دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

عنوان

# منظم پذیری آرنزی نگاشتهای دوخطی کراندار و توسعه اشتقاقها

ارائه شده جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

استاد راهنما

آقای دکتر حمیدرضا ابراهیمی ویشکی

استاد مشاور

خانم دکتر معصومه فشندی

نگارنده

سیده شکوهه مهدی پور

شهریور ۱۳۸۹

فهرست مطالب

مقدمه

آرنزدر[۳] نشان داد که یک نگاشت دوخطی مانند $f:X\times Y\rightarrow Z$ دو گسترش طبیعی عموما متفاوت $f^{***}$ و $f^{r***r}$ روی فضاهای نرمدار داردکه وقتی این گسترش ها برابر باشند $f$ منظم آرنز نامیده می شود.اگر عمل ضرب جبر باناخ $A$ دارای این ویژگی باشد خود $A$ منظم آرنز خوانده می شود .دراین پایان نامه در فصل اول قضاياي مقدماتي بيان مي شود ، در فصل دوم در بخش اول به نگاشت هاي دو خطي مي پردازيم و محكي براي منظم پذيري نگاشت هاي دوخطي كراندار ارائه مي شود نشان می دهیم $f$ منظم است اگر و تنها اگر $f^{****}(z^*, x^{**}) \subseteq Y^*$ اين مطلب تعميمي براي برخي از دست آوردهاي گذشته [۴،۷] در اين مورد خواهد بود. در بخش دوم محك ارائه شده را براي عمل هاي مدول يك $A$_مدول باناخ $X$ كه به اعمال مدولي روی $A^*$ تعميم خواهند يافت بكار مي بريم . در بخش سوم به مقاله

Z. Hu et al., On topological centre problems and SIN quantum groups, J. Funct. Anal. 257(2009),no.2,610-640

مي پردازيم. برای یک $A$ مدول باناخ مانند $X$ ویک اشتقاق $D : A \rightarrow X^*$ دوگان دوم $D^{**}: A^{**} \rightarrow X^{***}$ یک گسترش خطی $D$ است. در فصل سوم مسئله مورد نظر ما این است که تحت چه شرايطي $D^{**}: A^{**} \rightarrow X^{***}$ دوباره یک مشتق خواهد بود.ديلز و همكاران براي حالت خاص $X=A$ نشان دادند كه شرط لازم و كافي براي مشتق بودن $D^{**}$ این است که $D^{**} (A^{**}).A^{**} \subseteq A^*$ [۷]. تعمیم یافته هایی از حکم فوق در مقاله

S.Mohammadzadeh and H.R.E Vishki ,Arens regularity of module actions and the second dual of a derivation.Bull.Ausral.Math.Soc.77(2008),465-4

آمده است که نتايج را براي حالت عمومي $D: A\to X^*$ با اثباتي مستقيم بيان مي کند. اين قضيه برخي نتايج ديگر [۷،۵] را در حالت عمومي $D: A \to X^*$ تعميم مي دهد.

۱- قضایای مقدماتی

در این فصل به بیان قضایای مورد نیاز در فصول بعدی می پردازیم

۱-۱) قضیه : اگر A جبر نرم دار و I ایده آل بسته A باشد آنگاه مجموعه $\frac{A}{I}$ با جمع و ضرب اسکالر و ضرب زیر یک جبر است . برای هر $a,b\in A$ و $\lambda \in I$ تعریف می کنیم :

$(a+I)+(b+I)=(a+b)+I$

$\lambda(a+I)=(\lambda a)+I$

$(a+I)(b+I)=(ab)+I$

درصورتیکه A جبر نرم دار و I ایده آل بسته A باشد آنگاه $\frac{A}{I}$ با نرم $\|a + I\| = \inf \{\|a + b\|: b \in I\}$ یک جبر نرم دار است و چنانچه A باناخ باشد $\frac{A}{I}$ نیز تحت این نرم باناخ خواهد بود ( برای اثبات به مرجع [۵] مراجعه شود )

۱-۲ ) قضیه: اگر Y ,X دو فضای توپولوژیک و $f: X \to Y$ یک تابع باشد و $x \in X$ آنگاه f در x پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر تور $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ در X همگرا به $x\in X$ تور $\left(f(x_\alpha)\right)_{\alpha\in I}$ در Y به $f(x)\in Y$ همگرا باشد.

برهان: به مرجع [۱۲] صفحه ۱۲۰ مراجعه کنید.

۱-۳ )قضیه: فرض کنید X فضای توپولوژیک باشد و $A\subseteq X$ , $x \in X$ . در این صورت $x \in\overline{A}$ اگر و تنها اگر یک تور $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ در A موجود باشد بقسمی که $x_\alpha \to x$ .

برهان: به مرجع[۱۰] صفحه ۳۷۸ مراجعه کنید.

۱-۴) قضیه: اگر Y , X فضای برداری نرمدار و $T: X \to Y$ یک تبدیل خطی باشد شرایط زیر هم ارزند.

$T$(۱) پیوسته است.

$T$(۲) در $x=0$ پیوسته است.

(۳) عنصر $x_0 \in X$ موجود است که $T$ در $x_0$ پیوسته است.

(۴) مقدار ثابت$c>0$ موجود است به طوری که برای هر $x \in X$ , $\|T(x)\| \leq c\|T\|$ که در آن $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| \;:\; x \in X, \|x\| \leq 1\}$

به مرجع [۹] مراجعه شود.

۱-۵) قضیه آلاغلو: اگر $X$ فضای نرمدار باشد، آنگاه $B(X^*)$, $w^*$− فشرده است.

برهان: به مرجع[۵]۱-۳-۷ مراجعه کنید.

۱-۶) قضیه گلدشتاین: فرض کنید$X$ فضایی نرمدار باشد آنگاه $X^{**} = \overline{X}^{w^*}$ .

۱-۷)قضیه: اگر$X$ یک فضای باناخ باشد آنگاه شرایط زیر هم ارزند.

$X$(۱) انعکاسی است.

(۲) $X^*$ انعکاسی است.

(۳) توپولوژیهای $w^*$,$w$ روی$X^*$ بر هم منطبقند.

(۴) گوی واحد $X$ , $w$− فشرده است.

برهان: به مرجع[۵]۱.۴.۷ مراجعه کنید.

۱-۸) قضیه: اگر $X$, $Y$ فضاهایی باناخ باشند و $T \in B(X,Y)$ که در آن$B(X,Y)$ مجموعه همه عملگر های خطی پیوسته از $X$به $Y$ است.آنگاه گزاره های زیر هم ارزند.

$T$(۱) عملگری فشرده ضعیف است.

$T^*$(۲) عملگری فشرده ضعیف است.

$Y$(۳) $T^{**}(X^{**}) \subseteq Y$ که در آن $T^{**}$ عملگر الحاقی $T^*$ است.

(۴) عملگرد $T^*$ تحت $w^*$– توپولوژی $Y^*$ و $w$- توپولوژی $X^*$ پیوسته است.

برهان: برای (۱) ⇔ (۲) ⇔ (۳) ر.ک به [۵]۵-۱.VI و برای (۱) ⇔ (۴) ر.ک به [۱۳] ۷-۴VI.

۱-۹) قضیه: اگر $X$ فضایی نرمدار باشد آنگاه $X^*=(X^*, w^*)^*$ (به مرجع[۵] صفحه ۱۲۸ مراجعه کنید.)

۱-۱۰) قضیه: فرض کنید $X$, $Y$ فضاهایی نرمدار باشند و $T: X \to Y$ یک نگاشت خطی پیوسته باشد در این صورت نگاشت $T^*: Y^* \to X^*$ خطی، پیوسته و $w^* - w^*$ , $w$-$w$ – پیوسته است.

برهان: برای اثبات خطی و پیوسته بودن $T^*$ به مرجع[۵]مراجعه شود.

برای اثبات $w^*$-$w^*$– پیوسته بودن $T^*$ فرض می کنیم $(y_\alpha{}^*)_{\alpha\in I}$ یک تور در $Y^*$ همگرا به عنصر $y^* \in A^*$ تحت $w^*$– توپولوژی باشد یعنی $y_\alpha^* \xrightarrow{w^*} y^*$ . لذا برای هر $y \in Y$ $y_\alpha^*(y) \to y^*(y)$ نشان می دهیم $T^*(y_\alpha^*) \xrightarrow{w^*} T^*(y^*)$ .

$$T^*(y_\alpha^*) \xrightarrow{w^*} T^*(y^*) \iff T^*\left(y_\alpha^*(x)\right) \to T^*\left(y^*(x)\right) \quad (x \in X)$$

$$\iff \langle T^*(y_\alpha^*), x\rangle \to \alpha\, \langle T^*y^*, x\rangle \iff \langle y_\alpha^*, Tx\rangle \to \langle y^*, T\,x\rangle \quad (1)$$

اما $Tx \in Y$ بنابراین $y \in Y$ موجود است که $Tx=y$ .

لذا رابطه(۱) با استفاده از فرض بدست می آید و در نتیجه $T^*$ ,$w^*$- $w^*$– پیوسته است.

اکنون به اثبات w-w– پیوسته بودن $T^*$ می پردازیم.

فرض می کنیم $y_\alpha^* \xrightarrow{w^*} y^*$ . لذا برای هر $y^{**} \in Y^{**}$ و $y^{**}(y_\alpha^*) \to y^{**}(y^*)$ , . بنابراین کافی است نشان دهیم $T^*(y_\alpha^*) \xrightarrow{w} T^*(y^*)$ .

برای این منظور $\varphi \in X^{**}$ را در نظر می گیریم و ثابت می کنیم

$$\langle \varphi, T^*(y_\alpha^*)\rangle \to \langle \varphi, T^*(y^*)\rangle$$

از آنجا که $T^*: Y^* \to X^*,\ \varphi: X^* \to C$ خطی و پیوسته اند لذا $\varphi\, oT^* : Y^* \to C$

. در نتیجه بنا به فرض : $\varphi oT^* \in Y^{**}$ نیز خطی و پیوسته است. بنابراین

$$\varphi oT^*(y_\alpha^*) \to \varphi oT^*(y^*)$$

پس

$\langle \varphi, T^*(y_\alpha^*)\rangle \to \langle \varphi, T^*(y^*)\rangle$ و در نتیجه $T^*(y_\alpha^*) \xrightarrow{w} T^*(y^*)$ .

۱-۱۱) قضیه تجزیه کوهن:فرض کنید A یک جبر باناخ همراه با یک واحد تقریبی کراندار باشد.اگرX یکA-مدول باناخ باشد،آنگاه XA و AX زیر فضاهایی خطی و بسته از X هستند.

برهان:به مرجع [۸] مراجعه شود.

۱-۱۲) قضیه هان باخ : فرض کنیم $X$ یک فضای نرم دار و $M$ زیر فضای آن باشد . برای هر $f\in M^*$ ، $g \in X^*$ موجود است بطوریکه $g=f$ روی $M$ و $\|g\| = \|f\|$

اثبات:به مرجع[۱۱] مراجعه شود

۱-۱۳) قضیه: فرض کنیم $X$ یک فضای برداری و $X^*$ دوگان آن باشد در اینصورت $X^*$ نقاط $X$را جدا می کند یعنی برای هر $x_1, x_2 \in X$ ، $f \in X^*$ موجود است بطوری که

$f(x_1) \neq f(x_2)$

اثبات: به مرجع [۱۱] مراجعه کنید

۱-۱۴) قضیه : فرض کنیم $M$ زیر فضای بسته فضای باناخ $X$ باشد . اگر $m^* \in M^*$ و $x^*$ گسترش هان باخ $m^*$ باشد تعریف میکنیم $\sigma: M^* \to \frac{X^*}{M^\perp}$ ، $\sigma m^* = X^* + M^\perp$

در این صورت $\sigma$ یک ، یکریختی طولپا از $M^*$ به $\frac{X^*}{M^\perp}$ است .

اثبات:به مرجع [۱۱] مراجعه شود.

فصل دوم

# ضربهای آرنز

۲-۱- منظم پذیری آرنزی نگاشت های دوخطی:

در این بخش ابتدا دوگان یک نگاشت دو خطی و پیوسته را معرفی کرده و سپس نگاشت منظم آرنز را تعریف می کنیم و نهایتا محکی برای منظم پذیری آرنزی نگاشت های دو خطی کراندار ارائه می دهیم .

۲-۱-۱) تعریف: فرض کنید $X, Y, Z$ فضاهای نرمدار و $f : X\times Y\to Z$ یک نگاشت دو خطی و پیوسته باشد دراین صورت نگاشت $f^* : Z^* \times X \to Y^*$ که به صورت زیر تعریف می گردد را دوگان $f$ می نامیم .

$$\langle f^*(z^*,x),y\rangle = \langle z^*,f(x,y)\rangle \quad (z^*\in Z^*, x\in X, y \in Y)$$

همچنین نگاشت $f^{**}: Y^{**}\times Z^* \to X^*$ ، $f^{***}: X^{**}\times Y^{**} \to Z^{**}$ و $f^r : Y \times X \to Z$ به صورت :

$$\langle f^{**}(y^{**},z^*),x\rangle = \langle y^{**},f^*(z^*,x)\rangle \quad (y^{**}\in Y^{**}, z^*\in Z^*, x \in X)$$

$$\langle f^{***}(x^{**},y^{**}),z^*\rangle = \langle x^{**},f^{**}(y^{**},z^*)\rangle \quad (x^{**}\in X^{**}, y^{**}\in Y^{**}, z^*\in Z^*)$$

$$\langle f^r(y,x),z\rangle = \langle f($$

تعریف می شود .

۲-۱-۲) قضیه: طبق تعاریف فوق نگاشت $f^*$ , دوخطی و پیوسته است و همچنین نگاشت $f_x^*: Z^* \to Y^*$ با ضابطه

$$\langle f_x^*(z^*),y\rangle = \langle f^*(z^*,x)y\rangle = \langle z^*,f(x,y)\rangle$$

$w^* - w^*$ پیوسته است .

برهان :

$$\|f^*\| = \sup\{\|f^*(z^*, x)\| \mid \|z^*\| \leq 1,\ \|x\| \leq 1\}$$

$$= \sup\{ |\langle f^*(z^*, x), y\rangle| \mid \|z^*\| \leq 1,\ \|x\| \leq 1 , \|y\| \leq 1 \}$$

$$= \sup\{ |\langle z^*, f(x, y)\rangle| \mid \|z^*\| \leq 1,\ \|x\| \leq 1 , \|y\| \leq 1 \}$$

$$= \sup\{\|f(x,y)\| \mid \|x\| \leq 1 , \|y\| \leq 1 \} = \|f\|$$

فرض کنیم $z_2^*, z_1^* \in Z^*$ ، $x_2 \in X$ و $x_1$ و $\alpha$ اسکالر باشد. داریم

$$\langle f^*(\alpha z_1^* + z_2^*, x), y\rangle = \langle \alpha z_1^* + z_2^*, f(x, y)\rangle$$

$$= \alpha\langle z_1^*, f(x, y)\rangle + \langle z_2^*, f(x, y)\rangle$$

$$= \alpha\langle f^*(z_1^*, x), y\rangle + \langle f^*(z_2^*, x), y\rangle$$

بنابراین

$$f^*(\alpha z_1^* + z_2^*, x) = \alpha f^*(z_1^*,) + f^*(z_2^*)$$

$$\langle f^*(z^*, \alpha x_1 + x_2), y\rangle = \langle z^*, f\big(\alpha x_1 + x_2\big), y\rangle$$

$$= \langle z^*, \alpha f(x_1, y) + f(x_2, y)\rangle$$

$$= \alpha\langle z^*, f(x_1, y)\rangle + \langle z^*, f(x_2, y)\rangle$$

$= \alpha\langle f^*(z^*, x_1), y\rangle + \langle f^*(z^*, x_2), y\rangle$

$\Rightarrow f^*(z^*, \alpha x_1 + x_2) = \alpha f^*(z^*, x_1) + f^*(z^*, x_2)$

برای اثبات $w^*$- $w^*$ پیوسته بودن نگاشت $f_x^* : Z^* \to Y^*$ فرض میکنیم $(z_\alpha^*)$ توری در $Z^*$ باشد و $z_\alpha^* \xrightarrow{w^*} z^*$ . ثابت میکنیم

$$f^*(z_\alpha^*, x) \xrightarrow{w^*} f^*(z^*, x)$$

داریم :

$$f^*(z_\alpha^*, x) \xrightarrow{w^*} f^*(z^*, x) \Leftrightarrow \langle f^*(z_\alpha^*, x), y\rangle \to \langle f^*(z^*, x), y\rangle \ \ (y \in Y)$$

$$\Leftrightarrow \langle z_\alpha^*, f(x, y)\rangle \to \langle z^*, f(x, y)\rangle$$

طبق فرض رابطه ای آخر برقرار است در نتیجه $f_x^*$ ، $w^*$- $w^*$ - پیوسته است .

۲-۱-۳) قضیه:فرض کنیم f یک نگاشت دوخطی پیوسته باشد.نگاشت $f^{***}$ تنها گسترش f است بطوریکه برای هر $y^{**} \in Y^{**}$ ، $f^{***}(., y^{**})$ ،و برای هر $x \in X$ ، $f^{***}(x, .)$ ، $w^*$-پیوسته اند .

برهان : فرض کنیم $\{x_\alpha\}$ و $\{y_\beta\}$ تورهایی در X و Y باشند بطوریکه:

$$x_\alpha \xrightarrow{w^*} x^{**}, y_\beta \xrightarrow{w^*} y^{**}$$

$$\langle f^{***}(x^{**}, y^{**}), z^*\rangle = \langle x^{**}, f^{**}(y^{**}, z^*)\rangle$$

$$\lim_{\alpha}\langle x_{\alpha}, f^{**}(y^{**}, z^{*})\rangle = \lim_{\alpha}\langle f^{***}(x_{\alpha}, y^{**}), z^{*}\rangle$$

$$\Rightarrow f^{***}(x_{\alpha}, y^{**}) \xrightarrow{w^{*}} f^{***}(x^{**}, y^{**})$$

در نتیجه $f^{***}(.\,, y^{**})$ ، $w^{*}$- پیوسته است .

$$\langle f^{***}(x, y^{**}), z^{*}\rangle = \langle x, f^{**}(y^{**}, z^{*})\rangle$$

$$\langle f^{**}(y^{**}, z^{*}), x\rangle = \langle y^{**}, f^{*}(z^{*}, x)\rangle$$

$$= \lim_{\beta}\ \langle y_{\beta}, f^{*}(z^{*}, x)\rangle = \lim_{\beta}\langle f^{**}\big(y_{\beta}, z^{*}\big), x\rangle$$

$$= \lim_{\beta}\langle f^{***}(x\,, y_{\beta}), z^{*}\rangle$$

$$\Rightarrow f^{***}(x\,, y_{\beta}) \xrightarrow{w^{*}} f^{***}(x, y^{**})$$

برای اثبات یکتایی نشان می دهیم:

$$f^{***}(x^{**}, y^{**}) = w^{*} - \lim_{\alpha}\lim_{\beta} f\big(x_{\alpha}, y_{\beta}\big)$$

$$= \langle f^{***}(x^{**}, y^{**}), z^{*}\rangle = \langle x^{**}, f^{**}(y^{**}, z^{*})\rangle$$

$$= \lim_{\alpha}\langle x_{\alpha}, f^{**}(y^{**}, z^{*})\rangle = \lim_{\alpha}\langle y^{**}, f^{*}(z^{*}, x_{\alpha})\rangle$$

$$= \lim_{\alpha}\lim_{\beta}\langle y_{\beta}, f^{*}(z^{*}, x_{\alpha})\rangle$$

$$= \lim_{\alpha}\lim_{\beta}\langle z^{*}, f(x_{\alpha}, y_{\beta})\rangle$$

$$= \lim_{\alpha}\lim_{\beta}\langle f(x_{\alpha}, y_{\beta}), z^{*}\rangle$$

۲-۱-۴) قضیه: نگاشت $f^{r***r}: X^{**} \times Y^{**} \to Z^{**}$ تنها گسترش از $f$ است بطوریکه $f^{r***r}(x^{**},.)$ برای هر $x^{**} \in X^{**}$ و $f^{r***r}(.,y)$ برای هر $y \in Y$ ، $w^{*}$-پیوسته است بعلاوه: $f^{r***r}(x^{**}, y^{**}) = w^{*} - \lim_{\alpha}\lim_{\beta} f(x_{\alpha}, y_{\beta})$

برهان مشابه قضیه ۲-۱-۳

۲-۱-۵) تعریف : اگر $f : X \times Y \to Z$ نگاشتی دوخطی و پیوسته و X و Y و Z فضاهای نرمدارباشند آنگاه نگاشت f را منظم آرنز نامیم هرگاه $f^{***} = f^{r***r}$ .

۲-۱-۶ ) قضیه: برای نگاشت دوخطی پیوسته $f : X \times Y \to Z$ گزاره های زیر معادلند

۱) f منظم است.

۲) $f^{r*****r} = f^{****}$.

۳) $f^{****}(Z^{*}, X^{**}) \subseteq Y^{*}$.

۴) نگاشت خطی $x \to f^{*}(z^{*}, x) : X \to Y^{*}$ برای هر $z^{*} \in Z^{*}$ فشرده ضعیف است .

برهان:

فرض کنیم $x^{**} \in X^{**}$ ، $y^{**} \in Y^{**}$ ، $z^{***} \in Z^{***}$ و $z^{*} \in Z^{*}$ دلخواه باشد اگر (۱) برقرار باشد داریم

$$\langle f^{****}(z^{***}, x^{**}), y^{**}\rangle = \langle z^{***}, f^{***}(x^{**}, y^{**})\rangle$$

$$= \langle z^{***}, f^{r***r}(x^{**}, y^{**})\rangle$$

$= \langle z^{***}, f^{r***}(y^{**}, x^{**}) \rangle$

$= \langle x^{**}, f^{r****}(z^{***}, y^{**}) \rangle$

$= \langle f^{r*****}(x^{**}, z^{***}), y^{**} \rangle$

بنابراین $f^{r*****r} = f^{****}$ .

برای اثبات(۳) ← (۲) داریم

$f^{****}(z^*, x^{**}) = f^{r*****}(x^{**}, z^*) = f^{r*****}|_{x^{**} \times z^*}(x^{**}, z^*) = f^{r**}(x^{**}, z^*) \in Y$

تساوی آخر با توجه به ۲-۱-۳ برقرار است.

معادل بودن (۳) و(۴) بدیهی است . درحقیقت اگر $f^*(z^*,.)$ را با L نشان دهیم داریم

$\langle L^*(y^{**}), x \rangle = \langle y^{**}, L(x) \rangle = \langle y^{**}, f^*(z^*, x) \rangle = \langle f^{**}(y^{**}, z^*), x \rangle$

$\Rightarrow L^* = f^{**}(., z^*)$

$\langle L^{**}(x^{**}), y^{**} \rangle = \langle x^{**}, L^*(y^{**}) \rangle = \langle x^{**}, f^{**}(y^{**}, z^*) \rangle = \langle f^{***}(x^{**}, y^{**}), z^* \rangle$

$= \langle f^{****}(z^*, x^{**}), y^{**} \rangle \Rightarrow L^{**} = f^{****}(z^*, .)$

حال نتیجه از این حقیقت بدست می آید که L فشرده ضعیف است، اگرو فقط اگر

$L^{**}(X^{**}) \subseteq Y^*$

برای (۱) ← (۳) فرض کنیم $f^{****}(Z^*, X^{**}) \subseteq Y^*$ و $\{x_\alpha\}$ و $\{y_\beta\}$ دو تور در X و Y باشند که به $x^{**}$ و $y^{**}$ ، *w-همگرایند دراینصورت

$$\langle f^{***}(x^{**},y^{**}),z^{*}\rangle = \langle f^{****}(z^{*},x^{**}),y^{**}\rangle$$

$$= \lim_{\beta} \ \langle f^{****}(z^{*},x^{**}),y_{\beta}\rangle = \lim_{\beta} \ \langle f^{***}\big(x^{**},y_{\beta}\big),z^{*}\rangle$$

$$= \lim_{\beta} \ \langle x^{**},f^{**}(y_{\beta},z^{*})\rangle = \lim_{\beta}\lim_{\alpha}\langle f^{**}\big(y_{\beta},z^{*}\big),x_{\alpha}\rangle$$

$$= \lim_{\beta}\lim_{\alpha}\langle y_{\beta},f^{*}(z^{*},x_{\alpha})\rangle = \lim_{\beta}\lim_{\alpha}\langle z^{*},f(x_{\alpha},y_{\beta})\rangle = \langle f^{r***r}(x^{**},y^{**}),z^{*}\rangle$$

در نتیجه $f$ منظم و برهان کامل است .

۲-۱-۷) نتیجه:فرض کنیم $X$ و $Y$ و $Z$ فضاهای نرمدار باشند. برای نگاشت دوخطی پیوسته

$f:X\times Y\to Z$ گزاره های زیر معادلند

(۱)$f$ و $f^{r*}$ منظم اند .

(۲)$f^{***r*r} = f^{r*r***}$

(۳)$f^{****}(Z^{*},X^{**}) \subseteq Y^{*}$

برهان :(۲) ← (۱)

چون $f$ منظم است پس $f^{r***r} = f^{***}$ در نتیجه $f^{***r} = f^{r***}$ همچنین از منظم بودن $f^{r*}$ نتیجه میگیریم $f^{r*r***r} = f^{r****}$ درنتیجه $f^{r*r***} = f^{r****r}$

$$\Rightarrow f^{***r*r} = f^{r*r***}$$

اگر (۲) برقرار باشد، داریم $f^{r*r**} = f^{****}$ . درواقع برای هر $x^{**}\in X^{**}$ و $y^{**}\in Y^{**}$

و $z^{***}\in Z^{***}$

$$\langle f^{****}(z^{***}, x^{**}), y^{**} \rangle = \langle z^{***}, f^{***}(x^{**}, y^{**}) \rangle$$

$$\langle z^{***}, f^{***r}(y^{**}, x^{**}) \rangle = \langle f^{***r*}(z^{***}, y^{**}), x^{**} \rangle$$

$$= \langle f^{***r*r}(y^{**}, z^{***}), x^{**} \rangle = \langle f^{r*r***}(y^{**}, z^{***}), x^{**} \rangle$$

$$= \langle y^{**}, f^{r*r**}(z^{***}, x^{**}) \rangle = \langle f^{r*r**}(z^{***}, x^{**}), y^{**} \rangle$$

چون $f^{r*r**}(z^{***}, x^{**})$ همواره در $Y^*$ قرار میگیرد (۳) بدست می آید .

برای اثبات (۱) $\rightarrow$ (۳)

چون $f^{****}(z^*, x^{**}) \subseteq f^{****}(z^{***}, x^{**}) \subseteq Y^*$ قضیه (۲-۱-۶) منظم بودن $f$ را نتیجه می دهد طبق قضیه ۲-۱-۶ داریم $f^{r*****} = f^{****r}$ بنابراین

$$(f^{r*})^{****}(x^{**}, z^{***}) = f^{r*****}(x^{**}, z^{***}) = f^{****}(z^{***}, x^{**}) \subseteq Y^*$$

منظم بودن $f^{r*}$ دوباره از قضیه (۲-۱-۶) نتیجه می شود .

۲-۱-۸ ) نتیجه : فرض کنید $X$ ، $Y$ ، $Z$ و $W$ فضاهای نرمدارباشند .

اگر $f : X \times Y \rightarrow Z$ $g : X \times W \rightarrow Z$ نگاشتهای پیوسته دوخطی و $h : Y \rightarrow W$ یک نگاشت خطی پیوسته باشد بطوریکه برای هر $x \in X$ و $y \in Y$ ، $f(x,y) = g\big(x, h(y)\big)$. اگر $h$ فشرده ضعیف باشد آنگاه $f$ و $f^{r*}$ منظم هستند .

برهان : با استفاده از تساوی $f(x,y) = g\big(x, h(y)\big)$ داریم .

$$\langle f^*(z^*, x), y \rangle = \langle z^*, f(x,y) \rangle$$

$$= \langle z^*, g\big(x, h(y)\big) \rangle = \langle g^*(z^*, x), h(y) \rangle$$

$$= \langle h^*(g^*(z^*,x)),y\rangle \Rightarrow f^* = h^* o g^*$$

$$\langle f^{**}(y^{**},z^*),x\rangle = \langle y^{**}, f^*(z^*,x)\rangle$$

$$= \langle y^{**}, h^* o g^*(z^*,x)\rangle = \langle h^{**}(y^{**}), g^*(z^*,x)\rangle$$

$$= \langle g^{**}(h^{**}(y^{**}),z^*),x\rangle \Rightarrow f^{**} = g^{**} o\, h^{**}$$

$$\langle f^{***}(x^{**},y^{**}),z^*\rangle = \langle x^{**}, f^{**}(y^{**},z^*)\rangle$$

$$\langle x^{**}, g^{**}(h^{**}(y^{**}),z^*)\rangle = \langle g^{***}(x^{**},h^{**}(y^{**})),z^*\rangle$$

$$\Rightarrow f^{***} = g^{***} o h^{**}$$

$$\langle f^{****}(z^{***},x^{**}),y^{**}\rangle = \langle z^{***}, f^{***}(x^{**},y^{**})\rangle$$

$$\langle z^{***}, g^{***}(x^{**},h^{**}(y^{**}))\rangle = \langle g^{****}(z^{***},x^{**}), h^{**}(y^{**})\rangle$$

$$\langle h^{***}(g^{****}(z^{***},x^{**})),y^{**}\rangle \Rightarrow f^{****} = h^{***} o g^{****}$$

طبق ۱ـ ۸ ، فشردگی ضعیف $h$ ، فشردگی ضعیف $h^*$ را نتیجه میدهد پس

$$h^{***}(w^{***}) \subseteq Y^*$$

بنابراین :

$$f^{****}(Z^{***},X^{**}) = h^{***}(g^{****}(Z^{***}),X^{**}) \subseteq h^{***}(W^{***}) \subseteq Y^*$$

حال طبق نتیجه (۲-۱-۷) منظم بودن $f$ و $f^{r*}$ بدست می آید .

## ۲-۲ منظم پذیری اعمال مدولی

در این بخش برای $A^{**}$ یعنی دوگان دوم جبر باناخ $A$ دو ضرب اول و دوم ارنز را تعریف میکنیم و ثابت میکنیم $A^{**}$ با اعمال فوق یک جبر باناخ است . سپس به بررسی منظم پذیری آرنزی اعمال مدولی می پردازیم.

میدانیم که اگر $A$ یک فضای برداری روی میدان $F$ باشد دوگان دوم ان یعنی $A^{**}$ با جمع نقطه ای و ضرب اسکالر زیر، یک فضای برداری است .

برای هر $m,n\in A^{**}$ و $\alpha \in F$ و برای هر $f \in A^*$ تعریف می کنیم .

$$\langle m+n, f\rangle = \langle m, f\rangle + \langle n, f\rangle$$

$$\langle \alpha m, f\rangle = \alpha\langle m, f\rangle$$

در صورتی که $A$ یک فضای نرمدار باشد $A^{**}$ با نرم زیر، یک فضای باناخ خواهد بود .

$$\|m\| = \sup\{|\langle m, f\rangle| : f \in A^*, \|f\| \le 1\} \quad (m \in A^{**})$$

که در آن $\|f\|$ بصورت زیر تعریف می شود

$$\|f\| = \sup\{|\langle f, a\rangle| : a \in A, \|a\| \le 1\}$$

۲-۲-۱) تعریف :فرض کنید $A$ یک جبر باناخ باشد و $a,b \in A$ و $f \in A^*$ و $m,n \in A^{**}$ عناصر $f \,\square\, a$ و $m \,\square\, f$ از $A^*$ و عنصر $m \,\square\, n$ از $A^{**}$ را بصورت زیر تعریف میکنیم

$$\langle f \,\square\, a, b\rangle = \langle f, ab\rangle \quad (b \in A)$$

$$\langle n \,\square\, f, a\rangle = \langle n, f \,\square\, a\rangle \quad (a \in A)$$

$$\langle m \,\square\, n, f\rangle = \langle m, n \,\square\, f\rangle \quad (f \in A^*)$$