

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه هرمزگان

دانشکده فنی مهندسی

پایان نامه کارشناسی ارشد خاک و پی

عنوان پایان نامه:

انتشار امواج الاستیک در محیطهای ناهمگن و ناهمسانگرد استوانه ای

استاد راهنما:

دکتر شکرالهی زاده

دانشجو:

عاطفه نوحه گو شهواری

شماره دانشجویی:

۸۶۴۱۱۰۰۳۶

شماره صفحه	عنوان
۱	چکیده
۹ تا ۲	فصل اول : مقدمه و کلیات
۳	۱-۱ مقدمه
۶	۲-۱ مقایسه دو روش (EIM) و (SEIM)
۱۰ تا ۱۶	فصل دوم : بررسی انتشار موج SH در محیط های ایزوتروپ با ناهمگنی استوانه ای با استفاده از تعریف بسط تابع ویژه
۱۱	۱-۲ مقدمه
۱۲	۲-۲ محاسبه میدان جابه جایی موج منعکس شده
۱۳	۳-۲ استوانه الاستیک
۱۴	۴-۲ انرژی پراکنده شده
۱۷ تا ۶۷	فصل سوم : حل معادلات ناویه در مختصات استوانه ای
۱۸	۱-۳ مقدمه
۱۸	۲-۳ تعیین معادلات تعادل در مختصات استوانه ای برای ناحیه ی Ω و $D - \Omega$
۲۰	۳-۳ معادله ی ناویه در ناحیه ی Ω
۲۳	۴-۳ معادله ی ناویه در ناحیه ی $D - \Omega$
۲۳	۵-۳ حل معادله ی ناویه با فرض $\tilde{\epsilon}_{rz}^* = \exp(-i\omega t)$ ، $\tilde{\epsilon}_{\theta z}^* = 0$ و $\tilde{g}_z^* = 0$
۲۸	۶-۳ حل معادله ی ناویه با فرض $\tilde{\epsilon}_{\theta z}^* = \exp(-i\omega t)$ ، $\tilde{\epsilon}_{rz}^* = 0$ و $\tilde{g}_z^* = 0$
۳۰	۷-۳ حل معادله ی ناویه با فرض $\tilde{g}_z^* = \exp(-i\omega t)$ ، $\tilde{\epsilon}_{\theta z}^* = 0$ و $\tilde{\epsilon}_{rz}^* = 0$
۳۲	۸-۳ حل معادله ی ناویه با فرض $\tilde{\epsilon}_{rz}^* = \exp(i\theta) \exp(-i\omega t)$ ، $\tilde{\epsilon}_{\theta z}^* = 0$ و $\tilde{g}_z^* = 0$
۳۵	۹-۳ حل معادله ی ناویه با فرض $\tilde{\epsilon}_{\theta z}^* = \exp(i\theta) \exp(-i\omega t)$ ، $\tilde{\epsilon}_{rz}^* = 0$ و $\tilde{g}_z^* = 0$
۳۸	۱۰-۳ حل معادله ی ناویه با فرض $\tilde{g}_z^* = \exp(i\theta) \exp(-i\omega t)$ ، $\tilde{\epsilon}_{\theta z}^* = 0$ و $\tilde{\epsilon}_{rz}^* = 0$

- ۴۱ $\tilde{g}_z^* = 0$ و $\tilde{\epsilon}_{\theta z}^* = 0$ ، $\tilde{\epsilon}_{rz}^* = \exp(-i\theta) \exp(-i\omega t)$ حل معادله ی ناویه با فرض ۱۱-۳
- ۴۶ $\tilde{g}_z^* = 0$ و $\tilde{\epsilon}_{rz}^* = 0$ ، $\tilde{\epsilon}_{\theta z}^* = \exp(-i\theta) \exp(-i\omega t)$ حل معادله ی ناویه با فرض ۱۲-۳
- ۴۹ $\tilde{\epsilon}_{rz}^* = 0$ و $\tilde{\epsilon}_{\theta z}^* = 0$ ، $\tilde{g}_z^* = \exp(-i\theta) \exp(-i\omega t)$ حل معادله ی ناویه با فرض ۱۳-۳
- ۵۳ $\tilde{g}_z^* = 0$ و $\tilde{\epsilon}_{\theta z}^* = 0$ ، $\tilde{\epsilon}_{rz}^* = \exp(in\theta) \exp(-i\omega t)$ حل معادله ی ناویه با فرض ۱۴-۳
- ۵۶ $\tilde{g}_z^* = 0$ و $\tilde{\epsilon}_{\theta z}^* = 0$ ، $\tilde{\epsilon}_{rz}^* = \exp(-in\theta) \exp(-i\omega t)$ حل معادله ی ناویه با فرض ۱۵-۳
- ۶۰ $\tilde{g}_z^* = 0$ و $\tilde{\epsilon}_{rz}^* = 0$ ، $\tilde{\epsilon}_{\theta z}^* = \exp(in\theta) \exp(-i\omega t)$ حل معادله ی ناویه با فرض ۱۶-۳
- ۶۳ $\tilde{g}_z^* = 0$ و $\tilde{\epsilon}_{rz}^* = 0$ ، $\tilde{\epsilon}_{\theta z}^* = \exp(-in\theta) \exp(-i\omega t)$ حل معادله ی ناویه با فرض ۱۷-۳
- ۶۷ $\tilde{\epsilon}_{rz}^* = 0$ و $\tilde{\epsilon}_{\theta z}^* = 0$ ، $\tilde{g}_z^* = \exp(in\theta) \exp(-i\omega t)$ حل معادله ی ناویه با فرض ۱۸-۳
- ۷۱ $\tilde{\epsilon}_{rz}^* = 0$ و $\tilde{\epsilon}_{\theta z}^* = 0$ ، $\tilde{g}_z^* = \exp(-in\theta) \exp(-i\omega t)$ حل معادله ی ناویه با فرض ۱۹-۳

فصل چهارم : تعیین تانسورهای تاثیر دینامیکی خارج از صفحه ۶۸ تا ۷۹

- ۸۵ ۱-۴ مقدمه
- ۸۵ ۲-۴ روابط بین $\tilde{\epsilon}_{ij}^d$ با $\tilde{\epsilon}_{ij}^*$ و \tilde{g}_z^*
- ۸۶ ۱-۲-۴ توزیع کرنش ویژه $\tilde{\epsilon}_{rz}^{*(n)}$ در ناحیه ی Ω
- ۸۷ ۲-۲-۴ توزیع کرنش ویژه $\tilde{\epsilon}_{rz}^{*(-n)}$ در ناحیه ی Ω
- ۸۸ ۳-۲-۴ توزیع کرنش ویژه $\tilde{\epsilon}_{\theta z}^{*(n)}$ در ناحیه ی Ω
- ۸۹ ۴-۲-۴ توزیع کرنش ویژه $\tilde{\epsilon}_{\theta z}^{*(-n)}$ در ناحیه ی Ω
- ۹۰ ۵-۲-۴ توزیع گرادیان کرنش ویژه $\tilde{g}_z^{*(n)}$ در ناحیه ی Ω
- ۹۱ ۶-۲-۴ توزیع گرادیان کرنش ویژه $\tilde{g}_z^{*(-n)}$ در ناحیه ی Ω
- ۹۲ ۳-۴ روابط بین \tilde{u}_z^d با $\tilde{\epsilon}_{ij}^*$ و \tilde{g}_z^*
- ۹۲ ۱-۳-۴ توزیع کرنش ویژه $\tilde{\epsilon}_{rz}^{*(n)}$ در ناحیه ی Ω
- ۹۳ ۲-۳-۴ توزیع کرنش ویژه $\tilde{\epsilon}_{\theta z}^{*(n)}$ در ناحیه ی Ω
- ۹۴ ۳-۳-۴ توزیع کرنش ویژه $\tilde{\epsilon}_{rz}^{*(-n)}$ در ناحیه ی Ω
- ۹۴ ۴-۳-۴ توزیع کرنش ویژه $\tilde{\epsilon}_{\theta z}^{*(-n)}$ در ناحیه ی Ω
- ۹۵ ۵-۳-۴ توزیع گرادیان کرنش ویژه $\tilde{g}_z^{*(n)}$ در ناحیه ی Ω

۹۵	۶-۳-۴ توزیع گرادیان کرنش ویژه $\tilde{g}_z^{*(-n)}$ در ناحیه Ω
۸۰ تا ۸۳		فصل پنجم: محاسبه کرنش اغتشاش و میدان جابه جایی
۱۰۶	۱-۵ مقدمه
۱۰۶	۲-۵ بررسی اثر $\tilde{\epsilon}_{ij}^*(r, \theta, t)$ و $\tilde{g}_z^*(r, \theta, t)$ بر $\tilde{u}_z^d(r, \theta, t)$ و $\tilde{\epsilon}_{ij}^d(r, \theta, t)$
۱۰۶	۱-۲-۵ محاسبه $\tilde{\epsilon}_{ij}^d(r, \theta, t)$ در صورت توزیع کرنش ویژه $\tilde{\epsilon}_{ij}^*(r, \theta, t)$
۱۰۷	۲-۲-۵ محاسبه $\tilde{\epsilon}_{ij}^d(r, \theta, t)$ در صورت توزیع گرادیان کرنش ویژه $\tilde{g}_z^*(r, \theta, t)$
۱۰۷	۳-۲-۵ محاسبه $\tilde{u}_z^d(r, \theta, t)$ در صورت توزیع کرنش ویژه $\tilde{\epsilon}_{ij}^*(r, \theta, t)$
۱۰۷	۴-۲-۵ محاسبه $\tilde{u}_z^d(r, \theta, t)$ در صورت توزیع گرادیان کرنش ویژه $\tilde{g}_z^*(r, \theta, t)$
۱۰۸	۵-۲-۵ جمع اثر $\tilde{\epsilon}_{ij}^*$ و \tilde{g}_z^* برای محاسبه \tilde{u}_z^d و $\tilde{\epsilon}_{ij}^d$
		فصل ششم: بررسی انتشار موج SH در محیط های ایزوتروپ با ناهمگنی استوانه ای با استفاده از روش SEIM
۹۱ تا ۸۴		
۸۵	۱-۶ مقدمه
۸۵	۲-۶ حل مساله با استفاده از روش SEIM
۸۶	۳-۶ مقایسه ی نتایج
		فصل هفتم: بررسی انتشار موج SH در محیط های ایزوتروپ با ناهمگنی استوانه ای ناهمسانگرد با پوشش FGM
۱۰۱ تا ۹۲		
۹۳	۱-۷ مقدمه
۹۳	۲-۷ حل مساله با استفاده از روش SEIM
۹۴	۱-۲-۷ خصوصیات مواد تشکیل دهنده ی پوشش FGM1
۹۴	۲-۲-۷ خصوصیات مواد تشکیل دهنده ی پوشش FGM2
۹۴	۳-۲-۷ خصوصیات مواد تشکیل دهنده ی پوشش FGM3
۹۵	۴-۲-۷ خصوصیات مواد تشکیل دهنده ی ناحیه ی Matrix و Fiber
۹۵	۵-۲-۷ تعیین شرایط سازگاری
۹۵	۶-۲-۷ نتایج

فصل هشتم : نتیجه گیری

۱۰۲ تا ۱۰۳

۱-۸ نتیجه گیری ۱۰۳

۱۰۴ تا ۱۰۸

فصل نهم : مراجع

۱-۹ مراجع ۱۰۵

فهرست شکلها

شکل (۱-۲) برخورد موج SH به یک استوانه با مقطع دایره ای ۱۱

شکل (۱-۶) توزیع میدان جابه جایی در مقابل محور x_1 ، برای $\frac{\mu^\Omega}{\mu^{D-\Omega}} = 4$ و $\frac{\rho^\Omega}{\rho^{D-\Omega}} = 9$ ۸۶

شکل (۲-۶) توزیع تنش $\tilde{\sigma}_{rz}$ در مقابل محور x_1 ، برای $\frac{\mu^\Omega}{\mu^{D-\Omega}} = 4$ و $\frac{\rho^\Omega}{\rho^{D-\Omega}} = 9$ ۸۷

شکل (۳-۶) توزیع تنش $\tilde{\sigma}_{\theta z}$ در مقابل محور x_1 ، برای $\frac{\mu^\Omega}{\mu^{D-\Omega}} = 4$ و $\frac{\rho^\Omega}{\rho^{D-\Omega}} = 9$ ۸۷

شکل (۴-۶) توزیع میدان جابه جایی در مقابل محور x_2 ، برای $\frac{\mu^\Omega}{\mu^{D-\Omega}} = 4$ و $\frac{\rho^\Omega}{\rho^{D-\Omega}} = 9$ ۸۸

شکل (۵-۶) توزیع تنش $\tilde{\sigma}_{rz}$ در مقابل محور x_2 ، برای $\frac{\mu^\Omega}{\mu^{D-\Omega}} = 4$ و $\frac{\rho^\Omega}{\rho^{D-\Omega}} = 9$ ۸۸

شکل (۶-۶) توزیع تنش $\tilde{\sigma}_{\theta z}$ در مقابل محور x_2 ، برای $\frac{\mu^\Omega}{\mu^{D-\Omega}} = 4$ و $\frac{\rho^\Omega}{\rho^{D-\Omega}} = 9$ ۸۹

شکل (۷-۶) تغییرات میدان جابه جایی در مقابل θ (radian)، در فصل مشترک ناحیه Ω و $D - \Omega$... ۱۲۰

شکل (۸-۶) تغییرات تنش $\tilde{\sigma}_{rz}$ در مقابل θ (radian)، در فصل مشترک ناحیه Ω و $D - \Omega$ ۱۲۰

شکل (۹-۶) تغییرات تنش $\tilde{\sigma}_{\theta z}$ در مقابل θ (radian)، در فصل مشترک ناحیه Ω و $D - \Omega$ ۱۲۱

شکل (۱۰-۶) تغییرات پراکندگی انرژی γ (scattering cross section) ۱۲۱

شکل (۱-۷) توزیع میدان جابه جایی در مقابل محور x_1 ۱۲۷

شکل (۲-۷) توزیع تنش $\tilde{\sigma}_{rz}$ در مقابل محور x_1 ۱۲۷

شکل (۳-۷) توزیع تنش $\tilde{\sigma}_{\theta z}$ در مقابل محور x_1 ۱۲۸

شکل (۴-۷) توزیع میدان جابه جایی در مقابل محور x_2 ۱۲۸

- شکل (۵-۷) توزیع تنش $\tilde{\sigma}_{r_z}$ در مقابل محور X_2 ۱۲۹
- شکل (۶-۷) توزیع تنش $\tilde{\sigma}_{\theta_z}$ در مقابل محور X_2 ۱۲۹
- شکل (۷-۷) تغییرات میدان جابه جایی \tilde{u}_z در مقابل θ (radian)، در فصل مشترک ناحیه fiber و coatig ۱۳۰
- شکل (۸-۷) تغییرات تنش $\tilde{\sigma}_{r_z}$ در مقابل θ (radian)، در فصل مشترک ناحیه fiber و coatig ۱۳۰
- شکل (۹-۷) تغییرات تنش $\tilde{\sigma}_{\theta_z}$ در مقابل θ (radian)، در فصل مشترک ناحیه fiber و coatig ۱۳۰
- شکل (۱۰-۷) تغییرات میدان جابه جایی \tilde{u}_z در مقابل θ (radian)، در فصل مشترک ناحیه coatig و matrix ۱۳۱
- شکل (۱۱-۷) تغییرات تنش $\tilde{\sigma}_{r_z}$ در مقابل θ (radian)، در فصل مشترک ناحیه coatig و matrix ۱۳۱
- شکل (۱۲-۷) تغییرات تنش $\tilde{\sigma}_{\theta_z}$ در مقابل θ (radian)، در فصل مشترک ناحیه coatig و matrix ۱۳۲
- شکل (۱۳-۷) تغییرات تنش $\tilde{\sigma}_{r_z}$ در مقابل θ (radian)، در فصل مشترک ناحیه coatig و matrix ۱۳۲

فهرست جداول

- جدول (۱-۷) خصوصیات مواد تشکیل دهنده ی ناحیه ی fiber و matrix ۹۵

در این رساله یک ناهمگنی استوانه ای الاستیک با طول بی نهایت را در یک محیط ایزوتروپ الاستیک نامحدود در نظر می گیریم. با استفاده از روش اینکلوژن معادل طیفی (SEIM¹)، انتشار موج SH را پس از برخورد به ناهمگنی استوانه ای مورد مطالعه قرار می دهیم، و نتایج به دست آمده از روش (SEIM²)، از قبیل میدان جابه جایی، تنش و پراکندگی انرژی را با نتایج حاصل از روش بسط تابع ویژه برای این مساله ی خاص مقایسه می کنیم. پس از معتبر نمودن روش (SEIM²) در حل مسائل دینامیکی، مساله انتشار موج SH در محیطهای ایزوتروپ با ناهمگنی استوانه ای ناهمسانگرد با پوشش FGM² را حل می کنیم، و با تغییر توابع اختصاص داده شده به پوشش FGM، تاثیر توابع FGM را روی میدان جابه جایی و تنش بررسی می کنیم. در این مساله تغییرشکلها در محدوده ی تغییر شکلهای کوچک بوده و رفتار مصالح به صورت خطی باقی می ماند. در این رساله برای حل مساله از روشهای مبتنی بر میکرومکانیک استفاده شده است.

کلمات کلیدی:

روش SEIM¹، تانسورهای تاثیر دینامیکی خارج از صفحه²، ناهمسانگرد استوانه ای، مصالح (FGM)²، محیط ناهمگن

فصل اول

مقدمه و کلیات

امروزه مطالعه ی دقیق پارامترهای هندسی انتشار امواج ، در پروژه های بزرگ از قبیل پروژه های ژئوفیزیک، ژئوتکنیک لرزه ای، ساخت تونلها ، خطوط انتقال گاز و نفت و کابلهای انتقال اطلاعات امری ضروری است، این ضرورت سبب شده محققان در چند سال اخیر توجه خاصی به مدل کردن انتشار امواج و پراکنده شدن آن نشان دهند. به همین سبب در این پایان نامه برای اولین بار با استفاده از یک روش جدید به نام روش اینکلوژن معادل طیفی (SEIM)، انتشار موج SH پس از برخورد به ناهمگنی استوانه ای مورد مطالعه قرار گرفته است.

بررسی دقیق رفتار انتشار امواج اولین بار در سال (۱۸۷۶) توسط *Pochhammer* [1]، برای ارتعاشات یک استوانه با مقطع دایره ای و طول بی نهایت ارائه شد. مستقلاً *Chree* [2] حل همان مساله را در سال (۱۸۸۹) ارائه نمود، پس از حل این مساله که به نام مساله ی *Pochhammer - Chree* معروف شد، توجه بسیاری از محققان به این موضوع جلب شد، به طوریکه در سالهای بعد مسائل دینامیکی بسیاری با مواد ایزوتروپ حل گردید. در دهه ی گذشته علاوه بر ناهمگنی های ایزوتروپ ، ناهمگنی های ایزوتروپ جانبی نیز مورد توجه خاصی قرار گرفت؛ برای مثال، *Lekhnitskii* [3] در سال (۱۹۸۱) روی تئوری الاستیسیته ی اجسام غیر ایزوتروپ مطالعه نمود. *Tsai* [4, 5] در سالهای (۱۹۹۰-۱۹۹۱) امواج هدایت شده ی استوانه ای درلوله های ایزوتروپ جانبی و استوانه های توخالی ضخیم را مورد بررسی قرار داد. *Nagy* [6] سال (۱۹۹۵) مساله ی انتشار امواج طولی در استوانه های ایزوتروپ جانبی همگن با بار گذاری خمشی را فرمول بندی کرد. *Ahmad* [7] سال (۲۰۰۱) نتایج *Nagy* را برای استوانه های ایزوتروپ عرضی در حالت های بدون خمش، با استفاده از توابع پتانسیل توسعه داد. علاوه

براین، نتایج عددی محدود شده برای انتشار امواج در استوانه های آزاد توسط *Ahmad* ارائه گردید. *Berliner* و *Solecki* [8] سال (۱۹۹۶) کار *Mirsky* [9] را برای انتشار امواج خمشی در پوسته های ایزوتروپ جانبی توسعه دادند. *Honarvar* و *Sinclair* [10] سال (۱۹۹۶) یک مدل ریاضی براساس توابع پتانسیل برای امواج صوتی پراکنده شده از استوانه های ایزوتروپ جانبی ارائه دادند. *Kim* و *Ih* [11] سال (۲۰۰۳) مدل ارائه شده را برای بررسی امواج صوتی پراکنده شده از پوسته های ایزوتروپ جانبی به کار بردند. *Pan* [12] سال (۲۰۰۴) این مدل را برای مطالعه ی امواج صوتی در استوانه های ایزوتروپ استفاده کرد. در مدلی که توسط *Honarvar* و *Sinclair* سال (۱۹۹۶) ارائه شده بود تعاریفی برای حدس زدن پتانسیلهای جابه جایی بیان شده بود، بنابراین در سال (۲۰۰۷)، *Honarvar* و *Sinclair* [13] یک حل سیستماتیک برای معادلات تفاضلی حاکم ارائه دادند که نیازی به حدس زدن شکل حل ندارد، آنها برای اولین بار برای نتایج وابسته به امواج طولی و خمشی در استوانه های ایزوتروپ جانبی یک مدل پیشنهادی به دست آوردند. *Gatmiri* و *Jabbari* [14, 15] در سال (۲۰۰۵) و *Gatmiri* و *Eslami* [16] در سال (۲۰۰۷) به بررسی انتشار امواج هارمونیک در محیط های متخلخل غیر ایزوتروپیک پرداختند.

به دنبال توسعه آنالیز امواج در محیط الاستیک غیر ایزوتروپیک، مطالعه ی موج در محیط ارتوتروپ و مونوکلینیک استوانه ای نیز مورد توجه خاصی قرار گرفت. *Shul'ga* [17] در سال (۱۹۷۶) اولین کسی بود که معادله ی پراکندگی را برای یک استوانه ی توخالی ارتوتروپ تحت تغییرشکلهای سه بعدی متقارن محوری در نظر گرفت. مسائل پیچیده تر برای امواج غیر متقارن محوری توسط *Ramsakaya* و *Shul'ga* [18, 19] در سالهای (۱۹۸۳ و ۱۹۸۴) مورد بحث قرار گرفت. آنها در جایی که معادلات حاکم تشکیل شده از جملات بسط قابل حل نبودند از روش بسط سری های توانی برای حل معادلات حاکم استفاده کردند. *Berger* و *Martin* [20] در سال (۲۰۰۱) امواج دو بعدی داخل صفحه ای را در یک محیط ارتوتروپ برای مدل شمع های چوبی مطالعه نموده و روش بسط سری های *Neumann* را برای حل معادلات حاکم توسعه دادند. *Oral* و *Anlas* [21] نیز در سال (۲۰۰۵) روی محیطهای ناهمگن ارتوتروپ مطالعاتی انجام دادند.

یک موج *SH* زمان-هارمونیک، در محیط غیر ایزوتروپ استوانه ای توسط *Bostrom* [22] در سال (۱۹۹۴) مورد بحث قرار گرفت. فرم راه حل ارائه شده شبیه بسط سری فوریه است. این مسئله دوباره توسط *Watanable* و *Payton* [23] در سال (۲۰۰۱) حل شد و حل دقیق تری ارائه گردید. برای موج *SH* عرضی، یک تابع گرین دقیق براساس مقادارهای محدود شده ی پارامتر غیر ایزوتروپ، توسط *Watanabl* و

[24] Nishinari در سال (۱۹۹۶) به دست آمد، که در سال (۱۹۹۷) توسط Payton و Watanable [25] عمومیت یافت.

راه حل‌های دقیق به دست آمده تنها برای حالت امواج SH در محیط ارتوتروپ استوانه ای کاربرد داشتند، و امکان استفاده از این راه حل‌ها برای محیط مونوکلینیک استوانه ای وجود نداشت. در این راه حل‌ها قانون هوک در مختصات قطبی برای محیط‌های ارتوتروپ استوانه ای به صورت زیر بیان شده است،

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{\theta z} \\ \varepsilon_{rz} \end{bmatrix} \quad (1-1-1)$$

زمانی که مواد مونوکلینیک هستند، قانون هوک برای تغییر شکل کلی به صورت زیر که توسط Nayfeh [26] در سال (۱۹۹۵) بیان شده، ارائه می شود.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (2-1-1)$$

در سیستم مختصات استوانه ای ($1 \rightarrow r, 2 \rightarrow \theta, 3 \rightarrow z$) اگر ما فرض کنیم، یک تغییر شکل دوبعدی در صفحه ی (r, θ) داشته باشیم، ما می توانیم تغییر شکل را به دو تغییر شکل داخل و خارج صفحه ای جدا کنیم. برای تغییر شکل خارج صفحه ای با مولفه ی جابه جایی غیر صفر $u_z(r, \theta, z)$ ، قانون هوک به شکل ساده ی زیر کاهش می یابد.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44} & C_{45} \\ C_{45} & C_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{\theta z} \\ \varepsilon_{rz} \end{bmatrix} \quad (3-1-1)$$

قانون هوک بالا در واقع شکل کلی معادله ی (۱-۱-۱) است. هیچ ماده ی واقعی که از معادله ی فوق تبعیت کند در طبیعت یافت نشده است. با این حال در سال (۱۹۹۶) Koyama و Kikuchi [27] با استفاده از یک شبیه

سازی کامپیوتری یک صفحه ی FRP را با خصوصیات ارائه شده در معادله ی (۱-۱-۱) مدل نمودند. در آینده مطمئناً ما شاهد مواد مصنوعی خواهیم بود، که از قانون هوک رابطه ی (۱-۱-۳) تبعیت می کنند. در سال (۲۰۰۲) *Payton* و *Watanabe* [28] تابع گرینی برای آنالیز امواج SH در مواد مونوکلینیک استوانه ای ارائه کردند. یکی از روشهایی که تحول زیادی در محاسبه ی میدان جابه جایی و تنش در محیط های ناهمگن ایجاد کرد، روشی بنام اینکلوزن معادل (EIM) بود که در سال (۱۹۵۷) توسط *Eshelby* [29] ارائه شد، این روش به شدت از سوی محققان مورد استقبال قرار گرفت و مقالات زیادی بر اساس این روش نوشته شد. که از آن میان می توان به کارهای *Eshelby* [30] سال (۱۹۶۱)، *Moschovidis* و *Mura* [31] سال (۱۹۷۵)، *Fruhashi* و *Mura* [32] سال (۱۹۷۹)، *Mura* [33] سال (۱۹۸۲)، *Lou* و *Weng* [34, 35] سال (۱۹۸۷ و ۱۹۸۹)، *Hori* و *Nemat Naser* [36] سال (۱۹۹۳)، *Shodja* و *Sarvestani* [37] سال (۲۰۰۱)، *Shodja* و *Soheilifard* [38] سال (۲۰۰۳)، *Sharma* و *Sharma* [39] سال (۲۰۰۳)، *Shodja* و *Roumi* [40] سال (۲۰۰۷) و *Shodja* و *Shokrolahi-Zadeh* [41, 42] در سالهای (۲۰۰۷) و (۲۰۰۸) اشاره نمود.

در سال (۲۰۰۸) *Shodja* و *Shokrolahi-Zadeh* [42] روش (EIM) را توسعه داده و روش اینکلوزن معادل طیفی ($SEIM$) را ارائه نمودند. که در این پایان نامه از این روش برای اولین بار برای حل مسائل دینامیکی در محیطهای ناهمگن استفاده شده است. در ادامه توضیحاتی در رابطه با روش (EIM) و ($SEIM$) ارائه شده و این دو روش با هم مقایسه شده اند.

۱-۲ مقایسه دو روش (EIM) و ($SEIM$)

اشلیبی در سال (۱۹۵۷) برای تعیین میدان جابه جایی و تنش در محیط های ناهمگن روشی به نام روش اینکلوزن معادل (EIM) را ارائه داد. در این روش با توزیع کرنش ویژه محیط ناهمگن با یک محیط همگن معادل می شود. به این صورت که فرض می شود در ناحیه ناهمگن Ω که زیر دامنه ای از یک محیط بینهایت D است، کرنشهای ویژه ی غیر صفر ε_{ij}^* توزیع شود، اما در ناحیه ی $\Omega - D$ کرنشهای ویژه صفر باشند. در این حالت ناحیه Ω یک اینکلوزن نامیده می شود و مدول الاستیسیته ی آن با ناحیه ی $\Omega - D$ برابر است، در صورت متفاوت بودن مدول الاستیسیته، ناحیه ی Ω یک اینکلوزن ناهمگن نامیده می شود. منظور از کرنش ویژه در روش

(EIM)، کرنشهای غیر الاستیک از قبیل کرنشهای حرارتی، تبدیلات فازی، کرنشهای پلاستیک و... می باشد. با توجه به اینکه سطح تنش و کرنش کل دو معیار کنترل کننده ی خرابی هستند، برای معادل سازی ناحیه ی ناهمگن با یک ناحیه ی همگن باید تنش و کرنش کل در هر دو حالت یکسان باشد.

$$\bar{\sigma}_{ij}^{\Omega} = \bar{C}_{ijkl}^{\Omega} (\bar{\epsilon}_{kl}^d + \bar{\epsilon}_{kl}^0) = \bar{C}_{ijkl}^{D-\Omega} (\bar{\epsilon}_{kl}^d + \bar{\epsilon}_{kl}^0 - \bar{\epsilon}_{kl}^*) \quad (1-2-1)$$

در روش اشلبی معمولاً فرم توزیع کرنشهای ویژه، با توجه به بارگذاری روی محیط بی نهایت D حدس زده می شود، سپس با استفاده از تانسورهای به نام اشلبی، کرنشهای اغتشاش را به کرنشهای ویژه مرتبط می کند. در ادامه مثالهایی از توزیع متفاوت کرنش ویژه و رابطه ی آن با کرنش اغتشاش ارائه شده است.

$$\bar{\epsilon}_{ij}^* = \beta_{ij} \Rightarrow \bar{\epsilon}_{ij}^d = D_{ijkl} \beta_{kl}$$

$$\bar{\epsilon}_{ij}^*(x) = \beta_{ijk} x_k \Rightarrow \bar{\epsilon}_{ij}^d(x) = D_{ijklm}(x) \beta_{klm}$$

$$\bar{\epsilon}_{ij}^*(x) = \beta_{ijkl} x_k x_l \Rightarrow \bar{\epsilon}_{ij}^d(x) = D_{ijklmn}(x) \beta_{klmn}$$

(2-2-1)

در روابط (2-2-1)، D_{ijkl} ، $D_{ijklm}(x)$ و $D_{ijklmn}(x)$ به ترتیب تانسورهای مرتبه ی صفر، یک و دو اشلبی هستند، و بالانویس (-) در مقادیر فوق مشخصه ی مختصات کارتزین است.

حال اگر شکل بارگذاری روی محیط بی نهایت D به صورت زیر باشد.

$$\bar{\sigma}_{ij}^0 = \alpha_{ij} + \alpha_{ijk} x_k + \alpha_{ijkl} x_k x_l + \dots \quad (3-2-1)$$

$$\bar{\sigma}_{ij}^0 = \bar{C}_{ijkl} \bar{\epsilon}_{kl}^0 \Rightarrow \bar{\epsilon}_{ij}^0 = \gamma_{ij} + \gamma_{ijk} x_k + \gamma_{ijkl} x_k x_l + \dots \quad (4-2-1)$$

توزیع کرنش ویژه به صورت زیر فرض می شود.

$$\bar{\epsilon}_{ij}^* = \beta_{ij} + \beta_{ijk} x_k + \beta_{ijkl} x_k x_l + \dots \quad (5-2-1)$$

طبق تعریفی که برای تانسورهای اشلبی اشاره شد، کرنش اغتشاش به صورت زیر بیان می شود.

$$\bar{\epsilon}_{ij}^d = D_{ijkl} \beta_{kl} + D_{ijklm}(x) \beta_{klm} + D_{ijklmn}(x) \beta_{klmn} + \dots \quad (6-2-1)$$

سپس با استفاده از رابطه ی تنش، معادلات کافی برای محاسبه ی کرنش های اغتشاش قابل استخراج است.

$$\bar{\sigma}_{ij}^{\Omega} = \bar{C}_{ijkl}^{\Omega} (\bar{\varepsilon}_{kl}^d + \bar{\varepsilon}_{kl}^0) = \bar{C}_{ijkl}^{D-\Omega} (\bar{\varepsilon}_{kl}^d + \bar{\varepsilon}_{kl}^0 - \bar{\varepsilon}_{kl}^*) \quad (7-2-1)$$

$$\Delta \bar{C}_{ijkl}^{\Omega} (\bar{\varepsilon}_{kl}^d + \bar{\varepsilon}_{kl}^0) = -\bar{C}_{ijkl}^{D-\Omega} \bar{\varepsilon}_{kl}^* \quad (8-2-1)$$

$$\Delta \bar{C}_{ijkl}^{\Omega} = \bar{C}_{ijkl}^{\Omega} - \bar{C}_{ijkl}^{D-\Omega} \quad (9-2-1)$$

با جایگذاری روابط $\bar{\varepsilon}_{ij}^0$ ، $\bar{\varepsilon}_{ij}^*$ و $\bar{\varepsilon}_{ij}^d$ در رابطه ی (۸-۲-۱) کرنشهای اغتشاش قابل محاسبه است.

$$\begin{aligned} \Delta \bar{C}_{ijkl}^{\Omega} (D_{klqr} \beta_{qr} + D_{klqrs}(x) \beta_{qrs} + D_{klqrst}(x) \beta_{qrst} + \dots + \gamma_{kl} + \gamma_{klq} x_q + \gamma_{klqr} x_q x_r + \dots) = \\ -\bar{C}_{ijkl}^{D-\Omega} (\beta_{kl} + \beta_{klq} x_q + \beta_{klqr} x_q x_r + \dots) \end{aligned} \quad (10-2-1)$$

تانسورهای اشلیبی در رابطه (۱۰-۲-۱) با استفاده از توابع ارائه شده در میکرومکانیک از قبیل تابع گرین و توابع پتانسیل محاسبه می شود، بنابراین تنها مجهولات رابطه ی (۱۰-۲-۱) ضرایب β هستند که با تساوی x های هم توان دو طرف معادله قابل محاسبه اند.

از جمله نکاتی که در روش (EIM) قابل توجه است، افزایش درجه ی تانسورهای اشلیبی، با توجه به نوع بار گذاری از ۴ به بالا است و اینکه تعداد مجهولات مساله متناسب با توان دوم n است، بنابراین می توان گفت استفاده از این روش درگیری جبری بالایی دارد.

به همین خاطر در سال (۲۰۰۸)، *Shodja* و *Shokrolahi-Zadeh* روش اینکلوزن معادل طیفی (SEIM) را ارائه دادند. در این روش کرنش ویژه و کرنش اغتشاش و رابطه بین آنها به صورت زیر تعریف شده است و بالانویس (\sim) در روابط زیر مشخصه ی مختصات استوانه ای است.

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}^*(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{\varepsilon}_{ij}^{*(n)}(r) \exp(in\theta) \quad (11-2-1)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}^d(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{\varepsilon}_{ij}^{d(n)}(r) \exp(in\theta) \quad (12-2-1)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}^{d(n)}(r) = \sum_{t=0}^N \int_{R_t}^{R_{t+1}} \tilde{\varepsilon}_{ij}^{*(n)}(R) d\tilde{D}_{ijkl}^n(r; R) \quad (13-2-1)$$

بعد از جایگذاری روابط (۱۱-۲-۱) و (۱۲-۲-۱) در شرایط سازگاری طیفی (رابطه تنش) معادلات کافی برای محاسبه ی $\tilde{\varepsilon}_{ij}^{*(n)}(r)$ و $\tilde{\varepsilon}_{ij}^{d(n)}(r)$ به دست می آید.

$$\tilde{C}_{ijkl}^{\Omega} \left(\tilde{\varepsilon}_{kl}^{d(n)}(r) + \tilde{\varepsilon}_{kl}^{0(n)}(r) \right) = 2\mu \left(\tilde{\varepsilon}_{ij}^{d(n)}(r) + \tilde{\varepsilon}_{ij}^{0(n)}(r) - \tilde{\varepsilon}_{ij}^{*(n)}(r) \right) + \lambda \left(\tilde{\varepsilon}_{kk}^{d(n)}(r) + \tilde{\varepsilon}_{kk}^{0(n)}(r) - \tilde{\varepsilon}_{kk}^{*(n)}(r) \right) \delta_{ij} \quad (14-2-1)$$

از نکات قابل توجه این روش این است که، تانسور اشلبی فوریه برای همه ی جمله ها در درجه ی ۴ باقی می ماند، و تعداد مجهولات آن متناسب با n است. بنابراین نسبت به روش (EIM) درگیری جبری کمتری دارد.

با توجه به امتیازات روش ($SEIM$)، در این پایان نامه برای اولین بار با استفاده از این روش، مساله انتشار موج SH در محیطهای ایزوتروپ با ناهمگنی استوانه ای ناهمسانگرد با پوشش FGM حل شده و میدان جابه جایی و تنش برای توابع متفاوت پوشش FGM محاسبه شده است.

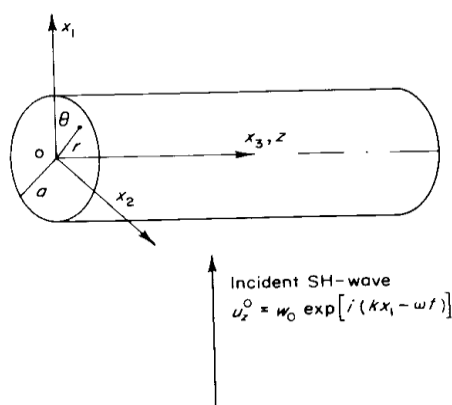
فصل دوم

بررسی انتشار موج **SH** در محیط های

ایزوتروپ با ناهمگنی استوانه ای با

استفاده از تعریف بسط تابع ویژه

در این فصل با استفاده از تعریف بسط تابع ویژه معادله ی اسکار موج را برای یک استوانه ی ایزوتروپ با طول بی نهایت در یک محیط ایزوتروپ نامحدود حل می کنیم. فرض می کنیم موج SH با معادله ی جابه جایی u_3^0 در راستای x_1 عمود بر محور استوانه، به آن برخورد کند. در شکل (۱-۲)، مختصات استوانه ای را نشان می دهند. [43]



(۱-۲) برخورد موج SH به یک استوانه با مقطع دایره ای

$$u_1^0 = 0, \quad u_2^0 = 0, \quad u_3^0 = w^0 \exp[i(kx - \omega t)], \quad \omega \equiv kc_2 \quad (1-1-2)$$

در این مساله، انتشار با سرعت c_2 و فرکانس $\omega/2\pi$ صورت می گیرد، و به دلیل ایزوتروپ بودن استوانه، موج منعکس شده از آن از نوع SH است، بنابراین حرکت آن خارج صفحه بوده و به غیر از $t_{\theta z}$ و t_{rz} بقیه ی مولفه های جابه جایی و تنش آن صفر می باشد.

$$u_r = u_\theta = 0, \quad u_z^d = w(r, \theta, t)$$

$$t_{rz} = \mu \frac{\partial w}{\partial r}, \quad t_{\theta z} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (2-1-2)$$

جابه جایی w باید معادله ی موج را که در رابطه ی (۱-۲-۲) بیان شده است، ارضا نماید.

$$\nabla^2 w \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1-2-2)$$

برای حل رابطه ی (۱-۲-۲)، ابتدا w به صورت زیر در نظر گرفته می شود.

$$w = R(r)\Theta(\theta)e^{-i\omega t}$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} \Theta e^{-i\omega t} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} \Theta e^{-i\omega t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} R e^{-i\omega t} = \frac{(i\omega)^2}{c^2} R \Theta e^{-i\omega t}$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{rR} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{\Theta r^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} = -k^2$$

$$\frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + k^2 r^2 = -\frac{1}{\Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} = n^2$$

$$r^2 R'' + rR' + (k^2 r^2 - n^2)R = 0 \quad \text{و} \quad \Theta'' + n^2 \Theta' = 0 \quad (2-2-2)$$

برای حل دو معادله ی (۳-۲-۳) با توجه به اینکه امواج منحرف شده به سمت بینهایت پیش می روند، از دو تابع

هنکل $H_n^{(1)}$ و $H_n^{(2)}$ ، فقط تابع هنکل $H_n^{(1)}$ انتخاب می شود. بنابراین داریم:

$$w = w_0 \sum_n A_n H_n^{(1)}(kr) \cos n\theta e^{-i\omega t} \quad (3-2-2)$$

در رابطه (۳-۲-۲) یک ثابت اختیاری است، بنابراین جابجایی کل به شکل زیر نوشته می شود.

$$u_z = u_z^0 + w \quad (4-2-2)$$

برای تعیین ثابت A_n ، ابتدا بسط سری موج SH را می نویسیم:

$$\exp(ikr \cos \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kr) e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(kr) \cos n\theta \quad (5-2-2)$$

که در آن $\varepsilon_0 = 1$ و برای $n=1, 2, \dots$ $\varepsilon_n = 2$.

در نهایت تنشها و جابه جایی های کل به صورت زیر بیان می شوند.

$$u_z = w_0 \sum_{n=0}^{\infty} [\varepsilon_n i^n J_n(kr) + A_n H_n^{(1)}(kr)] \cos n\theta e^{-i\omega t}$$

$$t_{rz} = \mu \left(\frac{w_0}{r} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \varepsilon_n i^n [n J_n(kr) - kr J_{n+1}(kr)] + A_n [n H_n^{(1)}(kr) - kr H_{n+1}^{(1)}(kr)] \right\} \cos n\theta e^{-i\omega t}$$

$$t_{\theta z} = -\mu \left(\frac{w_0}{r} \right) \sum_{n=0}^{\infty} n [\varepsilon_n i^n J_n(kr) + A_n H_n^{(1)}(kr)] \sin n\theta e^{-i\omega t}$$

(۶-۲-۲)

حال مساله را در حالت استوانه ی الاستیک حل می کنیم.

۳-۲ استوانه ی الاستیک

اگر جسم پراکنده کننده یک ناهمگنی الاستیک با مدول برشی μ_e و دانسیته ی ρ_e باشد، علاوه بر حل خارجی (۶-۲-۲)، باید معادله ی موج برای بخش داخلی $r < a$ نیز حل شود. بنابراین معادله ی موج منکسر شده به صورت زیر بیان می شود:

$$w_e(r, \theta, t) = -w_0 \sum_{n=0}^{\infty} C_n J_n(k_e r) \cos n\theta e^{-i\omega t} \quad (۱-۳-۲)$$

که در آن $k_e = \omega / c_{e2}$ و $c_{e2} = (\mu_e / \rho_e)^{1/2}$ است. جابه جایی بیرونی استوانه با رابطه ی (۲-۲-۴) و جابجایی داخلی استوانه با w_e نشان داده شده است. شرایط مرزی که در این حالت باید برقرار باشد، پیوستگی میدان جابه جایی و ترکشن در $r = a$ است.

$$u_3^0 + w = w_e, \quad \mu \frac{\partial}{\partial r} (u_3^0 + w) = \mu_e \frac{\partial w_e}{\partial r} \quad \text{در} \quad r = a \quad (۲-۳-۲)$$

با جایگذاری روابط (۶-۲-۲) و (۱-۳-۲) در روابط (۲-۳-۲) ثابتهای A_n و C_n محاسبه می شوند.

$$A_n = \left(\frac{-i^n \varepsilon_n}{D_n} \right) [\mu_e k_e J_n(ka) J_n'(k_e a) - \mu k J_n'(ka) J_n(k_e a)]$$

$$C_n = \left(\frac{-i^n \varepsilon_n}{D_n} \right) \mu k [J_n'(ka) H_n^{(1)}(ka) - H_n^{(1)'}(ka) J_n(ka)]$$

$$D_n \equiv \mu_e k_e H_n^{(1)}(ka) J_n'(k_e a) - \mu k H_n^{(1)'}(ka) J_n(k_e a)$$

(۳-۳-۲)