بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهرکرد

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

گرایش آنالیز ریاضی

عنوان

نقطه‌های بهترین تقریب در فضاهای متریک

پژوهشگر

شکیبانوائی بروجنی

استاد راهنما

دکتر علیرضا امینی هرندی

استاد مشاور

دکتر حمید شایان پور

تیر ۱۳۹۲

این مجموعه را به پدر و مادر عزیزم،
آنان که از اولین دقایق زندگانی ام، گام به گام همراهم بودند تا در راه پر فراز و نشیب زندگی تنهانمانم
و حمایتم کردند تا بتوانم در راه کسب علم و دانش ثابت قدم باشم، تقدیم می کنم.

سپاس خدای را،

که شوق اموختن در گوهر وجود آدمی قرار داد و آن را با زینت تلاش و همت آراست.

خداوندا، تو را سپاس می گویم که در لحظه لحظه زندگیم نگاه کرم و مهربانانه ات را از بنده کوچکت دریغ نداشتی و مرا به داشتن پشتیبانی این چنین دلگرم ساختی تا در راه آموختن قدم بردارم.

از همه عزیزانی که در جهت به سرانجام رساندن این پایان نامه مرا یاری نمودند، قدردانی می نمایم. قدردانی و سپاس خود را از زحمات بی دریغ استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر علیرضا امینی هرندی و استاد مشاور گرامیم جناب آقای دکتر حمید شایان پور ابراز می نمایم و سپاس گذار حمایت ها و راهنمایی های بی دریغشان هستم. همچنین از استادان گرانقدر، سرکار خانم دکتر نها افتخاری و سرکار خانم دکتر مریم شمس که داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند، قدردانی می نمایم.

با آرزوی موفقیت برای تمام عزیزان

شکیبا نوائی

تیر ۱۳۹۲

چکیده

ما مفهوم نگاشت‌های انقباض میر-کیلر [۱] را معرفی نموده و قضیه وجود و یکتایی نقطه‌ی بهترین تقریب را برای چنین نگاشت‌هایی اثبات می‌کنیم. سپس رده‌ی نگاشت‌های φ-انقباض دوری، که گسترشی از نگاشت‌های انقباض دوری هستند، را معرفی نموده و قضیه وجود و یکتایی نقاط بهترین تقریب برای چنین نگاشت‌هایی را اثبات می‌کنیم. همچنین، پاسخی مثبت به سؤال الدرد [۲] و ویرامانی [۳] در خصوص نقاط بهترین تقریب فراهم می‌نماییم.

سپس، نگاشت‌های انقباضی پروکسیمال [۴] از نوع اول و دوم را تعریف کرده و به بررسی وجود نقاط بهترین تقریب برای چنین نگاشت‌هایی می‌پردازیم.

سرانجام، فضای متری ژئودزیک [۵] و خاصیت‌های UC، WUC، HWT و HW را معرفی می‌نماییم و وجود و یکتایی نقاط بهترین تقریب را برای چنین خاصیت‌هایی بررسی می‌کنیم.

نقطه‌ی بهترین تقریب و مفاهیم مربوط، نخستین بار توسط الدرد برای فضاهای به طور یکنواخت محدب مطالعه شد و پس از آن توسط سوزوکی [۶] برای رده‌ی کلی‌تری از توابع و فضاها مطالعه شد.

کلمات کلیدی : فضای متری، فضای باناخ، فضای متری اکیداً محدب، نقطه‌ی ثابت، نقطه‌ی بهترین تقریب، انقباض دوری، انقباض میر-کیلر دوری، نگاشت φ-انقباض دوری، انقباض پروکسیمال، انقباض دوری پروکسیمال، فضای ژئودزیک.

1. Meir-Keeler
2. Eldred
3. Veeramani
4. Proximal
5. Geodesic
6. Suzuki1

فهرست مطالب

مقدمه

نظریه‌ی نقطه ثابت، یکی از شاخه‌های میان رشته‌ای در ریاضیات است و به عنوان یک شاخه‌ی رشد یافته‌ی آنالیز غیرخطی در جهات مختلفی گسترش یافته است و دارای کاربردهای فراوانی در ریاضیات و سایر علوم می‌باشد.

موضوع این پایان‌نامه گسترشی از مفهوم نقطه ثابت می‌باشد و درحقیقت یک مسئله‌ی بهینه سازی است. برای نگاشت مفروض $T: A \to B$، که A و B زیرمجموعه‌هایی از فضای متری (X, d) هستند، هدف یافتن نقطه‌ی $x_\circ \in A$ است، به قسمی‌که

$$d(x_\circ, Tx_\circ) = d(A, B) = \inf_{x \in A,\ y \in B} d(x, y).$$

چنین $x_\circ$ ی را یک نقطه‌ی بهترین تقریب T می‌نامیم.

در سال ۲۰۰۶، الدرد [۱] و ویرامانی [۲] ، یک قضیه‌ی نقطه‌ی بهترین تقریب برای نگاشت‌های دوری به‌دست آوردند.

در سال ۲۰۰۸، دی باری [۳] و دیگران، مفهوم یک نگاشت انقباضی دوری میر-کیلر را معرفی نموده و وجود یک نقطه‌ی بهترین تقریب را برای چنین نگاشت‌هایی اثبات نمودند.

در سال ۲۰۰۹، التقفی [۴] و شهزاد [۵] ، رده‌ی جدیدی از نگاشت‌ها با نام نگاشت‌های φ-انقباض دوری، که گسترش نگاشت‌های دوری می‌باشند، را معرفی کرده و قضایای وجود و همگرایی نقاط بهترین تقریب را برای این رده از نگاشت‌ها اثبات نمودند.

این پایان‌نامه در پنج فصل تدوین شده است.

در فصل اول به بیان مفاهیم و تعاریف مقدماتی می‌پردازیم.

در فصل دوم ابتدا نگاشت‌های انقباض میر-کیلر [۶] را معرفی می‌نماییم و سپس قضیه‌ی وجود و یکتایی نقطه‌ی بهترین تقریب را برای چنین نگاشت‌هایی اثبات می‌کنیم.

در فصل سوم نگاشت‌های φ-انقباض دوری را بیان می‌کنیم و قضیه‌ی وجود و یکتایی نقاط بهترین تقریب برای چنین نگاشت‌هایی را بررسی می‌نماییم.

در فصل چهارم نگاشت‌های انقباضی پروکسیمال از نوع اول و دوم را تعریف می‌کنیم و نقاط بهترین

---

1. Eldred
2. Veeramani
3. Di Bari
4. Al - Thagafi
5. Shahzad
6. Keeler - Meier

تقریب را برای این‌گونه نگاشت‌ها بررسی می‌کنیم. در این فصل قضایای نقطه‌ی بهترین تقریبی را مطالعه می‌کنیم که ناخود نگاشت‌ها را نیز شامل می‌شوند.

در فصل پنجم فضای متری ژئودزیک و خاصیت‌های UC، WUC، HWT و HW را معرفی می‌نماییم و وجود و یکتایی نقاط بهترین تقریب را نیز برای چنین خاصیت‌هایی بررسی می‌کنیم.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ نقطه‌ی بهترین تقریب و مفاهیم وابسته

فرض کنیم (X, d) یک فضای متری، Aو B زیرمجموعه‌های ناتهی از X و $T : A \to B$ یک نگاشت باشد. اگر T دارای نقطه‌ی ثابت باشد؛ یعنی $x \in A$ ای وجود دارد که $x = Tx$، آن‌گاه $A \cap B \neq \emptyset$ و اما اگر $A \cap B = \emptyset$، آن‌گاه T نقطه‌ی ثابت ندارد. در این حالت، طبیعی است که به دنبال نقطه‌ای چون $x \in A$ باشیم، به طوری‌که $d(x, Tx)$ کمترین مقدار ممکن را داشته باشد، یعنی $d(x, Tx) = d(A, B)$. در این حالت، x را یک نقطه‌ی بهترین تقریب برای T گوئیم. بدیهی است که اگر A و B زیرمجموعه‌های ناتهی دلخواهی از X باشند که $d(A, B) = ۰$ و x یک نقطه‌ی بهترین تقریب باشد، آن‌گاه x یک نقطه‌ی ثابت T خواهد بود.

حال مفاهیم و تعاریف اولیه را بیان می‌کنیم:

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید A و B زیرمجموعه‌های ناتهی از فضای متری (X, d) و $T : A \cup B \to A \cup B$ یک نگاشت باشد، به طوری‌که $T(A) \subseteq B$ و $T(B) \subseteq A$. در این‌صورت:

نگاشت T انقباض دوری است، اگر $\alpha \in (۰, ۱)$ ی وجود داشته باشد به قسمی‌که برای هر $x \in A$ و $y \in B$،

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) + (۱ - \alpha) d(A, B),$$

که $d(A, B) = \inf\{d(x, y) \ / \ x \in A, \ y \in B\}$.

اگر $A = B$، آن‌گاه $d(A, B) = ۰$ و لذا $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$. اما $\alpha \in (۰, ۱)$، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$.

همچنین چون برای هر $x \in A$ و $y \in B$، $d(A,B) \le d(x,y)$، پس می‌توان نتیجه‌ی فوق را این گونه نیز بیان کرد:

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty) &\le \alpha d(x,y) + (1-\alpha) d(A,B) \\ &\le \alpha d(x,y) + (1-\alpha) d(x,y) \\ &= d(x,y). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow d(Tx,Ty) \le d(x,y).$$

حال برای زیرمجموعه‌های ناتهی A و B از X، مجموعه‌های A_0 و B_0 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_0 = \{x \in A / \ \exists\, y \in B : \ d(x,y) = d(A,B)\}.$$

$$B_0 = \{y \in B / \ \exists\, x \in A : \ d(x,y) = d(A,B)\}.$$

و اگر X یک فضای برداری باشد،

$$A - A = \{x - y : x,\ y \in A\}.$$

یک فضای باناخ X:

(۱) به طور یکنواخت محدب است، اگر تابع اکیداً صعودی $\delta : (0,2] \to [0,1]$ وجود داشته باشد به طوری‌که برای هر x، y و p در X، $R > 0$ و $r \in [0, 2R]$، اگر

$$\|x - p\| \le R,$$

$$\|y - p\| \le R,$$

$$\|x - y\| \ge r,$$

آن‌گاه:

$$\|\frac{x+y}{2} - p\| \le \left(1 - \delta(\frac{r}{R})\right) R.$$

(۲) اکیداً محدب است، اگر برای هر x، y و p در X و $R > 0$، اگر

$$\|x - p\| \le R,$$

$$\|y - p\| \le R,$$

$$x \ne y,$$

آن‌گاه؛

$$\|\frac{x+y}{2} - p\| < R.$$

قضیه ۲.۱.۱. ***(قضیه اشتراک کانتور):*** *در هر فضای متری تام، هر دنباله نزولی از مجموعه‌های بسته و کراندار که قطر آنها به سمت صفر میل کند، اشتراک آنها، فقط شامل یک نقطه است [۲۸].*

قضیه ۳.۱.۱. *فرض کنید A و B زیرمجموعه‌های ناتهی از فضای متری X باشند و همچنین فرض کنید $T : A \cup B \to A \cup B$ یک نگاشت انقباض دوری باشد. برای $x_۰$ در $A \cup B$ دنباله‌ی $\{x_n\}$ را به صورت $x_{n+۱} = Tx_n$ برای هر $n \geq ۰$، تعریف می‌کنیم. در این صورت $d(x_n, Tx_n) \to d(A, B)$.*

برهان. چون T انقباض دوری است، لذا $k \in (۰, ۱)$، وجود دارد به طوری‌که:

$$\begin{aligned}
d(x_n, Tx_n) = d(x_n, x_{n+۱}) &= d(Tx_{n-۱}, Tx_n) \\
&\leq kd(x_{n-۱}, x_n) + (۱ - k)d(A, B) \\
&= kd(Tx_{n-۲}, Tx_{n-۱}) + (۱ - k)d(A, B) \\
&\leq k(kd(x_{n-۱}, x_{n-۲}) + (۱ - k)d(A, B)) + (۱ - k)d(A, B) \\
&= k^۲ d(x_{n-۱}, x_{n-۲}) + (۱ - k^۲)d(A, B).
\end{aligned}$$

با استقراء خواهیم داشت:

$$d(x_n, x_{n+۱}) \leq k^n d(x_۱, x_۰) + (۱ - k^n)d(A, B).$$

و اما از طرفی

$$d(A, B) \leq d(x_n, x_{n+۱}),$$

پس

$$d(A, B) \leq d(x_n, x_{n+۱}) \leq k^n d(x_۱, x_۰) + (۱ - k^n)d(A, B).$$

حال با حد گرفتن از این عبارت وقتی $n \to \infty$ داریم:

$$d(x_n, x_{n+۱}) \to d(A, B).$$

□

قضیه ۴.۱.۱. *فرض کنید A و B زیرمجموعه‌های ناتهی بسته از فضای متری تام X باشند و همچنین $T : A \cup B \to A \cup B$ یک نگاشت انقباضی دوری باشد که $x_۰ \in A$، و دنباله‌ی $\{x_n\}$ را برای $n = ۰, ۱, \ldots$ به صورت $x_{n+۱} = Tx_n$ تعریف می‌کنیم. همچنین فرض کنید $\{x_{۲n}\}$ یک زیردنباله همگرا در A داشته باشد. در این صورت x ی در A وجود دارد به طوری‌که $d(x, Tx) = d(A, B)$.*

برهان. فرض کنید $\{x_{۲n_k}\}$ یک زیردنباله از $\{x_{۲n}\}$ همگرا به $x \in A$ باشد. اگر $x_۰ \in A$، پس $x_۱ = Tx_۰$ واز طرفی T نگاشتی انقباضی دوری است، لذا $T(A) \subseteq B$ است و بنابراین $x_۱ \in B$. به‌طور مشابه

$x_{2}=Tx_{1}\in A$. با ادامه این روند خواهیم داشت $\{x_{2n}\}\subseteq A$ و $\{x_{2n-1}\}\subseteq B$ و چون برای هر $x\in A$ و $y\in B$، $d(A,B)=\inf d(x,y)$ و با استفاده از نامساوی مثلثی، داریم:

$$d(A,B)\leq d(x,x_{2n_k-1})\leq d(x,x_{2n_k})+d(x_{2n_k},x_{2n_k-1}).$$

حال با حد گرفتن از عبارت فوق، چون فرض کردیم که $\{x_{2n_k}\}$ به $x\in A$ همگراست و طبق قضیه‌ی ۳.۱.۱ چون $d(x_{2n_k},x_{2n_k-1})\to d(A,B)$، پس نتیجه می‌شود که $d(x,x_{2n_k-1})$ به $d(A,B)$ همگرا می‌شود.

چون T نگاشت انقباضی دوری است، لذا $d(Tx_{2n_k-1},Tx)\leq d(x_{2n_k-1},x)$ است. پس نتیجه می‌گیریم که:

$$d(A,B)\leq d(x_{2n_k},Tx)=d(Tx_{2n_k-1},Tx)\leq d(x_{2n_k-1},x).$$

سپس نتیجه می‌شود که $\lim_{k\to\infty}d(x_{2n_k},Tx)=d(A,B)$. از طرفی طبق فرض، $\{x_{2n_k}\}$ به x همگراست، بنابراین $d(x_{2n_k},Tx)\to d(x,Tx)$ و اما چون حد یکتاست، پس

$$d(x,Tx)=d(A,B).$$

□

می توان این حکم را برای دنباله‌ی $\{x_{2n+1}\}$ نیز بیان و اثبات نمود:

قضیه ۵.۱.۱. *فرض کنیم تمام فرضیات در قضیه‌ی ۴.۱.۱، در این جا برقرار باشد. اگر $\{x_{2n+1}\}$ دارای زیردنباله همگرا در B باشد، آن‌گاه x ای در B وجود دارد به طوری‌که*

$$d(x,Tx)=d(A,B).$$

برهان. اثبات را این گونه ارائه می‌کنیم:

مشابه قضیه‌ی قبل فرض می‌کنیم $\{x_{2n_k+1}\}$ یک زیردنباله از $\{x_{2n+1}\}$ همگرا به $x\in B$ باشد. حال مانند اثبات قضیه‌ی قبل خواهیم داشت:

$$d(A,B)\leq d(x,x_{2n_k})\leq d(x,x_{2n_k+1})+d(x_{2n_k+1},x_{2n_k}).$$

چون $\{x_{2n_k+1}\}$ به x همگراست و $d(x_{2n_k+1},x_{2n_k})$ طبق قضیه‌ی ۳.۱.۱، به $d(A,B)$ همگراست، پس

$$d(x,x_{2n_k})\to d(A,B).$$

اما چون برای هر $x\in A$ و $y\in B$، $d(A,B)=\inf d(x,y)$ و T انقباض دوری است، لذا

$$d(A,B)\leq d(x_{2n_k+1},Tx)=d(Tx_{2n_k},Tx)\leq d(x_{2n_k},x).$$

پس

$$d(x,Tx) = \lim_{k\to\infty} d(x_{۲n_k+۱},Tx) = d(A,B),$$
$$\Longrightarrow d(x,Tx) = d(A,B).$$

□

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم M زیرمجموعه‌ای از فضای متری X باشد. قطر M به صورت

$$\mathrm{diam}M = \sup_{x,\ y\in M} d(x,y)$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنیم X فضای برداری نرمدار $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد. دوگان X (فضائی که شامل تمام نگاشت‌های خطی پیوسته بر X است) را با X^* نشان می‌دهیم. همچنین می‌توان X^{**} را دوگان دوگان X (دوگان X^*)در نظر بگیریم. تبدیل خطی پیوسته و یک به یک $J: X \to X^{**}$ را به صورت $J(x)(\varphi) = \varphi(x)$ برای هر x در X و φ در X^{**} تعریف می‌کنیم. حال اگر J پوشا باشد، فضای X بازتابی [1] نامیده می‌شود.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنیم X فضای برداری توپولوژی باشد. کوچکترین توپولوژی‌ای که اعضای X^* تحت این توپولوژی، پیوسته هستند را توپولوژی ضعیف می‌نامیم.

تعریف ۹.۱.۱. زیر مجموعه K از فضای متری X، ضعیف فشرده است اگر نسبت به توپولوژی ضعیف، فشرده باشد.

قضیه ۱۰.۱.۱. *فضای باناخ X، بازتابی است، اگر و تنها اگر گوی یکه بسته، ضعیف فشرده باشد* [۱۰].

تعریف ۱۱.۱.۱. یک فضای متری X، ضعیف فشرده دنباله‌ای است، اگر هر دنباله در آن فضا، دارای زیردنباله‌ی همگرای ضعیف باشد.

قضیه ۱۲.۱.۱. ***(ابرلین – اشمولین):*** [2] *فرض کنید X یک فضای باناخ و $K \subseteq X$، در این صورت K ضعیف فشرده است اگر و تنها اگر K ضعیف دنباله‌ای فشرده باشد* [۹].

تعریف ۱۳.۱.۱. نگاشت $T: X \to X$ انقباضی نامیده می‌شود، اگر به‌ازای هر x و y در X، $\alpha \in (۰,۱)$ وجود داشته باشد، به طوری‌که داشته باشیم:

$$d(Tx,Ty) \leq \alpha d(x,y).$$

تعریف ۱۴.۱.۱. نگاشت $T: X \to X$ کاهنده نامیده می‌شود، اگر به‌ازای هر x و y در X داشته باشیم:

$$d(Tx,Ty) \leq d(x,y).$$

1. reflexive
2. Eberlein - Smulian

قضیه ۱.۱.۱۵. (*اصل انقباضی باناخ*): *فرض کنید* (X, d) *یک فضای متری تام و نگاشت* $T : X \to X$ *یک انقباض باشد. در این صورت* T *دارای نقطه‌ی ثابت یکتا در* X *است و برای هر* $x \in X$ *، دنباله‌ی* $\{T^n x\}$ *به نقطه‌ی ثابت همگراست* [۱۰].

فصل ۲

نقطه‌ی بهترین تقریب برای نگاشت‌های انقباض میر-کیلر دوری

الدرد، کرک و ویرامانی در [۱۱] وجود نقطه‌ی بهترین تقریب برای نگاشت‌های کاهنده را اثبات نمودند.

هم‌چنین الدرد و ویرامانی در [۱۲]، قضیه‌ی وجودی زیر را اثبات کردند.

(قضیه‌ی ۱۰.۳ در [۱۲]). فرض کنید A و B زیرمجموعه‌های ناتهی بسته و محدب از فضای باناخ به طور یکنواخت محدب باشند و $T : A \cup B \to A \cup B$ انقباض دوری باشد.آن‌گاه یک نقطه‌ی بهترین تقریب یکتا در A وجود دارد. به علاوه، برای هر $x \in A$، $\{T^{2n}(x)\}$ به نقطه‌ی بهترین تقریب همگراست.

این فصل برگرفته شده از [۸] می‌باشد. در این فصل، انقباض‌های میر-کیلر دوری را معرفی و وجود نقطه‌ی بهترین تقریب برای چنین نگاشت‌هایی در فضاهای باناخ به طور یکنواخت محدب را بررسی می‌نمائیم.

۱.۲ انقباض میر-کیلر و مفاهیم وابسته

تعریف ۱.۱.۲. تابع φ از $[0,\infty)$ به $[0,\infty)$ یک L-تابعک نامیده می‌شود، اگر $\varphi(0) = 0$ و برای هر $s \in (0,\infty)$، یک $\delta > 0$ موجود باشد به طوری‌که برای هر $t \in [s, s+\delta]$، $\varphi(t) \le s$ و $\varphi(s) > 0$.

لم ۲.۱.۲. *فرض کنید Y مجموعه‌ی ناتهی و f و g توابعی از Y به $[0,\infty)$ باشند. در این صورت گزاره‌های زیر معادل هستند:*

(۱) *برای هر $\varepsilon > 0$، یک $\delta > 0$ موجود است به طوری‌که،*

$$x \in Y,\ f(x) < \varepsilon + \delta \implies g(x) < \varepsilon$$

(۲) L-تابعک خطی φ وجود دارد به طوری‌که

$$x \in Y,\ f(x) > 0 \implies g(x) < \varphi(f(x))$$

و همچنین

$$x \in Y,\ f(x) = 0 \implies g(x) = 0.$$

برای برهان لم و مطالعه‌ی بیشتر به [۲۳، ۳۶] مراجعه کنید.

لم ۳.۱.۲. *فرض کنید φ یک L-تابعک خطی و $\{s_n\}$ دنباله غیرصعودی از اعداد حقیقی نامنفی باشد و همچنین برای هر $n \in \mathbb{N}$ که $s_n > 0$، داشته باشیم $s_{n+1} < \varphi(s_n)$. در این صورت $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$.*

برهان. چون دنباله‌ی $\{s_n\}$ غیرصعودی (نزولی) و از پایین کراندار (نامنفی) است، لذا همگرا به یک عدد نامنفی مانند s است. نشان می‌دهیم $s = 0$. برای این کار از برهان خلف استفاده می‌کنیم و فرض می‌کنیم که $s > 0$. چون φ یک L-تابعک است، پس $\delta > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که برای همه‌ی $t \in [s, s+\delta]$، $\varphi(t) \le s$ باشد. می‌توان $\nu \in \mathbb{N}$ را طوری انتخاب کرد که $s_\nu \le s + \delta$ باشد. آن گاه چون φ یک L-تابعک است، پس $\varphi(s_\nu) \le s$ می‌باشد. از طرفی طبق فرض لم، $s_{\nu+1} < \varphi(s_\nu)$، پس $s_{\nu+1} < \varphi(s\nu) \le s$ و لذا $s_{\nu+1} < s$. که تناقض است؛ زیرا دنباله‌ی نزولی به اینفیمم مقدارش که s است، همگراست. بنابراین $s = 0$، یعنی $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$. $\square$

تعریف ۴.۱.۲. فرض کنید (X, d) یک فضای متری و A و B زیرمجموعه‌های ناتهی از X باشند. آن‌گاه نگاشت $T : A \cup B \to A \cup B$ یک انقباض میر-کیلر دوری نامیده می‌شود، اگر شرایط زیر برقرار باشند:

(۱) $T(A) \subset B$ و $T(B) \subset A$.

(۲) برای هر $\varepsilon > 0$ یک $\delta > 0$ موجود است، به طوری‌که برای هر $x \in A$ و $y \in B$ داشته باشیم:

$$d(x, y) < d(A, B) + \varepsilon + \delta \implies d(T(x), T(y)) < d(A, B) + \varepsilon.$$

قضیه ۵.۱.۲. *فرض کنید (X, d) و A و B مانند تعریف ۴.۱.۲ باشند و همچنین $T : A \cup B \to A \cup B$ نگاشت دوری باشد. آن‌گاه T انقباض میر-کیلر دوری است اگر و فقط اگر یک L-تابعک φ پیوسته و غیرنزولی، وجود داشته باشد به طوری‌که برای هر $x \in A$ و $y \in B$*

$$d(x, y) - d(A, B) > 0 \implies d(T(x), T(y)) - d(A, B) < \varphi(d(x, y) - d(A, B)) \qquad (۱.۲)$$

و

$$d(x, y) - d(A, B) = 0 \implies d(T(x), T(y)) - d(A, B) = 0. \qquad (۲.۲)$$

برهان. فرض کنیم T یک انقباض میر-کیلر دوری باشد، پس طبق تعریف برای هر $\varepsilon > 0$، یک $\delta > 0$ ای موجود است که:

$$d(x,y) < d(A,B) + \varepsilon + \delta \Longrightarrow d(T(x),T(y)) < d(A,B) + \varepsilon \ . \qquad (۳.۲)$$

اگر توابع f و g را به صورت زیر تعریف کنیم؛

$$f(x) = d(x,y) - d(A,B)$$

و

$$g(x) = d(T(x),T(y)) - d(A,B),$$

آن‌گاه طبق رابطه‌ی (۳.۲) نتیجه می‌شود که:

$$f(x) = d(x,y) - d(A,B) < \varepsilon + \delta \Longrightarrow g(x) = d(T(x),T(y)) - d(A,B) < \varepsilon$$

و با توجه به لم ۲.۱.۲، خواهیم داشت:

$$f(x) = d(x,y) - d(A,B) > 0 \Longrightarrow g(x) = d(T(x),T(y)) - d(A,B) < \varphi(d(x,y) - d(A,B))$$

و

$$f(x) = d(x,y) - d(A,B) = 0 \Longrightarrow g(x) = d(T(x),T(y)) - d(A,B) = 0.$$

و لذا برهان تمام است. $\square$

لم ۶.۱.۲. *فرض کنید (X,d) فضای متری، A و B زیرمجموعه‌های ناتهی از X باشند. همچنین فرض کنید نگاشت $T : A \cup B \to A \cup B$ انقباض میر-کیلر دوری و φ یک L-تابعک مشابه در قضیه‌ی ۵.۱.۲ باشد. در این صورت برای هر $(x,y) \in A \times B$ گزاره های زیر برقرار هستند:*

(۱) $d(T(x),T(y)) \leq d(x,y)$.

(۲) $d(T(x),T(y)) - d(A,B) \leq \varphi(d(x,y) - d(A,B))$.

برهان. برای اثبات قسمت (۱)، چون φ یک L-تابعک است، لذا طبق تعریف برای $t \in [s, s+\delta]$، $\varphi(t) \leq s$. پس می‌توان نتیجه گرفت که $\varphi(s) \leq s$. حال چون T انقباض میر-کیلر دوری است، با استفاده ازقضیه‌ی ۵.۱.۲، قسمت (۱.۲) می‌توان گفت:

$$\begin{aligned} d(x,y) > d(A,B) \Longrightarrow d(T(x),T(y)) &< \varphi(d(x,y) - d(A,B)) + d(A,B) \\ &\leq d(x,y) - d(A,B) + d(A,B) = d(x,y). \end{aligned}$$

سپس با استفاده از قسمت (۲.۲) قضیه ۵.۱.۲، نتیجه می‌شود که:

$$d(x,y) = d(A,B) \Longrightarrow d(T(x),T(y)) = d(A,B) = d(x,y) \Longrightarrow d(T(x),T(y)) = d(x,y).$$

حال قسمت (۲) را اثبات می‌کنیم. طبق فرض T انقباض دوری میر-کیلر است، پس با توجه به قضیه‌ی ۵.۱.۲، داریم:

$$d(x,y)-d(A,B)>\circ \Longrightarrow d(T(x),T(y))-d(A,B)\leq \varphi(d(x,y)-d(A,B)).$$

و از قسمت (۲.۲) قضیه‌ی ۵.۱.۲، اگر

$$d(x,y)=d(A,B)=d(T(x),T(y)),$$

آن‌گاه

$$\circ = d(T(x),T(y))-d(A,B)\leq \varphi(d(x,y)-d(A,B)),$$

$$\Longrightarrow \circ \leq \varphi(d(x,y)-d(A,B)).$$

و برهان تمام است. □

لم ۷.۱.۲. *اگر $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دنباله‌هایی در فضای به طور یکنواخت محدب X باشند، به طوری‌که*

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\lim_{n\to\infty}\|y_n\|=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{۲}\|x_n+y_n\|=۱$$

آن‌گاه $\lim_n\|x_n-y_n\|=\circ$.

برهان. برای اثبات از برهان خلف استفاده می‌کنیم و فرض می‌کنیم $\lim_n\|x_n-y_n\|\neq\circ$. پس $\varepsilon_\circ>\circ$ و زیردنباله‌های $\{x_{n_k}\}$ از $\{x_n\}$ و $\{y_{n_k}\}$ از $\{y_n\}$ وجود دارند، به قسمی‌که

$$\|x_{n_k}-y_{n_k}\|\geq\varepsilon_\circ.$$

بدون کاستن از کلیت، می‌توان پذیرفت که برای هر $n\in\mathbb{N}$،

$$\|x_n-y_n\|\geq\varepsilon_\circ$$

چون فضای X به طور یکنواخت محدب است، لذا δ وجود دارد به طوری‌که برای هر x و y در X که اگر $\|x\|\leq ۱$، $\|y\|\leq ۱$ و $\|x-y\|\geq\frac{\varepsilon_\circ}{۲}$، آن‌گاه؛

$$\left\|\frac{x+y}{۲}\right\|\leq ۱-\delta(\frac{\varepsilon_\circ}{۲})=۱-\delta_\circ.$$

حال اگر $۱-\delta_\circ<\lambda<۱$، $\lambda\varepsilon_\circ>\frac{\varepsilon_\circ}{۲}$، $x=\lambda x_n$ و $y=\lambda y_n$، آن‌گاه $\|\lambda x_n\|$ و $\|\lambda y_n\|$ به $\lambda<۱$ همگرا هستند و همچنین طبق فرض خلف

$$\|\lambda x_n-\lambda y_n\|\geq\lambda\varepsilon_\circ>\frac{\varepsilon_\circ}{۲}.$$

در نتیجه چون X به طور یکنواخت محدب است، طبق مباحث بالا می‌توان نتیجه گرفت که؛

$$\frac{\lambda\|x_n+y_n\|}{۲}=\left\|\frac{\lambda x_n+\lambda y_n}{۲}\right\|\leq ۱-\delta_\circ.$$

حال با حد گرفتن خواهیم داشت:

$$\lambda = \lim_n \frac{\lambda\|x_n + y_n\|}{۲} \leq ۱ - \delta_۰.$$

بنابراین، $۱ - \delta_۰ \leq \lambda$ که با $۱ - \delta_۰ < \lambda < ۱$ در تناقض است. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. □

لم ۸.۱.۲. *فرض کنید X فضای باناخ به طور یکنواخت محدب، A و B زیرمجموعه‌های ناتهی از X و A محدب باشد. دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ در A و دنباله‌ی $\{z_n\}$ در B را در نظر بگیرید، به طوری‌که $\lim_n \|x_n - z_n\| = d(A,B)$ و $\lim_n \|y_n - z_n\| = d(A,B)$. در این صورت $\lim_n \|x_n - y_n\| = ۰$.*

برهان. ابتدا فرض کنیم $d(A,B) = ۰$. با استفاده از نامساوی مثلثی داریم:

$$۰ \leq \|x_n - y_n\| \leq \|x_n - z_n\| + \|z_n - y_n\|$$

و از طرفی با استفاده از فرض لم

$$\lim_n \|x_n - z_n\| = \lim_n \|z_n - y_n\| = ۰,$$

پس

$$\lim_n \|x_n - y_n\| = ۰.$$

حال فرض کنیم $d(A,B) \neq ۰$. چون A محدب است و طبق فرض $\lim_n \|x_n - z_n\| = d(A,B)$ و $\lim_n \|y_n - z_n\| = d(A,B)$ است، پس داریم:

$$d(A,B) \leq \lim_{n\to\infty} \|\frac{x_n + y_n}{۲} - z_n\| \leq \lim_{n\to\infty} (\frac{۱}{۲}\|x_n - z_n\| + \frac{۱}{۲}\|y_n - z_n\|) = d(A,B),$$

و بنابراین

$$\lim_n \|(x_n - z_n) + (y_n - z_n)\| = ۲\lim_n \left\|\frac{x_n + y_n}{۲} - z_n\right\| = ۲d(A,B),$$

و می‌توان این‌گونه بیان کرد که

$$\lim_n \left\|\frac{(x_n - z_n) + (y_n - z_n)}{۲d(A,B)}\right\| = ۱.$$

چون طبق فرض $\lim_n \|x_n - z_n\| = d(A,B)$ و $\lim_n \|y_n - z_n\| = d(A,B)$، پس می‌توان نتیجه گرفت که $\lim_n \|\frac{x_n - z_n}{d(A,B)}\| = ۱$ و $\lim_n \|\frac{y_n - z_n}{d(A,B)}\| = ۱$. حال با استفاده از لم ۷.۱.۲، خواهیم داشت:

$$\lim_n \left\|\frac{(x_n - z_n) - (y_n - z_n)}{d(A,B)}\right\| = ۰ \Longrightarrow \lim_n \|x_n - y_n\| = ۰.$$

□