چکیده

دراین پایان نامه به بررسی عملگرهای یکنوای بیشین پرداخته شده همچنین نشان می دهیم که هر عملگر یکنوای بیشین را می توان توسط یک رده ویژه از توابع محدب نشان داد و با معرفی تابع فیتز پاتریک نشان می دهیم که این تابع دراین رده از این توابع کمین است سپس نشان می دهیم که درفضاهای با ناخ عناصر مینیمال خانواده ای ازتوابع محدب که بوسیله ی حاصلضرب دوگانی از پایین کراندار شده اند نیز همان تابع فیتز پاتریک وابسته به عملگرهای یکنوای بیشین است همچنین به بررسی نقاط ثابت برای رده ویژه ا زتوابع که نشان دهنده یک عملگر یکنوای بیشین است می پردازیم .

کلمات کلیدی :

فضای با ناخ – عملگرهای یکنوای بیشین – توابع محدب – زیردیفرانسیل – مزدوج تابع

فصل اول

تعاریف و قضایای مقدماتی ۳

فصل دوم

عملگرهای یکنوا ویکنوای بیشین

(۲-۱) تعاریف ، قضایا و خواصی راجع به عملگرهای یکنوا ویکنوای بیشین ۱۰

(۲-۲) یافتن عناصری از $X \times X^*$ با خواصی ویژه وارائه شرط کافی برای یکنوائی بیشین ، زیرمجموعه هایی از $X \times X^*$ به کمک این عناصر ۱۹

(۲-۳) معرفی تابع دوگان وارائه شرایط لازم وکافی برای یکنوائی بیشین ، زیرمجموعه هایی از $X \times X^*$ به کمک این تابع ۲۸

(۲-٤) ارائه شرط کافی برای یکنوائی بیشین ، مجموع دو تابع یکنوای بیشین ۳۳

فصل سوم

قضیه فیتزپاتریک برای عملگرهای یکنوای بیشین درفضای با ناخ

(۳-۱) تعاریف اولیه ۳۵

(۳-۲) معرفی تابع فیتز پاتریک وبررسی خواص آن ۳٦

(۳-۳) قضیه فیتز پاتریک درفضاهای بازتابی ۳۷

(۳-٤) عکس قضیه فیتز پاتریک درفضاهای بازتابی.. ۵۲

(۳-۵) بررسی عضو کمین خانواده ای از توابع محدب که از پائین توسط حاصلضرب دوگانی کراندار شده اند ۵٦

فصل چهارم

وجود نقاط ثابت برای مزدوج عناصرخانواده توابع ، نشان دهنده یک عملگریکنوای بیشین

(٤-۱) بررسی یکنوائی بیشین ، زیر دیفرانسیل توابع محدب که نیم پیوسته پائین وسره هستند ٦۱

(٤-۲) وجود توابعی از $И(T)$ که با مزدوج فنچل خودبرابرند ٦۲

(٤-٣) معرفی مجموعه $L(h)$ وارائه شرط لازم وکافی برای عضو مینیمال این مجموعه........................ ٦٦

فصل پنجم

بررسی روابط موجود بین تابع فیتزپاتریک با توابع و مجموعه های خاص

(٥-١) تعاریف اولیه... ٧٠

(٥-٢) معرفی توابع S_A , δ_A وارائه روابط بین این توابع وتابع فیتز پاتریک ٧٢

(٥-٣) ارائه شرایط لازم وکافی برای یکنوای $A \subset X \times X^*$ به کمک تابع فیتز پاتریک.......................... ٧٤

(٥-٤) بررسی نمودار توابع یکنوا ٧٧

(٥-٥) معرفی مجموعه های $F(A)$, $R(A)$ وارائه شرط لازم وکافی برای یکنوای $A \subset X \times X^*$ به کمک این توابع ٧٨

پیشگفتار

آنالیز محدب دربسیاری از شاخه های ریاضی ازجمله آنالیز تابعی و بهینه سازی مطرح می شود عملگرهای یکنوای بیشین از جمله مباحثی است که به طور طبیعی درآنالیز محدب ظاهر می شود برای کار با اینگونه از عملگرها پارا از حیطه آنالیز محدب فراتر گذاشته وبا مسائل ریاضی دیگری روبرو می شویم . به طور مثال یکی از رایج ترین مشکلاتی که ممکن است با آن برخورد کنیم عدم مشتق پذیری یک تابع دریک نقطه مشخص است .راه حلی که برای اینگونه از مسائل درآنالیز تابعی پیشنهاد می شود استفاده از زیر دیفرانسیل تابع درنقطه مورد نظر است ولی مشکل اساسی محاسبه زیر دیفرانسیل تابع در نقطه مورد نظر است که در اکثر موارد بسیاردشوار است. در فصل ۴ اثبات می شود که زیر دیفرانسیل توابع محدب ، نیم پیوسته پائین وسره یکنوای بیشین است درواقع ناخود آگاه وارد مسائل عملگرهای یکنوای بیشین می شویم ومی توانیم از قضایا وخواص این عملگرها برای محاسبه زیردیفرانسیل استفاده کنیم درسال ۱۹۸۸ فیتز پاتریک [۵] نشان داد که هر عملگرهای یکنوای بیشین را می توان توسط یک رده خاص ا زتوابع محدب نشان داد همچنین وی وابسته به هر عملگریکنوای بیشین یک تابع خاص (تابع فیتز پاتریک) معرفی کرد ونشان داد که این تابع جزء همین رده از توابع محدب و علاوه براین دراین رده از توابع عضو کمین است.

سپس این سئوال مطرح شد که آیا عکس مطالب فوق نیز صحیح است یعنی به ازای هر خانواده ازتوابع محدب می توان عملگریکنوای بیشینی تعریف کرد. درسال (۲۰۰۳) پروچیک [۱] به این سئوال پاسخ داد وی مجموعه ای به نام $И(T)$ تعریف کرد که هریک از عناصر این خانواده دردونامساوی ویژه صدق می کنند و درواقع عکس قضیه فیتزپاتریک را اثبات کردهمچنین درسال (۲۰۰۶)مارتینزلگاز واسویتر [۶] نشان داده اند که در فضاهای با ناخ بازتابی عناصر کمین از خانواده ای از توابع محدب که بوسیله حاصلضرب دوگانی از پایین کراندار شده اند نیز همان تابع فیتز پاتریک وابسته به عملگرهای یکنوای بیشین است طبق آنچه فیتز پاتریک [۵] اثبات کرد اگر هر عملگر یکنوای بیشین را بتوان توسط خانواده ای از توابع محدب تعریف کرد این سئوال مدنظر قرار گرفت که آیا عناصر از این خانواده وجود دارند که با مزدوج خود برابر باشند درسال (۲۰۰۰) اسویتر [۱۳] طی مقاله ای به ارائه شرایط لازم و کافی برای وجود چنین توابعی پرداخت درفصل یک به ارائه قضایا وتعاریف که در فصل های بعدی استفاده می شوند می پردازیم وکلیه مطالب فوق به طور جداگانه

درفصل های ۳ و ۴ مورد بررسی کامل قرار گرفته و کلیه قضایا به طور کامل ارائه می شود همچنین درفصل ۲ به بررسی عملگرهای یکنوا و یکنوای بیشین پرداخته و قضایائی از آن ارائه شده است .

سرانجام درفصل ۵ به معرفی s_A ، δ_A پرداخته وبه بررسی رابطه این توابع به تابع فیتزپاتریک می پردازیم همچنین بستارنمائی یکنوای A مورد بررسی قرار می گیرد .

فصل ۱

تعاریف وقضایای مقدماتی

دراین بخش به بیان تعاریف وقضایایی ازآنالیز تابعی می پردازیم . با توجه به این که اثبات این قضایا در کتاب های مربوطه آمده است تنها به ذکر منابع اکتفا می گردد.

تعریف(۱-۱)

یک فضای ضرب داخلی ، یک فضای برداری بایک ضرب داخلی تعریف شده روی X است .

تعریف (۱-۲)

فرض کنید که X یک فضای برداری حقیقی باشد یک نیم نرم روی X ، تابعی است به

صورت $\|\cdot\|:X\rightarrow \mathbb{R}_+$ می باشد به قسمی که برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ وهر $x,y \in X$ داشته باشیم

۱) $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$

۲) $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$

یک نیم نرم ، یک نرم نامیده می شود هرگاه داشته باشیم

$\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$

تذکر (۱-۳)

فضاهای ضرب داخلی ، فضای نرم دار بانرم $\|x\|=\sqrt{x.x}$ هستند

تعریف (۱-۴)

به یک فضای نرم دار ،که هر دنباله کوشی درآن همگرا باشد ، یک فضای کامل می گوییم .

تعریف (۱-۵)

یک فضای برداری نرم دار را فضای با ناخ گوییم ، اگر با نرم تعریف شده روی فضا کامل باشد بعبارت دیگر هر دنباله کوشی درآن همگرا باشد .

تعریف (۱-۶)

یک فضای برداری حقیقی مانند X با توپولوژی را یک فضای برداری توپولوژیکی گوییم هر گاه

i) نگاشت $(x,y) \to x+y$ از $X \times X$ به X پیوسته باشد .

ii) نگاشت $(\lambda,x) \to \lambda x$ از $\mathbb{R} \times X$ به X پیوسته باشد .

تعریف (۱-۷)

فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیکی برداری باشد ، فضای تمام توابع خطی وپیوسته از X به $\mathbb{R}$رافضای دوگان X می نامیم وآن را به X^* نمایش می دهیم .

تعریف (۱-۸)

فرض کنید که X یک فضای برداری توپولوژیکی باشد توپولوژی ضعیف ستاره روی X^* که با

$\sigma(X^*, X)$ نمایش داده می شود توپولوژی است که توسط خانواده نیم نرم ها

$\{ P_x : x\in X\}$ به صورت $P_x(x^*)=|< x, x^* >|$ تولید می شود .

توپولوژی ضعیف ستاره راگاهی با w^* -توپولوژی نمایش می دهیم .

تعریف (۱ - ۹)

فضای باناخ X راانعکاسی گوییم هر گاه نگاشت متعارف $\mathcal{J}: X \to X^{**}$ که به صورت زیرتعریف شده است $\mathcal{J}(x)=\hat{x}(x^*) = x^*(x)$ پوشا باشد.

تعریف (۱-۱۰)

اگر X یک فضای برداری باشد زیر مجموعه K از X رامحدب گوئیم اگر برای هر $y\in K$ و x داشته باشیم

$$\lambda x + (۱\text{-}\lambda)\, y \in K\,,\ \ \forall\, \lambda\in [۰,۱]$$

تعریف(۱- ۱۱)

تابع $f{:}K\to \mathbb{R}$ روی مجموعه محدب K را محدب گوئیم هر گاه برای

هر $x,y \in K$ و$\lambda \in [۰،۱]$ داشته باشیم

$$f(\lambda x+(۱\text{-}\lambda)y) \leq \lambda\, f(x) +(۱\text{-}\, \lambda)\, f(y)$$

تابع f مقعر است اگر f - محدب باشد .

تعریف (۱-۱۲)

تابع $f: K \to \mathbb{R}$ را همگن مثبت گوئیم هرگاه به ازای هر $t > 0$ و $x \in K$ داشته باشیم $f(\mathrm{t}x) = \mathrm{t}f(x)$

تعریف (۱-۱۳)

مجموعه غیر تهی I همراه با رابطه $\leq$ یک مجموعه جهت دارشده گوئیم هر گاه :

i) برای هر $\alpha \in \mathrm{I}$ ، $\alpha \leq \alpha$

ii) اگر $\alpha \leq \beta$ و $\beta \leq \gamma$ آ نگاه $\alpha \leq \gamma$

iii) برای هر α و β دلخواه درI عضوی مانند γ درI وجود داشته باشد به طوری که $\beta \leq \gamma$, $\alpha \leq \gamma$

تعریف(۱-۱۴)

رابطه $\leq$ روی مجموعه مفروض A ، رابطه ترتیبی جزئی است اگر و فقط اگرا ین رابطه روی A انعکاسی ومتعدی وپادمتقارن باشد (پادمتقارن بودن $\leq$ به این معنی است که اگر $a \leq \mathrm{b}$, $\mathrm{b} \leq a$ آنگاه a=b).

دراین صورت بااین ترتیب مجموعه ($A \leq$) را مجموعه مرتب جزئی نامند .

تعریف (۱-۱۵)

هرگاه I یک مجموعه جهت دار شده و X مجموعه ای دلخواه باشددراین صورت یک تابع

f:I →X رایک توردر X می نامیم . معمولا تور f رابابرد آن یکی می گیریم وبا نماد $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ نمایش می دهیم

که درآن برای هر$\alpha \in \mathrm{I}$ ، $x_\alpha = \mathrm{f}(\alpha)$. I رانیز مجموعه اندیس برای تور f می نامیم .

تعریف (۱ -۱۶)

اگر X فضای توپولوژیکی و $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ یک تور در X باشد , $x \in X$ راحد $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ گوییم هرگاه برای هر همسایگی U از x ، α_uمتعلق به I وجودداشته باشد به طوری که برای هر $\alpha \in \mathrm{I}$

به شرط $\alpha \geq \alpha_U$ داشته باشیم $x_\alpha \in \mathrm{U}$ ومی نویسیم

$\lim_\alpha x_\alpha = x$

تعریف(۱-۱۷)

رابطه $\leq$ روی مجموعه مفروض A ، رابطه ترتیبی کامل است ویا A توسط $\leq$ مرتب است اگر اولا یک رابطه ترتیبی جزئی باشد ثانیا به ازای هر دوعضودلخواه b,a در A ، $a \leq b$ یا $b \leq a$. همچنین ، درصورتی که $\leq$ رابطه ترتیبی کامل روی A باشد ، زوج مرتب ($\leq$ و A) رامجموعه کاملا مرتب نامند .

تعریف (۱-۱۸)

مجموعه مرتب جزئی ($\leq$ و A) مفروض است .

i) عضو $u \in A$ یک کران بالا برای زیر مجموعه B از A است اگروفقط اگر به ازای هر $b \in B$ ، $u \geq b$.

ii) کران بالای $u_\cdot$ از مجموعه B راکوچکترین کران بالای B نامیم اگر وفقط اگر به ازای هر کران بالای u از B داشته باشیم $u_\cdot \leq u$

iii)عضو $e \in A$ رابیشین نامیم اگر وفقط اگر به ازای هر $a \in A$ از $e \leq a$ نتیجه شود که $e = a$

تعریف (۱ -۱۹)

یک زیر مجموعه کاملا مرتب از مجموعه ای جزئی مرتب رازنجیر می نامند .

لم (۱-۲۰) (لم زورن)

اگر($\leq$ و A) یک مجموعه مرتب جزئی باشد به طوری که هر زیر مجموعه کاملا مرتب آن دارای یک کران بالا باشد آنگاه A دارای عضوبیشین است .

اثبات . به [۱۶] مراجعه شود .

تعریف (۱-۲۱)

اگر X , Y دوفضای برداری باشندو T یک نگاشت مجموعه مقدار $T:X \rightrightarrows Y$ یا نگاشت نقطه به مجموعه باشد آنگاه نمودارT به صورت زیر مشخص می شود .

$$\mathrm{Gr}\ (\mathrm{T}) =\{ (x,\mathrm{y}) \in X \times Y | \mathrm{y} \in T(x)\}$$

که $\mathrm{T}(x)$ رامقدار T در x می نامیم .

تعریف (۱-۲۲)

اگر $T:X\rightrightarrows Y$ یک نگاشت مجموعه مقدار باشد دامنه T رابه صورت زیر تعریف می کنیم .

$$\mathrm{DomT} =\{ x \in X: T(x) \neq \emptyset\}$$

وبرد T به صورت زیر است .

$$\mathrm{ImT}=\bigcup_{x \in X} T(x)$$

تعریف (۱- ۲۳)

فرض کنید که X , Y دوفضای متریک باشند وهمچنین $T:X\rightrightarrows 2^Y$ نگاشت مجموعه مقدار باشد T رانیم پیوسته بالا در $x_\circ \in X$ گوییم ، هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ یک همسایگی $N(x_\circ)$ وجود داشته باشد به قسمی که برای هر $x \in N(x_\circ)$ داشته باشیم

$$T(x)\subseteq T(x_\circ)+ \varepsilon B \ .$$

نگاشت T رانیم پیوسته بالائی می گوییم ، اگر درتمام نقاط X نیم پیوسته بالائی باشد .

گزاره (۱ – ۲۴)

فرض کنید که X یک فضای متریک باشد تابع $f:X\rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ نیم پیوسته پایینی است اگر وفقط اگر برای هر $x \in X$

$$f(x) \leq \lim_{y\rightarrow x} \inf f(y)$$

و نیم پیوسته بالائی است اگر وفقط اگر برای هر $x \in X$

$$f(x) \geq \limsup_{y \rightarrow x} f(y)$$

اثبات .به [۴] رجوع شود .

قضیه(۱ – ۲۵)

اگر X یک فضای نرم دار باشد و X^* دوگان آن باشد و M زیرفضای بسته سره از X باشد و $x \notin M$ آنگاه

$\exists x^* \in X^* \quad , \ \|x^*\| =۱ \ , \ d(x,M)=\delta$

$x^*(x)= \delta$

$x^*(y)=o \ , \ y\in M$

اثبات : به [۴] مراجعه شود .

نتیجه (۱-۲۶)

اگر X یک فضای برداری و $\mathbf{o} \neq x \in X$ آنگاه

$\exists x^* \in X^*$ و $x^*(x) = \|x\|$

اثبات : به [۴] مراجعه شود .

قضیه (۱-۲۷)

اگر X یک فضای هیلبرت باشد و $x^* \in X^*$ باشد آنگاه

$\exists! \, y \in X \ , \forall x \in X \quad x^*(x) =< x, y >$

اثبات به [۴] مراجعه شود .

تعریف(۱ - ۲۸)

غلاف محدب یک مجموعه ، کوچکترین مجموعه محدبی است که توسط آن مجموعه تولید می شود

یعنی اگر $\emptyset \neq S \subseteq X$ آنگاه

$Conv(S)=\{\sum_{i=۱}^{t} \alpha_i p_i, p_i \epsilon S / t \in \mathbb{N}, \sum_{i=۱}^{t} \alpha_i =۱, ۰ \leq \alpha_i \leq ۱\}$

تذکر (۱. ۲۹)

غلاف محدب یک مجموعه متناهی بسته است .

تعریف (۱-۳۰)

اگر $M, M \subseteq X \times X^*$ یکنواگوئیم هرگاه

$\forall (x, x^*) , (y , y^*) \in M :< x - y, x^* - y^* > \ \geq o \, .$

تعریف (۱-۳۱)

اگر $M\subseteq X\times X^*$، M رایکنوای بیشین گوئیم هرگاه اولاً M یکنواباشد ودرثانی اگر $M'\subseteq X\times X^*$ یکنواوشامل M باشد ، ایجاب کند که $M= M'$.

قضیه (۱-۳۲)

اگر X یک فضای موضعاً محدب و Y یک فضای خطی و $A\subset X$ یک مجموعه غیر تهی ،محدب وفشرده همچنین $B\subset Y$ یک مجموعه محدب وغیر تهی باشد و $f: A\times B \to \mathbb{R}$ به نحوی که $f(\cdot,y)$ مقعر و نیم پیوسته بالا برای هر $y\in B$ ، $f(x,\cdot)$ محدب برای هر $x\in A$ باشند آنگاه

$$\max_{x\in A}\ \inf_{y\in B} f(x,y) = \inf_{y\in B}\ \max_{x\in A} f(x,y).$$

اثبات به [۱۷] مراجعه شود.

فصل ۲

عملگرهای یکنواویکنوای بیشین

دراین فصل به معرفی عملگرهای یکنواو یکنوای بیشین پرداخته ووابسته به هر مجموعه یکنوای بیشین مانند $M \subset X \times X^*$ تابعی خاص به نام χ_M تعریف کرده وکلیه روابط بین این تابع و مجموعه M را بررسی می کنیم سپس به پیداکردن عناصری خاص از $X \times X^*$ پرداخته که درنابرابری ویژه ای صدق کنند وبه کمک آنها شرطی لازم وکافی برای یکنوای بیشینی، M بدست می آوریم و سرانجام به معرفی تابع دوگان وخواص آن پرداخته و شرط لازم وکافی برای یکنوای بیشینی M را به کمک آن پیدامی کنیم ودرآخر به ارائه شرطی کافی برای یکنوای بیشینی ، مجموع دو تابع یکنوای بیشین می پردازیم .

تعریف(۲-۱)

اگر $\mathbb{R}^E$ کلاس توابع E به $\mathbb{R}$ باشد، زیرمجموعه ای ازاین کلاس را به صورت

$S_E := \{\mu: E \to [o, +\infty[\,\big|\,$ باشد $supp\mu$ متناهی و $\sum_{x\in E} \mu(x) = ۱\}$ درنظر می گیریم که درآن E زیر مجموعه ای غیر تهی و.$supp\mu:=\{x \in E | \mu(x) \neq o\}$همچنین هر گاه $A \subset E$ غیر تهی باشد، آنگاه

$S_A=\{\mu \in S_E | supp\mu \subset A\}$

گزاره(۲-۲)

اگر$\emptyset \neq A \subset B \subset E$ آنگاه $S_A \subset S_B$

تعریف (۲- ۳)

اگر $u \in E$ را عضوی ثابت از E فرض کنیم آنگاه

$$\mu(x)=\delta_u(x)=\begin{cases} ۱ & x = u \\ o & x \neq u \end{cases}$$

تعریف(۲-۴)

اگر در تعریف (۲-۱) $E = X \times X^*$ در نظر بگیریم توابع p, q, rرا بصورت زیر درنظر بگیریم .

$p: S_{X\times X^*} \to X \quad , \; p(\mu) := \sum_{(x,x^*)\in X\times X^*} \mu(x,x^*).\, x$ و

$q: S_{X\times X^*} \to X^*, q(\mu) := \sum_{(x,x^*)\epsilon X\times X^*} \mu(x,x^*).\, x^*$ و

$$r: S_{X\times X^*} \to R, r(\mu) := \sum_{(x,x^*)\in X\times X^*} \mu(x,x^*). < x, x^* >.$$

توجه داریم که p, q, r توابعی آفین هستند .

قضیه (۲-۵)

اگر $\emptyset \neq M \subset X \times X^*$ آنگاه M یکنواست $\Leftrightarrow \forall \mu\epsilon S_M: r(\mu) \geq < p(\mu), q(\mu) >$

اثبات:فرض کنیم که M یکنواست و $\mu\epsilon S_M$ آنگاه

$$\mathrm{supp}\mu = \{(x_۱, x_۱^*), \ldots, (x_n, x_n^*)\} \quad , n \in \mathbb{N}.$$

برای $۱\leq i \leq n$ قرار می دهیم$\alpha_i = \mu(x_i, x_i^*)$ ،آنگاه

$$r(\mu) - < p(\mu), q(\mu) > = \sum_{i=۱}^n \alpha_i < x_i, x_i^* > - < \sum_{i=۱}^n \alpha_i x_i, \sum_{j=۱}^n \alpha_j x_j^* >$$

از طرفی طبق تعریف S_M می دانیم که $\sum_{j=۱}^n \alpha_j = ۱$ ولذا

$$\sum_{i=۱}^n \sum_{j=۱}^n \alpha_i \alpha_j < x_i, x_i^* > - \sum_{i=۱}^n \sum_{j=۱}^n \alpha_i \alpha_j < x_i, x_j^* >$$
$$= \sum_{i=۱}^n \sum_{j=۱}^n \alpha_i \alpha_j < x_i, x_i^* - x_j^* >$$
$$= \sum_{i=۱}^n \sum_{j=۱}^n \alpha_i \alpha_j < x_j, x_j^* - x_i^* >$$
$$= \frac{۱}{۲} \sum_{i=۱}^n \sum_{j=۱}^n \alpha_i \alpha_j < x_i - x_j, x_i^* - x_j^* > \qquad (۵-۱)$$

که طبق فرض یکنوایی M داریم

$$< x_i - x_j, x_i^* - x_j^* > \geq o \quad .$$

حال بالعکس فرض کنیم که $(x_۱, x_۱^*), (x_۲, x_۲^*) \in M$ ،وقرار می دهیم

$$\mu = \frac{۱}{۲}\delta(x_۱, x_۱^*) + \frac{۱}{۲}\delta(x_۲, x_۲^*) \in S_M$$

لذا

$$Supp\mu = \{(x_۱, x_۱^*), (x_۲, x_۲^*)\}$$

که مجموعه ای متناهی است با جایگذاری داریم که

$$r(\mu) - < p(\mu), q(\mu) > = \frac{۱}{۲} < x_۱, x_۱^* > + \frac{۱}{۲} < x_۲, x_۲^* > - < \frac{۱}{۲} x_۱ + \frac{۱}{۲} x_۲, \frac{۱}{۲} x_۱^* + \frac{۱}{۲} x_۲^* >$$

$$= \frac{۱}{۴} < x_۱ - x_۲, x_۱^* - x_۲^* > \geq o$$ و

پس M یکنواست .

تعریف(۲-۶)

اگر $M \subset X \times X^*$ باشد آنگاه تابع$\boldsymbol{\chi}_{\mathrm{M}} : X \to \overline{\mathrm{R}}$ رابه صورت زیردرنظر می گیریم

$$\boldsymbol{\chi}_M(x) := \sup_{\mu \epsilon S_M} \frac{<x, q(\mu)> - r(\mu)}{۱ + \|p(\mu)\|}$$

برای تابع $\boldsymbol{\chi}_M$ درتعریف(۲-۶)می توان گفت که چون $r(\mu)$ تابعی آفین است و$< x, q(\mu) >$ (دوگانگی)نیز آفین است و $۱ + \|p(\mu)\|$ یک عددمی باشد پس در واقع $\boldsymbol{\chi}_M$ سوپرمیمم توابع محدب است ، خود نیز تابعی محدب است از طرفی چون سوپرمیمم توابع پیوسته نیم پیوسته پائین است پس در واقع $\boldsymbol{\chi}_M$ تابعی محدب ونیم پیوسته پائین است .

تعریف(۲-۷)

تابع $P_{r_X} : X \times Y \to X$ به صورت زیر تعریف می شود

$$P_{r_X}(x, y) = x \qquad \forall (x, y) \in X \times Y$$

قضیه(۲-۸)

اگر $\emptyset \neq M \subset X \times X^*$ یک مجموعه یکنواو($\widetilde{M} = M - (w, w^*)$ که (w, w^*) عضوی ثابت از $X \times \mathrm{X}^*$ باشد، آنگاه

$domM \subset co(domM) \subset dom\chi_M$ (i

$dom\widetilde{M} = domM - w, dom\chi_{\widetilde{M}} = dom\,\chi_M - w$ (ii

iii)اگر $X_. \subset X$ یک زیر فضای خطی بسته باشد به نحوی که $domM \subset X_.$, $M + \{\boldsymbol{o}\} \times X_.^{\perp} = M$

همچنین اگر تعریف کنیم $M_. := \{(x, x^*|X_.) | (x, x^*) \in M\} \subset X_. \times X_.^*$ ، آنگاه

$$\chi_{M_.} = \chi_{M|X_.} \quad , dom\ \chi_{M_.} = dom\chi_M \subset X_.$$

همچنین

$M_.$در $(X_. \times X_.^*)$ یکنوای بیشین است $\Leftrightarrow$ M یکنوای بیشین باشد .

iv) اگر M یکنوای بیشین و $X_{\cdot}+$ $domM \subset x_{\cdot}$ که $X_{\cdot} \subset X$ یک زیر فضای بسته خطی است

و $x_{\cdot} \in X$ آنگاه

$$dom\, \chi_M \subset \overline{aff(domM)}, M + \{o\} \times X_{\cdot}^{\perp} = M.$$

اثبات(i) $(x,x^*) \in M$ و $\mu \epsilon S_M$ را ثابت درنظر می گیریم حال برای هر $(y,y^*) \in M$ با توجه به یکنوایی M

می توان گفت که

$$< y - x, y^* - x^* > =< y, y^* > - < y, x^* > - < x, y^* > \quad + < x, x^* > \geq o \ .$$

حال با ضرب $\mu(y,y^*)$ در $(y,y^*) \in supp\mu$ با توجه به فرم کلی $(r(\mu), p(\mu), q(\mu))$ درتعریف (۲-۴)

می توان نوشت

$$r(\mu) - < p(\mu), x^* > - < x, q(\mu) > + < x, x^* > \geq o$$

از طرفی باتوجه به نامساوی کوشی شوارتر داریم

$$|< x,x^* > | + \|p(\mu)\|. \|x^*\| \geq < x, x^* > - < p(\mu), x^* > \geq < x, q(\mu) > - r(\mu).$$

حال با توجه به فرم کلی $\chi_M\ (x)$ درتعریف(۲-۶) می توان گفت که

$$\chi_M(x) \leq \max\{|< x, x^* >, \|x^*\|\} < \infty.$$

بنا بر این،

$$domM \subseteq dom\chi_M$$

حال با توجه به این که $dom\chi_M = \{x, \chi_M(x) < \infty\}$ و $dom\chi_M$ مجموعه ای محدب است ،لذا

$$\text{co}\ domM \subseteq \text{co}\ dom\chi_M = dom\chi_M$$
$$co(domM) \subseteq dom\chi_M.$$

ii)آشکارااست که $dom\widetilde{M} = domM - w$, توجه داریم که هرگاه $\tilde{\mu} \in S_{\widetilde{M}}$ ،وقرار دهیم

$$\mu(x,x^*) \coloneqq \tilde{\mu}((x,x^*) - (w,w^*)) \Leftrightarrow \tilde{\mu}(x,x^*) \coloneqq \mu((x,x^*) + (w,w^*))$$

دراین صورت $\mu \in S_M$.درواقع برای $\tilde{\mu} \in S_{\widetilde{M}}$ ومتناظر آن $\mu \in S_M$ داریم

$$P(\tilde{\mu}) = \sum_{(x,x^*) \in X \times X^*} \tilde{\mu}\ (x,x^*). x = \sum_{(x,x^*) \in X \times X^*} \mu((x,x^*) + (w,w^*)). x$$
$$= \sum_{(x,x^*) \in X \times X^*} \mu(x + w, x^* + w^*). x$$

حال اگر $x + w = y \ , x^* + w^* = y^*$ درنظر بگیریم داریم

$$\sum_{(y,y^*)\in X\times X^*} \mu(y,y^*)(y-w) = \sum_{(y,y^*)\in X\times X^*} \mu\,(y,y^*).\,y - \sum_{(y,y^*)\in X\times X^*} \mu(y,y^*).\,w \ .$$

از طرفی طبق تعریف S_{M} می دانیم که $\sum_{(y,y^*)\in M} \mu(y,y^*) = ۱$ ،لذا

$$= p(\mu) - w = p(\tilde{\mu}).$$

به طریق مشابه می توان گفت که $q(\tilde{\mu}) = q(\mu) - w^*$همچنین برای($r(\tilde{\mu}$ داریم که

$$r(\tilde{\mu}) \ = \sum_{(x,x^*)\in X\times X^*} \tilde{\mu}\ (x,x^*).< x,x^* >$$

$$= \sum_{(x,x^*)\in X\times X^*} \mu((x,x^*)+(w,w^*)).< x,x^* >$$

$$= \sum_{(x,x^*)\in X\times X^*} \mu(x+w,x^*+w^*).< x,x^* >$$

$$= \sum_{(y,y^*)\in X\times X^*} \mu(\,y,y^*) < y-w, y^*-w^*) >$$

$$\sum_{(y,y^*)\in X\times X^*} \mu(y,y^*).\,[< y,y^* > -< y,w^* > -< w,y^* > +< w,w^* >]$$

$$=r(\mu)-< w,q(\mu) > -< p(\mu),w^* > +< w,w^* > \ .$$

حال چنانچه $x \in X$و $\tilde{\mu} \ \in S_{\tilde{M}}$ در نظر بگیریم داریم که

$$< x-w, q(\tilde{\mu}\,) > -r(\tilde{\mu}\,) =$$

$$< x-w, q(\mu)-w^* > -r(\mu)+< w,q(\mu) > +< p(\mu),w^* > -< w,w^* >$$

$$=< x,q(\mu) > +< \ w,w^* > -< x,w^* > -< w,q(\mu) > -r(\mu) +$$

$$< w,q(\mu) > +< p(\mu),w^* > -< w,w^* >$$

$$=< x,q(\mu) > -r(\mu)-< x,w^* > +< p(\mu),w^* >$$

$$\leq \chi_M(x).\,(۱+\|p(\mu)\|)+\beta(۱+\|p(\mu)\|)$$ و

لذا می توان گفت که

$$\frac{< x-w, q(\tilde{\mu}\,) > -r(\tilde{\mu}\,)}{۱+\|p(\tilde{\mu})\|} \leq (\chi_M(x)+\beta)\frac{۱+\|p(\mu)\|}{۱+\|p(\tilde{\mu}\,)\|}$$

$$\leq (۱+\|w\|).\,(\chi_M(x)+\ \beta)$$

(۱-۸) بنا بر این $\mathrm{dom}\chi_M - w \subset dom\chi_{\widetilde{M}}$

حال با توجه به اینکه $M=\widetilde{M}+(w,w^*)$ با جایگذاری ، عکس رابطه(۸-۱)نیز برقرار می شود لذا

$$\mathrm{dom}\chi_M - w = dom\chi_{\widetilde{M}}$$

iii) به وضوح $M_{\cdot}$ یک زیر مجموعه یکنوااز $X_{\cdot}\times X_{\cdot}^*$ است چرا که

$$M_{\cdot} := \{(x,x^*|X_{\cdot})|(x,x^*)\in M\} \subset X_{\cdot}\times X_{\cdot}^*$$

حال با توجه به این که $X_{\cdot}\subset X$ ویکنوایی M ،

$$\forall (x_۱,x_۱^*),(x_۲,x_۲^*)\in M_{\cdot} \Rightarrow < x_۱ - x_۲, x_۱^*\text{-}x_۲^* > \geq o$$

حال اگر $x\in X\setminus X_{\cdot}$ در نظر گرفته و $(x_{\cdot}$و$x_{\cdot}^*)\in M$) نقطه ای ثابت درنظر بگیریم دراین صورت $x - x_{\cdot}\notin X_{\cdot}$

چرا که اگر $x - x_{\cdot}\in X_{\cdot}$ با توجه به اینکه $x_{\cdot}\in X_{\cdot}$ است لذا $x\in X_{\cdot}$ که تناقض است .

پس $x - x_{\cdot}\notin X_{\cdot}$ حال $\exists u^*\in X_{\cdot}^{\perp} \ni < x - x_{\cdot}, u^* > > o$ بنابراین باقراردادن ،

$$\mu = \delta(x_{\cdot}, x_{\cdot}^* + tu^*), \delta_u = \left\{\begin{matrix} \mu\in s_M, \mu(x) = ۱ & x = u \\ \mu(x) = o & x \neq u \end{matrix}\right\}$$

همچنین با توجه به تعریف (۲-۴)داریم که

$$q(\mu) := \sum_{(x,x^*)\in X\times X^*} \delta(x_{\cdot}, x_{\cdot}^* + tu^*).x^* = x_{\cdot}^* + tu^*$$

$$r(\mu) := \sum_{(x,x^*)\in X\times X^*} \delta(x_{\cdot}, x_{\cdot}^* + tu^*). < x, x^* > = < x_{\cdot}, x_{\cdot}^* + tu^* >$$

حال با توجه به تعریف (۲-۶) داریم که

$$\chi_M(x) \geq \frac{< x, x_{\cdot}^* + tu^* > - < x_{\cdot}, x_{\cdot}^* + tu^* >}{۱ + \|x_{\cdot}\|}$$
$$= \frac{< x - x_{\cdot}, x_{\cdot}^* > + t < x - x_{\cdot} + u^* >}{۱ + \|x_{\cdot}\|}$$

برای هر $t > ۰$ برقرار است. پس می توان گفت که $\chi_M(x) = \infty$ وبا توجه به این که $x - x_{\cdot}\notin X_{\cdot}$ پس

$\mathrm{dom}\chi_M \subset X_{\cdot}$ حال اگر $\mu\in S_M$ درنظر گرفته وتعریف کنیم

$$\mu_{\cdot}: X_{\cdot}\times X_{\cdot}^* \to \mathbb{R}, \mu_{\cdot}(x,u^*) := \sum_{x^*|X_{\cdot}=u^*} \mu(x,x^*) \qquad (۲-۸)$$

آشکارا است که $\mu_{\cdot}\in S_{M_{\cdot}}$ ، علاوه براین می توان گفت که

$p(\mu_\circ) = p(\mu), q(\mu_\circ) = q(\mu)|X_\circ \ , r(\mu_\circ) = r(\mu).$

که درنتیجه برای هر $x \in X_\circ$ داریم

$\frac{<x,q(\mu)>-r(\mu)}{۱+\|p(\mu)\|} = \frac{<x,q(\mu_\circ)>-r(\mu_\circ)}{۱+\|p(\mu_\circ)\|}$.

فرض کنید

$\mu_\circ \epsilon S_{M_\circ}$ ، $n \in \mathbb{N}$ $\mathrm{supp}\mu_\circ=\{(x_۱,u_۱^*) ,\dots,(x_n, u_n^*)\}$.

برای هر $i \in \overline{1,n}$ یک $x_i^* \in X^*$ را طوری درنظر می گیریم که $x_i^* \ |X_\circ = u_i^*$ ، و تعریف

می کنیم $\mu \in S_M$ بدین صورت که

$$\mu(x,x^*) = \begin{cases} \mu_\circ(x_i,x_i^*) & \text{اگر } (x,x^*) = (x_i,x_i^*) \\ o & \text{سایرجاها} \end{cases}$$

درواقع به کمک این تعریف یک تناظر بین μ و $\mu_\circ$ ایجاد می شود.

بنابراین $\chi_M(x) = \chi_{M_\circ}(x)$ برای هر $x \in X_\circ$ ، یعنی

$\chi_{M_\circ} = \chi_M \Big|_{X_\circ}$.

پس می توان نتیجه گرفت که $(x,u^*) \in M_\circ$ ودر این جهت اثبات تمام است .

حال فرض می کنیم که M یکنوای بیشین باشد و

$(x,u^*) \in X_\circ \times X_\circ^* \ \ni < y - x, v^* - u^* > \geq o \ \forall (y,v^*) \in M_\circ$.

حال طبق تعریف یکنوای بیشین اگر ثابت کنیم که $(x,u^*) \in M_\circ$، ثابت کرده ایم که $M_\circ$ یکنوای بیشین است.

حال اگر $(x,u^*) \in X_\circ \times X_\circ^*$ درنظر می گیریم طبق(۱–۲۵)داریم که

$\exists x^* \in X^* , x^*|X_\circ = u^*.$

لذا $< y\text{-}x, \ y^* - x^* > = < y - x, y^*|X_\circ - u^* > \geq o \qquad \forall (y,y^*) \in M$

بنابراین $(x,x^*) \in M$ پس $(x,u^*) \in M_\circ$. فرض کنیم که $M_\circ$ یکنوای بیشین باشد

$(x,x^*) \in X \times X^* \ni < y - x, y^* - x^* > \geq o \quad \forall (y,y^*) \in M$.

اگر ثابت کنیم که $(x,x^*) \in M$ اثبات کامل است . حال عضوی ثابت از M را در نظر گرفته با توجه به فرض

داریم

$(y_\circ, y_\circ^*) \in M \ \Rightarrow \forall \xi^* \in X_\circ^\perp, (y_\circ, y_\circ^* + \xi^*) \in M$

بنا بر این می توان گفت که

$$< y_{\cdot} - x, y_{\cdot}^* + \mathfrak{z}^* - x^* > \geq o \ \ \forall \mathfrak{z}^* \in X_{\cdot}^{\perp}$$

اما با توجه به تعریف $M_{\cdot}$ وهمچنین با توجه به این که $domM \subset X_{\cdot}$

چون $(x,x^*) \in M$، پس $x \in X_{\cdot} = (X_{\cdot}^{\perp})^{\perp}$. از طرفی چون $M_{\cdot}$ یکنوای بیشین است، لذا

$$< y - x, y^*|X_{\cdot} - x^*|X_{\cdot} > \geq \cdot \ \forall (y, y^*) \in M \quad , (x, x^*|X_{\cdot}) \in M_{\cdot} \ .$$

حال با توجه به تعریف $M_{\cdot}$

$$\exists \mathfrak{z}^* \in X^* \ni (x, \mathfrak{z}^*) \in M, \mathfrak{z}^*|X_{\cdot} = x^*|X_{\cdot} <=> \mathfrak{z}^* - x^* \in X_{\cdot}^{\perp}$$

با توجه به اینکه $(x, \mathfrak{z}^*) \in M$ وهمچنین فرض قضیه که

$$M + \{o\} \times X_{\cdot}^{\perp} = M$$

$$(x, \mathfrak{z}^* - \mathfrak{z}^* + x^*) \in M \Rightarrow (x, x^*) \in M$$

پس M یکنوای بیشین است .

iv) فرض کنید که M یکنوای بیشین باشد و $domM \subset x_{\cdot} + X_{\cdot}$ به نحوی که $X_{\cdot} \subset X$ زیر فضای خطی بسته

و $x_{\cdot} \in X$, حال فرض کنید که $(x, x^*) \in M$ و $u^* \in X_{\cdot}^{\perp}$ پس

$$\forall (y, y^*) \in M \ , < y - x, y^* - (x^* + u^*) > = < y - x, y^* - x^* > \geq o \ ,$$

چرا که $y-x \in X_{\cdot}$ وهمچنین $(x, x^* + u^*) \in M$ بنابراین $M + \{o\} \times X_{\cdot}^{\perp} = M$.

حال اگر $x_{۱} \in domM$ را ثابت فرض کنیم

$$M_{۱} := M - (x_{۱}, o), X_{۱} := \overline{aff(domM)} - x_{۱}$$

حال چون M یکنوای بیشین است داریم که

$$M_{۱} + \{o\} \times X_{۱}^{\perp} = M_{۱}$$

اکنون با توجه به قسمت (iii) قضیه $dom\ \chi_{M_{۱}} \subset X_{۱}$ وبا توجه به قسمت (ii) قضیه داریم که

$$dom\ \chi_M \subset x_{۱} + X_{۱} = \overline{aff(dom\ M)}.$$

تابع $h: S_{X \times X^*} \times X^* \to R$ را بدین صورت درنظر می گیریم که

$$h(\mu, x^*) := r(\mu) - < p(\mu), x^* >.$$