بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه لرستان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

عنوان

روشی از نوع گرادیان مزدوج برای حل سیستم های خطی با ضرایب متقارن مختلط

نگارش

لیلا دلفانی

استاد راهنما

دکترمجتبی فاسمی کمالوند

استاد مشاور

دکتر بهمن غضنفری

پایان نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی کاربردی

شهریور۱۳۹۲

چکیده

نام خانوادگی: دلفانی **نام:** لیلا

عنوان پایان نامه: روشی از نوع گرادیان مزدوج برای حل سیستم های خطی با ماتریس ضرایب متقارن مختلط

استاد راهنما : دکتر مجتبی قاسمی کمالوند **استاد مشاور:** دکتر بهمن غضنفری

درجه تحصیلی : کارشناسی ارشد **رشته :** ریاضی کاربردی(جبرخطی عددی)

محل تحصیل : دانشگاه لرستان **دانشکده :** علوم پایه

تاریخ فارغ التحصیلی: شهریور ۹۲ **تعداد صفحات:**۷۶

کلید واژه‌ها: زیرفضای کریلف، هم ارزی یکانی، $CSYM$

چکیده: در این مقاله سیستم های خطی اسپارس بزرگ $Ax = b$با ماتریس ضرایب متقارن مختلط ($A = A^T$)که به طور مثال از گسسته سازی معادلات دیفرانسیل جزیی با ضرایب مختلط حاصل شده، بررسی می شود. برای جواب چنین سیستم هایی، ما یک روش تکراری از نوع گرادیان مزدوج جدید به نام $CSYM$که براساس تبدیلات همنهشتی یکانی ماتریس Aبه فرم سه قطری متقارن تبدیل شده است را ارائه می دهیم و در مورد زیرفضای کریلف بودن یا نبودن این روش به بحث می پردازیم.

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت های او ندانند و کوشندگان حق او را گزاردن نتوانند و سلام و دردو بر محمد و خاندان پاک او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان وامدار وجودشان است؛ و نفرین پیوسته بر دشمنان ایشان تا روز رستاخیز...

بدون شک جایگاه و منزلت معلم اجل از آن است که در مقام قدر دانی از زحمات بی شائبه ی او با زبان قاصر و دست ناتوان چیزی بنگاریم.

اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت افرینش را تامین می کند و سلامت امانت هایی که به دستش سپرده اند تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب "من لم یشکر المنعمم من المخلوقین لم یشکر الله عزّ و جلّ" : از**پدر و مادر عزیزم** ... این دو معلم بزرگوارم ...که همواره بر کوتاهی و درشتی من قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت های من گذشته اند و در تمام عرصه های زندگی یار و یاور بی چشم داشت برای من بوده اند؛از استاد باکمالات و شایسته،جناب **دکتر مجتبی قاسمی کمالوند** که در کمال سعه صدر با حسن خلق،از هیچ کمکی در این عرصه دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند؛از استاد صبور و با تقوا،جناب آقای **دکتربهمن غضنفری** که زحمت مشاوره این رساله را در حالی متقبل شدند که بدون مساعدت ایشان این پروژه به نتیجه مطلوب نمی رسید و از استاد فرزانه و صبور جناب آقای **دکتر مجید یاراحمدی** که زحمت داوری این رساله را با وجود مشغله ی کاری فراوان متقبل شدند کمال تشکر و قدر دانی را داریم.

باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید .

تقدیم به مهربان فرشتگانی که :

لحظات ناب باور بودن، غرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام تجربه های یکتا و زیبای زندگی ام، مدیون حضور سبز آنهاست

تقدیم به خوانواده ی عزیزم .

پیشگفتار

مسئله ی حل سیستم های نامنفرد اسپارس بزرگ معادلات خطی

$$Ax = b \quad \text{که} \quad A \in \mathbb{C}^{n,n} \quad \text{و} \quad x, b \in \mathbb{C}^n \tag{۱}$$

به طور مثال زمانی رخ می دهد که معادلات دیفرانسیل جزیی با توابع ضریب مختلط یا شرایط مرزی مختلط گسسته شده اند. اما به واسطه ی بعد زیاد و اسپارس بودن سیستم روش های تکراری برای چنین مسائلی به کار می روند. در بسیاری از مثال ها ماتریس Aسبکی خاص را ارائه می دهد: فرض کنیم A متقارن مختلط است یعنی

$$A = A^T \quad \Longleftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \quad ۱ \leq i, j \leq n.$$

یک روش رایج برای حل معادله ی (۱)، عبارت است از حل معادله نرمال $A^H Ax = A^H b$ با استفاده از الگوریتم گرادیان مزدوج پیش شرط. با وجود اینکه این روش برای هر سیستم خطی به کار می رود آقای فروند [۱] [۵]یک روش QMR اصلاح شده را مطرح کرد و روش دیگر،روش $CSYM$ می باشد که در ادامه توضیح خواهیم داد. یک روش از نوع گرادیان مزدوج با باقیمانده های گوسی مینیمال بر اساس دور لانزوس [۲] [۸]که درواقع ساختاری خاص دارد. در روش ارائه شده در اینجا ما یک دنباله از بردارهای $q_۱, q_۲, \cdots$

[۱] Freund

[۲] Lanczos

را توسط سه رابطه ی بازگشتی مشابه روش لانزوس ایجاد می کنیم بطوریکه برای هر $k = ۱, ۲, \cdots$ و $Q_k = [q_۱, q_۲, \cdots, q_k]$ قرار می دهیم

$$AQ_k = \overline{Q}_k T_k + w_{k+۱} e_k^T \qquad (۲)$$

که T_k یک ماتریس سه قطری متقارن مختلط $k \times k$ می باشد، $w_{k+۱} \in \mathbb{C}^n$ و $\overline{Q_k}$ دلالت می کند بر مزدوج ماتریس Q_k (بصورت مولفه ای). بردار های ستونی Q_k بصورت

$$q_k = \frac{\overline{w_{k+۱}}}{\sqrt{w_{k+۱}^H w_{k+۱}}} \qquad (۳)$$

محاسبه شده اند که منجر به یک دنباله ی یکه متعامد $q_۱, q_۲, \ldots$ می شود، یعنی Q_k ستون های متعامدیکه دارد. در اینجا اندیس بالایی H بر ترانهاده ی مزدوج دلالت میکند، لذا ما با ضرب اسکالر استاندارد در $\mathbb{C}^n$ کار می کنیم. از آنجایی که $w_{k+۱}^H = ۰$ فقط اگر $w_{k+۱}$ مساوی صفر باشند لذا هیچکدام از q_kها صفر نمی شوند. برای تقریب x_k به جواب، ما بردارهایی را انتخاب می کنیم که باقیمانده های مینیمالی تحت زیر فضای تولید شده توسط ستون های Q_k ایجاد می کنند.

این پایان نامه شامل چهار فصل می باشد که در فصل اول، تعاریف مقدماتی، چند قضیه و شرح مختصری از روش های مستقیم و تکراری حل دستگاه ها داده شده است. در فصل دوم، سه قطری سازی و الگوریتم آن داده شده است و روش بدست آوردن باقیمانده مینیمال دستگاه $Ax = b$ شرح داده شده است. در فصل سه، الگوریتم $CSYM$ و آنالیز آن داده شده و زیر فضای کریلف بودن یا نبودن آن بررسی شده است و در

نهایت آنرا با دیگر روش ها مقایسه کرده ایم. در فصل آخر، چند مثال عددی و نتیجه گیری را ارائه داده ایم.
در تمام پایان نامه فرض شده که تمام بردارها و ماتریس ها مختلط باشند و ماتریس ضرایب A همواره $n \times n$ و نامنفرد و متقارن است مگر اینکه صریحا بیان شده باشد. $\overline{M}$ مزدوج مختلط M (بصورت مولفه ای) است و $ReM = \dfrac{M + \overline{M}}{۲}$ قسمت حقیقی و $ImM = \dfrac{M - \overline{M}}{۲i}$ قسمت موهومی ماتریس M است. $\|x\| = \sqrt{x^H x}$ نرم اقلیدسی بردار و $\prod_k := \{p(\lambda) = \sum_{j=۰}^{k} \gamma_j \lambda^j \mid \gamma_j \in \mathbb{C}\}$ مجموعه ی همه ی چند جمله ای های مختلط با حداکثر درجه k می باشد و e_k عبارت است از $k-$امین بردار کانونی واحد از فضای برداری نظیر .

مقاله اصلی مورد مطالعه و بررسی در این پایان‌نامه، مقاله زیر می‌باشد:

$$On\ a\ conjugate\ gradient-type\ method$$

$$for\ solving\ complex\ symmetric\ linear\ systems\ ,\ Linear\ Algebra\ and\ its\ Applications$$

$$۲۸۷(۱۹۹۹)۱۰۵ - ۱۲۳$$

در انتهای این پایان‌نامه، کتاب‌نامه و واژه‌نامه فارسی به انگلیسی مورد استفاده در این پایان‌نامه درج شده است.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

فصل ۱

تعاریف و پیش نیاز ها

تعاریف این فصل از منابع [۷] و [۱۲] و [۱۵]گرفته شده است.

تعریف ۱.۰.۰.۱. همواره برای حل سیستم خطی $Ax = b$ دو روش مستقیم و غیر مستقیم (تکراری) وجود دارد.

روش مستقیم:

در روش مستقیم ابتدا ماتریس ضرایب A را به یک ماتریس بالا مثلثی تبدیل کرده و سپس با استفاده از روش حل دستگاه های با ماتریس ضرایب بالامثلثی آنرا حل می کنیم برای این منظور روش هایی مثل حذفی گاوس و تجزیه ی QR وLU وجود دارند به طور مثال برای حل سیستم $Ax = b$ باروش حذفی گاوس بدون محور گیری داریم $A = LU$، ابتدا $Ly = b$ راحل کرده و سپس با حل $Ux = y$ ، x حاصل می شود که همان جواب سیستم $Ax = b$ می باشد.

روش های تکراری:

روش های تکراری برای حل سیستم های خطی با ماتریس ضرایب بسیار بزرگ و اسپارس (یعنی ماتریسی که بیشتر درایه هایش صفر است) استفاده می شود. برخی روش های تکراری عبارتند از QMR و CG .

ایده اساسی:

برای رسیدن به جواب $Ax = b$ آنرا به شکل $x = Bx + d$ می نویسیم با تخصیص مقدار آغازین $x^{(1)}$ شروع می کنیم و دنباله ی $\{x^{(k)}\}$ را به شکل زیر بدست می آوریم:

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + d \qquad k = 1, 2, \cdots$$

با امید به اینکه دنباله ی $\{x^{(k)}\}$ همگرا به جواب دستگاه باشد (زمانی که $k \longrightarrow \infty$).

پایان این الگوریتم را می توان به روش های مختلف تعریف کرد مثلا الگوریتم پایان می پذیرد هرگاه

$$\|\frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{x^{(k)}}\| \leq \varepsilon$$

که در آن ε یک عدد کوچک دلخواه است.

الگوریتم لانزوس:[1]

یک ماتریس $n \times n$ متقارن A و یک بردار واحد v_1 داده شده است، الگوریتم لانزوس به طور همزمان یک

[1] Lanczos

ماتریس سه قطری

$$T=\begin{bmatrix}\alpha_۱ & \beta_۱ & \cdots & ۰\\ \beta_۱ & \alpha_۲ & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta_{n-۱}\\ ۰ & \cdots & \beta_{n-۱} & \alpha_n\end{bmatrix}$$

و یک ماتریس متعامد یکه $V=(v_۱,\cdots,v_n)$ به ما می دهد بطوریکه $V^TAV=T$.

الگوریتم به سادگی می تواند به شرح زیر نتیجه شود:

فرض

$$T=\begin{bmatrix}\alpha_۱ & \beta_۱ & \cdots & ۰\\ \beta_۱ & \alpha_۲ & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta_{n-۱}\\ ۰ & \cdots & \beta_{n-۱} & \alpha_n\end{bmatrix}$$

و $V=(v_۱,v_۲,\cdots,v_n)$. آنگاه معادله ی

$$V^TAV=T$$

یا

$$AV=VT$$

در نتیجه

$$A(v_۱, v_۲, \cdots, v_n) = (v_۱, v_۲, \cdots, v_n)\begin{bmatrix} \alpha_۱ & \beta_۱ & \cdots & ۰ \\ \beta_۱ & \alpha_۲ & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta_{n-۱} \\ ۰ & \cdots & \beta_{n-۱} & \alpha_n \end{bmatrix}$$

لذا می توان نوشت

$$Av_j = \beta_{j-۱}v_{j-۱} + \alpha_j v_j + \beta_j v_{j+۱} \qquad j = ۱, ۲, \cdots, n \tag{۱.۱}$$

(با فرض اینکه $\beta_۰ v_۰ = ۰, \beta_n v_{n+۱} = ۰$). باضرب طرفین معادله ی فوق در v_j^T و با در نظر گرفتن شرط متعامد یکه بودن، یعنی

$$v_j^T v_j = ۱$$

$$v_j^T v_k = ۰ \qquad j \neq k$$

بدست می آوریم

$$\alpha_j = v_j^T A v_j \qquad j = ۱, ۲, \cdots, n \tag{۲.۱}$$

همچنین اگر بنویسیم

$$r_j = Av_j - \alpha_j v_j - \beta_{j-1} v_{j-1} \tag{۳.۱}$$

آنگاه از (۱.۱) و (۳.۱) بدست می آوریم

$$v_{j+1} = \frac{r_j}{\beta_j}$$

مشروط بر اینکه $\beta_j \neq 0$. صفر نشدن β_j می تواند تضمین شود اگر $\beta_j = \|r_j\|_2$.

بحث فوق منجر به ارائه ی الگوریتمی می شود که آنرا الگوریتم لانزوس پایه گویند.

الگوریتم لانزوس پایه:

$$Set \quad v_0 = 0 \ , \ \beta_0 = 1 \ , \ r_0 = v_1 \ .$$

$$For \quad j = 1, 2, \cdots, n \quad do$$

$$v_j = r_{j-1}/\beta_{j-1}$$

$$\alpha_j = v_j^T A v_j$$

$$r_j = (A - \alpha_j I) v_j - \beta_{j-1} v_{j-1}$$

$$\beta_j = \|r_j\|_2$$

توجه داشته باشیم که:

۱)بردار های $v_1, \cdots, v_j$ رابردار های لانزوس گویند.

۲)هر بردار لانزوس v_{j+1} نسبت به بردارهای قبلی خود متعامد است، لذا $\beta_j \neq 0$.

۳)بردارهای $\{v_1, \cdots, v_j\}$ تشکیل یک پایه متعامد یکه برای زیر فضای کریلف $K_j(A, v_1)$ می دهند که در ادامه به تعریف زیرفضای کریلف اشاره شده است.

تعریف ۲.۰.۱. فرض A یک ماتریس $n \times n$ و v_1 یک n-بردار باشد زیرفضای کریلف[۲] از بعد m را با نماد $K_m(A, v_1)$ نمایش داده و به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$K_m(A, v_1) = span\{v_1, Av_1, A^2v_1, \cdots, A^{m-1}v_1\} \subseteq \mathbb{C}^n$$

که در آن $\mathbb{C}^n$ فضای برداری مختلط n بعدی می باشد.

حال صورت اصلاح شده ی الگوریتم گرام اشمیت [۳] را که در محاسبات موثر است ارائه می دهیم.

فرض می کنیم $m \leq n$ باشد:

[۲] Krylov

[۳] Gram-Schmidt

$$Set \quad v_۰ = ۰ \ , \ \beta_۰ = ۱ \ , \ r_۰ = v_۱$$

$$For \quad j = ۱, ۲, \cdots, m \quad do$$

$$step۱ \quad v_j = r_{j-۱}/\beta_{j-۱}$$

$$step۲ \quad u_j \equiv Av_j$$

$$step۳ \quad r_j \equiv u_j - \beta_{j-۱}v_{j-۱}$$

$$step۴ \quad \alpha_j = v_j^T u_j$$

$$step۵ \quad r_j = r_j - \alpha_j v_j$$

$$step۶ \quad \beta_j = \|r_j\|$$

تعریف ۳.۰.۱. ماتریس $A_{n\times n}$ را معین مثبت گوییم هرگاه برای هر بردار غیر صفر $x \in \mathbb{R}^n$ (یعنی $x = [x_۱, x_۲, \cdots, x_n]^T \neq ۰$) داشته باشیم

$$x^T Ax > ۰ \ .$$

روش گرادیان مزدوج(CG[۴]):

در اینجا یک روش معروف به روش گرادیان مزدوج را برای حل یک دستگاه با ماتریس ضرایب معین مثبت و متقارن

$$Ax = b$$

توضیح می دهیم .

قضیه ۱.۰.۱. اگر A یک ماتریس معین مثبت متقارن حقیقی باشد، آنگاه حل

$$Ax = b$$

معادل با مینیمم کردن تابع درجه دوم

$$\phi(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b$$

می باشد. بعلاوه مینیمم مقدار تابع $\phi(x)$ برابر $-\frac{1}{2}b^T A^{-1}b$ می باشد و با انتخاب $x = A^{-1}b$ بدست می آید .

روش ها ی تکراری بسیاری در مباحث بهینه سازی برای حل این دستگاه مینیمم سازی وجود دارند. در این

[۴] Conjugate gradient