وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض

بهترین تقریب در فضاهای نرم دار

توسط:
منیر طاهری سرتشنیزی

استاد راهنما:
دکتر غلامرضا عباس پور

استاد مشاور:
دکتر محمد رمضان پور

شهریور ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

بهترین تقریب در فضاهای نرم دار

توسط:

منیر طاهری سرتشنیزی

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی محض

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه:

دکتر غلامرضا عباس پور تبادکان استادیار رشته ریاضی محض گرایش آنالیز دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر محمد رمضانپور استادیار ریاضی محض گرایش آنالیز دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر علی غفاری استاد رشته ریاضی محض گرایش آنالیز دانشکده علوم ریاضی دانشگاه سمنان (استاد داور)

دکتر مرتضی ابطحی ایوری استادیار ریاضی محض گرایش آنالیز دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد داور)

دکتر نرگس تولایی استادیار ریاضی محض گرایش آنالیز دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان
(نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریور ۱۳۹۱

تقدیم به

پدر بزرگوار و مادر مهربانم

که دعای آنان قوت قلب و بدرقه راهم است

سپاسگزاری

پروردگارا! ای هستی بخش وجود، مرا بر نعمات بی‌کرانت توان شکر نیست، ذره ذره وجودم برای تو و نزدیک شدن به تو می‌تپد. الهی مرا مدد کن تا دانش اندکم، نه نردبانی برای فزونی تکبر و غرور، نه حلقه‌ای برای اسارت و نه دست مایه‌ای برای تجارت، بلکه گامی باشد برای تجلیل از تو و متعالی ساختن زندگی خود و دیگران.

اکنون که به لطف پروردگار بزرگ موفق به اتمام این مقطع از تحصیل گشته‌ام لازم می‌دانم از کسانی که در این مسیر مرا راهنمایی نموده‌اند، تشکر نمایم. بر خود واجب می‌دانم مراتب سپاس و قدردانی عمیق قلبی خود را به خدمت استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر غلامرضا عباس پور که در طول دوران تحصیل و ارائه پایان‌نامه از چشمه جوشان دانش و اخلاق والایشان بهره مند گشته‌ام ابراز نمایم. همچنین از استاد ارجمند، جناب آقای دکتر محمد رمضان پور که مشاوره این پایان‌نامه را بر عهده داشتند کمال تشکر را دارم. در آخر از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر علی غفاری و جناب آقای دکتر مرتضی ابطحی که در مقام داور زحمت مطالعه پایان‌نامه را بر عهده داشتند قدردانی می‌نمایم.

منیر طاهری سرتشنیزی

شهریور ماه ۹۱

چکیده

بهترین تقریب در فضاهای نرم دار

به وسیله‌ی:
منیر طاهری سرتشنیزی

.

در این پایان نامه به مطالعاتی پیرامون بهترین تقریب و بهترین هم تقریب در فضای نرم دار می‌پردازیم. همچنین ε- بهترین تقریب و مجموعه های ε- چبیشف و ε- پروکسیمینال را معرفی می‌کنیم. از آنجایی که مفهوم تعامد در بحث بهترین تقریب از اهمیت برخوردار است تعامد بیرخوف و ε- تعامد را معرفی می‌کنیم. نگاشت حافظ بهترین تقریب را مورد بررسی قرار می‌دهیم و برخی از نتایج را بیان می‌کنیم. به عنوان مثال اگر یک عملگر روی فضای نرم دار طولپا باشد حافظ همه‌ی ویژگی های بهترین تقریب است.

واژگان کلیدی: فضای نرم دار، بهترین تقریب، مجموعه‌ی چبیشف، تعامد بیرخوف

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

پیشگفتار

بهترین تقریب موضوع مهمی در آنالیز تابعی است. فرض کنیدX یک فضای نرم دار و G یک زیرمجموعه از X باشد. عنصر $g_\circ \in G$ را بهترین تقریب از $x \in X$ در G گوئیم اگر از بین همه‌ی نقاط G ، $g_\circ$ نزدیکترین نقطه به x باشد. مجموعه‌ی همه‌ی بهترین تقریب ها از x در G را با $P_G(x)$ نشان می‌دهیم. اگر $P_G(x)$ شامل حداقل یک عضو باشد G را یک مجموعه‌ی پروکسیمینال و اگر $x \in X$ دارای بهترین تقریب یکتا باشد G را یک مجموعه‌ی چبیشف می‌نامیم. مواردی که در بحث بهترین تقریب از اهمیت برخوردارند به شرح زیر است:

۱. وجود بهترین تقریب

۲. یکتایی بهترین تقریب

۳. مشخصه سازی های بهترین تقریب

۴. تابع حافظ بهترین تقریب

مجموعه‌های چبیشف در سال ۱۹۵۴ توسط افیموس [۱] و استچکین [۲] و همچنین مجموعه های پروکسیمینال توسط کیل گرو [۳] معرفی شدند. کتابهای مختلفی در زمینه‌ی بهترین تقریب وجود دارد از جمله می‌توان به [۱۸] و [۱۹] اشاره کرد. سینگر[۴] در سال ۱۹۷۰ راجع به بهترین تقریب در فضای نرم

---

[۱] Efimou

[۲] Stechken

[۳] Killgrove

[۴] Singer

دار بحث کرد. ریاضیدانان زیادی از جمله گتها.اس.روا، [۵] ساراوانا [۶] و مظاهری در خصوص موضوع بهترین تقریب به بحث و تبادل نظر پرداختند.

این پایان نامه شامل سه فصل است. در فصل اول به طور مختصر به بیان بعضی از مفاهیم اصلی و ضروری می‌پردازیم که در دو فصل دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرند. در فصل دوم به معرفی بهترین تقریب و مجموعه های پروکسیمینال و چبیشف می‌پردازیم. نشان می‌دهیم مجموعه های پروکسیمینال بسته هستند و هر زیر مجموعه بسته از یک فضای متناهی البعد پروکسیمینال است. مجموعه‌ی $P_G(x)$ کراندار است و اگر G محدب باشد محدب است. در این فصل مفهوم تعامد بیرخوف را بیان می‌کنیم و تابع حافظ بهترین تقریب را مورد بررسی قرار می‌دهیم. و سرانجام مشخصه سازی های بهترین تقریب را بررسی می‌کنیم.

در فصل سوم به معرفی ε- بهترین تقریب می‌پردازیم. مجموعه‌ی همه‌ی ε- بهترین تقریب ها را با $P_G(x,\varepsilon)$ نشان می‌دهیم. $P_G(x,\varepsilon)$ کراندار و اگر G محدب باشد محدب است. و در پایان مفهوم بهترین هم تقریب را بیان می‌کنیم و به بررسی مشخصه سازی های بهترین هم تقریب می‌پردازیم.

---

[۵] Geetha S. Rao

[۶] Saravana

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

در این فصل به بیان مطالبی می پردازیم که در فصل های بعدی مورد استفاده قرار می گیرد. از آنجا که انتظار می رود خواننده با این مطالب آشنایی داشته باشد از بیان اثبات ها و جزئیات خود داری می‌کنیم.

۱-۱ فضاهای متریک

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی باشد. تابع $d : X\times X \longrightarrow \mathbb{R}$ یک متر روی X است هرگاه:

۱. برای هر $x, y \in X$، $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

۲. برای هر $x, y \in X$ ، $d(x, y) = d(y, x)$

۳. برای هر $x, y, z \in X$ ، $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

در این حالت X را یک فضای متریک و $d(x, y)$ را فاصله x, y می‌نامیم.
مترهای متفاوت، خواص متفاوتی را روی X القا می‌کنند. ساده ترین مثال از یک فضای متریک، مجموعه اعداد حقیقی با متر $d(x, y) =| x - y |$ است. به عنوان مثال دیگر اگر X مجموعه‌ای دلخواه باشد تابع $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ که به صورت زیر تعریف می‌شود، یک متر روی X تعریف می‌کند که به آن متر گسسته گوئیم.

$$d(x, y)\begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و A,B زیرمجموعه‌هایی ناتهی از X باشند

۱. فاصله‌ی بین نقطه‌ی $x \in X$ و مجموعه‌ی A را با $d(x,A)$ نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم

$$d(x,A) = inf\{d(x,y) : \qquad y \in A\}$$

۲. فاصله‌ی بین مجموعه‌ی A,B را با $d(A,B)$ نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم

$$d(A,B) = inf\{d(x,y) : \qquad x \in A, y \in B\}$$

۳. قطر [۱] A را با $d(A)$ نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم

$$d(A) = sup\{d(x,y), \quad x,y \in A\}$$

دنباله (x_n) در فضای متری (X,d) را یک دنباله کوشی [۲] گویند هرگاه:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 > 0 \quad \forall m,n \geq n_0 \quad d(x_n,x_m) < \epsilon,$$

فضای متری (X,d) را کامل گوییم هرگاه هر دنباله کوشی در آن به عضوی از X همگرا باشد.

تعریف ۳.۱.۱. فضای متریک X را فشرده گوئیم هرگاه هر دنباله در X دارای زیر دنباله همگرا باشد. زیر مجموعه G از X را فشرده گوئیم هرگاه هر دنباله در G دارای زیر دنباله ای باشد که به عضوی از G همگرا باشد.

تعریف ۴.۱.۱. نگاشت $T : (X,d) \longrightarrow (Y,\overline{d})$ را یک نگاشت پیوسته[۳] در نقطه $x_0 \in X$ گوئیم هرگاه اگر $x_n \longrightarrow x_0$ در (X,d) آنگاه $T(x_n) \longrightarrow T(x)$ در $(Y,\overline{d})$.

۱-۲ فضاهای نرم‌دار

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای برداری باشد یک نرم روی X تابع حقیقی مقدار $\|.\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

---

[۱] Diameter

[۲] Cachy sequence

[۳] Continous map

۱. $\| x \| = \circ$ اگر و تنها اگر $x = \circ$

۲. $\| \alpha x \| = | \alpha | \| x \| \qquad (\forall x \in X, \alpha \in \mathbb{R})$

۳. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \| \qquad (\forall x, y \in X)$

مثال ۲.۲.۱. قرار می دهیم $X = \mathbb{R}^n$ و $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. در این صورت X یک فضای برداری n بعدی روی $\mathbb{F}$ است که در آن جمع برداری و ضرب اسکالر به صورت مؤلفه ای انجام می شود. نرم های متعددی روی X تعریف می شود که از مهمترین آنها می توان به موارد زیر اشاره کرد:
فرض کنیم $x = (x_۱, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_۱ = |x_۱| + \cdots + |x_n|,$$
$$\|x\|_۲ = (|x_۱|^۲ + \cdots + |x_n|^۲)^{۱/۲},$$
$$\|x\|_\infty = \max(|x_۱|, \ldots, |x_n|)$$

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید X یک فضای نرم دار باشد

۱. مجموعه $\{x \in X \quad , \quad \|x - x_\circ\| < r\}$ را گوی باز[۴] به مرکز $x_\circ$ و شعاع r می‌نامیم و با $B(x_\circ, r)$ نشان می‌دهیم.

۲. مجموعه $\{x \in X \quad , \quad \|x - x_\circ\| \leq r\}$ را گوی بسته[۵] به مرکز $x_\circ$ و شعاع r می‌نامیم و با $\overline{B}(x_\circ, r)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید $x_۱, \cdots, x_n$ نقاطی از فضای خطی X باشند

$$x = a_۱ x_۱ + \cdots + a_n x_n \quad a_i \in \mathbb{R}$$

را ترکیب خطی از $\{x_۱, \cdots, x_n\}$ می‌نامند. فرض کنید S زیرمجموعه ناتهی از فضای خطی X باشد. مجموعه‌ی همه‌ی ترکیبات خطی اعضای S پیمایش [۶]خطی S است. در حقیقت اشتراک همه‌ی زیر فضاهای X شامل S برابر پیمایش خطی S می‌باشد. پیمایش خطی از S را با $< S >$ نشان می‌دهیم.

[۴] Open ball

[۵] Close ball

[۶] Span

قضیه ۱.۲.۵. [۱۱] *فرض کنید X یک فضای نرم‌دار باشد*

$$\forall x, y \in X \quad \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$$

نامساوی فوق زمانی به تساوی تبدیل می‌شود که $y = \circ$ یا عدد حقیقی بزرگتر مساوی صفر مانند c موجود باشد که $x = cy$.

تعریف ۱.۲.۶. فرض کنید Xو Y دو فضای نرم دار باشند. نگاشت $T : X \longrightarrow Y$ را خطی گوئیم هرگاه

۱. $\forall a, b \in X \qquad T(a + b) = T(a) + T(b)$

۲. $\forall \beta \in \mathbb{F} \qquad T(\beta a) = \beta T(a)$

تعریف ۱.۲.۷. فرض کنید C یک زیر مجموعه از فضای خطی X باشد گوئیم C محدب [۷]است اگر برای اسکالر $\lambda \in [\circ, ۱]$

$$(۱ - \lambda)x + \lambda y \in C \qquad \forall x, y \in C$$

تعریف ۱.۲.۸. فرض کنید X یک فضای نرم‌دار باشد در این صورت X را به طور اکید محدب [۸]گوییم هرگاه:

$$\| \lambda x + (۱ - \lambda)y \| < ۱, \quad \forall \lambda \in (\circ, ۱), x, y \in X, \| x \| = \| y \| = ۱, x \neq y$$

به عبارت دیگر اگر $x, y \in S_X = \{x \in X, \quad \|x\| = ۱\}$ و $\|\frac{(x + y)}{۲}\| = ۱$ آنگاه $x = y$.

مثال ۱.۲.۹. فرض کنید $X = \mathbb{R}^n$ و $n \geq ۲$ با نرم $\|.\|_\infty$ که

$$\|x\|_\infty = \max_{۱ \leq i \leq n} | x_i |, \quad x = (x_۱, x_۲, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}$$

X به طور اکید محدب نیست. فرض کنید $x = (۱, \circ, \circ, \cdots, \circ)$ و $y = (۱, ۱, \circ, \circ, \cdots, \circ)$ در این صورت

$$\|x\|_\infty = ۱, \quad \|y\|_\infty = ۱, \quad \|x + y\|_\infty = ۲$$

اما $x \neq y$.

---

[۷] Convex

[۸] Strictly convex

قضیه ۱.۲.۱۰. [۱۱] *فرض کنید G یک زیر مجموعه از فضای نرم دار متناهی البعد X باشد. G فشرده است اگر و تنها اگر G بسته و کراندار باشد.*

تعریف ۱.۲.۱۱. فرض کنید X یک فضای خطی نرم دار باشد تعریف می‌کنیم

$$X^* = \{f : X \to \mathbb{C} : \text{خطی و کراندار } f\}$$

X^* را فضای دوگان[۹] X می‌نامند.

یکی از قضیه‌های مهم در آنالیز قضیه‌ی هان باناخ[۱۰] است. در اینجا به بیان بعضی از نتایج آن می‌پردازیم.

قضیه ۱.۲.۱۲. *فرض کنید $(X, \|\ .\ \|)$ یک فضای باناخ و M زیر فضایی از X باشد. در این صورت*

$$\forall f \in M^*, \quad \exists F \in X^* \quad \ni F|_M = f, \quad \|F\| = \|f\|$$

نتیجه ۱.۲.۱۳. [۳] *فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار و G زیرفضایی از X باشد و $x_0 \in X$ طوری باشد که $d(x, G) = d > 0$. آنگاه $f \in X^*$ موجود است که*

۱. $f(x_0) = 1$

۲. $f(G) = 0 \qquad (\forall g \in G \quad f(g) = 0)$

۳. $\|f\| = \frac{1}{d}$

تعریف ۱.۲.۱۴. فرض کنید X یک فضای نرم دار باشد. طبق قضیه هان باناخ برای هر $x \in X$ غیر صفر $f \in X^*$ موجود است که $\|f\| = 1$ و $f(x) = \|x\|$. X را یک فضای نرم دار هموار[۱۱] گوئیم اگر برای هر $x \in X$، f یکتا باشد.

تعریف ۱.۲.۱۵. فرض کنیم X یک فضای برداری باشد و Y و Z دو زیر فضا از X باشند. گوئیم X جمع مستقیم[۱۲] Y و Z است و می‌نویسیم $X = Y \oplus Z$ اگر هر $x \in X$ را بتوان به صورت یکتا به فرم $x = y + z$ نوشت که $y \in Y$ و $z \in Z$.

---

[۹] Daul space

[۱۰] Hahn-Banach

[۱۱] Smooth

[۱۲] Direct sum

تعریف ۱.۲.۱۶. فرض کنید X یک فضای برداری باشد گوئیم H یک ابر صفحه[۱۳] در X است اگر بتوان X را به صورت جمع مستقیم H و زیرفضایی یک بعدی از X نوشت به عبارت دیگر $X = H \oplus [x]$
.

قضیه ۱.۲.۱۷. [۱۲] *فرض کنید G یک زیر مجموعه بسته و فشرده از فضای نرم دار X باشد. و $\{F_n\}$ دنباله نزولی از زیر مجموعه‌های غیر تهی از G باشد. آنگاه $\cap_{n=1}^{\infty} F_n$ غیر تهی است.*

۱-۳ فضاهای ضرب داخلی

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید $(X, +, .)$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ $(\mathbb{F} = \mathbb{R}$یا$\mathbb{C})$ باشد. یک ضرب داخلی روی X تابعی است مانند $<.,.>: X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ به طوری که:

۱. $< x, x > \geq 0 \qquad \forall x \in X$

۲. $< x, x >= 0 \Longleftrightarrow x = 0$

۳. $< \alpha x, y >= \alpha < x, y > \qquad (\alpha \in \mathbb{F})$

۴. $< x, y >= \overline{< y, x >}$

۵. $< x + z, y >=< x, y > + < z, y >$

ملاحظه ۱.۳.۲. تابع ضرب داخلی نسبت به متغیر دوم مزدوج خطی است. یعنی به ازای هر $x, y, z \in X$ و اسکالر α داریم:

۱. $< x, y + z >=< x, y > + < x, z >$

۲. $< x, \alpha y >= \overline{\alpha} < x, y >$

مثال ۱.۳.۳. فضای برداری تمام توابع مختلط پیوسته بر $[0, 1]$ همراه با ضرب داخلی به صورت زیر یک فضای ضرب داخلی است.

$$< f, g >= \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt.$$

[۱۳] Hyperplane

اگر $(X, <.,.>)$ یک فضای ضرب داخلی باشد، آنگاه با استفاده از ضرب داخلی در این فضا می‌توان نرمی به صورت زیر تعریف کرد:

$$\|\,.\,\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\| x \| = \sqrt{< x, x >}$$

در این صورت X به یک فضای خطی نرم دار تبدیل می‌شود.

قضیه ۱.۳.۴. (*قانون متوازی الاضلاع*[۱۴]) *فرض کنید X یک فضای ضرب داخلی باشد و $x, y \in X$ در این صورت*

$$\| x + y \|^{2} + \| x - y \|^{2} = 2(\| x \|^{2} + \| y \|^{2})$$

۱-۴ فضاهای هیلبرت

تعریف ۱.۴.۱. فضای برداری X روی میدان $\mathbb{F}$ همراه با ضرب داخلی $<.,.>$ را یک فضای هیلبرت[۱۵] می‌نامیم اگر با متر $d(x, y) = \| x - y \|$ حاصل از ضرب داخلی یک فضای کامل باشد.

قضیه ۲.۴.۱. *فرض کنیم H فضای هیلبرت و K زیر مجموعه بسته از H باشد و $h \in H$، نقطه‌ی یکتای $k_{\circ} \in K$ وجود دارد به طوری که*

$$\| h - k_{\circ} \| = d(h, K) = inf\{\| h - k \| \qquad k \in K\}$$

اثبات. به مرجع [۳] صفحه ۱۵ مراجعه شود. □

تعریف ۳.۴.۱. فرض کنیم H یک فضای هیلبرت و $x, y \in H$، گوئیم x بر y عمود است اگر $< x, y > = \circ$.

تعریف ۴.۴.۱. فرض کنید G زیر مجموعه‌ی بسته از فضای هیلبرت H باشد. متمم متعامد[۱۶] G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$G^{\perp} = \{y \in H, \quad < y, x > = \circ, \qquad \forall x \in G\}$$

---

[۱۴] Parallelogram law

[۱۵] Hilbert space

[۱۶] Orthogonal complement