند و از قضیه ٤-٤ [11]، داریم:

$$\sqrt{(Q_1 : A)} = (radQ_1 : A) = (radQ_2 : A) = \sqrt{(Q_2 : A)} = P$$

اگر این ایده ال را P بنامیم، آن گاه Q_1 و Q_2 هردو P–اولیه و همچنین [2]، $Q_1 \cap Q_2$ P– اولیه است.

■

عموما چون $rad(N \cap L) \neq radN \cap radL$ (مثال [5] را ببینید.) در لم ۹-۱ این لزوماً صحیح نیست که $rad(Q_1 \cap Q_2) = radQ_1 \cap radQ_2$.

$\{0\}$ زیرمدول می نیمال اول گاهی اوقات زیرمدول می نیمال اول از مدول A نامیده می شود.

لم ۱۰-۱: اگر B، یک زیرمدول از R–مدول A باشد،آن گاه $radB$،اشتراک می نیمال اول ها از B است.

اثبات:

P را زیرمدول اول از A با $B \subseteq P$ میگیریم . آن گاه P/B یک زیرمدول اول از A/B است. بعنوان تذکر در [7] بخش ٤، هر زیرمدول اول از A/B شامل یک می نیمال اول A/B

---

[2]–قضیه در جبر جابجایی: اگر Q_iها که $i \in N$ ، P–اولیه باشند آن گاه $\bigcap_{i \in N} Q_i$ ها P–اولیه است.

است، بنابراین برخی زیرمدول های اول P' از A وجود دارند به طوری که P'/B یک می نیمال اول است و $P'/B \subseteq P/B \leq A/B$.بنابراین $B \subseteq P' \subseteq P$.اگر P'' زیرمدول اول دیگری با $B \subseteq P'' \subseteq P'$ باشد، آن گاه در A/B باید داشته باشیم $P''/B = P'/B$ ، پس $P'' = P'$ در A .

بنابراین P' می نیمال اول از B است.

اگر

$\mathrm{A} = \{P \mid P \text{ is prime}, \quad B \subseteq P\}$ و $\mathrm{A}' = \{P' \mid P' \text{ is minimal prime of } B\}$ ،

به وضوح $\bigcap_{P \in \mathrm{A}} P = \bigcap_{P' \in \mathrm{A}'} P' = radB$.

■

قضیه ۱۱–۱: R را حلقه ی جابجایی با عنصر یکه و F را یک R–مدول آزاد متناهیاً تولید شده در نظر بگیرید.اگر $I = q_1 \cap q_2 \cap \ldots \cap q_n$ تجزیه ی اولیه کاهش یافته از ایده ال I باشد، آن گاه $IF = q_1F \cap q_2F \cap \ldots \cap q_nF$ یک تجزیه ی اولیه کاهش یافته از زیرمدول IF است.

اثبات:

فرض کنید $I = q_1 \cap q_2 \cap \ldots \cap q_n$ تجزیه ی اولیه کاهش یافته از I باشد . آن گاه $\bigcap_{i \neq j} q_j \not\subset q_i$،برای هر i و $\sqrt{q_i} \neq \sqrt{q_j}$ برای $i \neq j$. زیرمدول های q_iF اولیه هستند برای هر i.

از لم ۱–۱، (v)،

$$IF = (q_1 \cap q_2 \cap \ldots \cap q_n)F = q_1F \cap q_2F \cap \ldots \cap q_nF$$

اگر $\bigcap_{i\neq j} q_j F \subseteq q_i F$ برای برخی i آن گاه از لم ۱-۱، $(v),(iv)$، $\bigcap_{i\neq j} q_j \subseteq q_i$ و تناقض با فرض است. چون داریم $\sqrt{(q_i F : F)} = \sqrt{q_i}$ و $\sqrt{q_i} \neq \sqrt{q_j}$ برای $i \neq j$،این تجزیه کاهیده می شود.

از قضیه ۱-۸ و $radq_i F = \sqrt{q_i} F$،برای هر i، اول است و نیز چون $\sqrt{q_i} \neq \sqrt{q_j}$، $radq_i F \neq radq_j F$ برای $i \neq j$. بنابراین تجزیه ی اولیه از IF یک تجزیه ی اولیه کاهش یافته است.

■

قضیه ۱۲-۱: فرض کنید A یک R-مدول و B زیرمدول محض از A باشد . اگر B تجزیه ی اولیه کاهش یافته داشته باشد و $B = Q_1 \cap \ldots \cap Q_n$ باشد به طوری که همه ایده ال های اول شرکت پذیر با B منفرد هستند، آن گاه $(B : A) = (Q_1 : A) \cap \ldots \cap (Q_n : A)$ تجزیه ی اولیه کاهش یافته از ایده ال $(B : A)$ در R است.

اثبات:

به برهان خلف ، فرض کنیم چنین نباشد آن گاه فرض بر این باشد که ایده ال های $\sqrt{(Q_i : A)}$ متمایز هستند. برای برخی i باید داشته باشیم ، $\bigcap_{i\neq j} (Q_j : A) \subseteq (Q_i : A)$، آن گاه $\bigcap_{i\neq j} \sqrt{(Q_j : A)} \subseteq \sqrt{(Q_i : A)}$. چون $\sqrt{(Q_i : A)}$ ایده ال اول است که $\sqrt{(Q_j : A)} \subseteq \sqrt{(Q_i : A)}$ برای برخی $i \neq j$. بحث اخیر در تناقض با فرض ایده ال اول منفرد $\sqrt{(Q_i : A)}$ از B است.

■