بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

گرایش محض

مدول هایی که بعضی از زیرمدول های آن ها اول هستند

از:

حوا یعقوبی سلطانمرادی

استاد راهنما:

دکتر حبیب اله انصاری طرقی

شهریور ماه ۱۳۸۹

تقدیم به

پدر عزیز و مادر مهربانم

بسم الله الرحمن الرحیم

اینک که با عنایت پروردگار بی همتا موفق به انجام این پایان نامه شده ام، بر خود واجب می دانم که از زحمات و کمک های بی شائبه ی خانواده و اساتید محترم و دوستان گرامی تشکر و قدردانی نمایم.

از پدر و مادر مهربانم که در تمام مراحل تحصیل یاریم کردند و پشتیبان و مشوقم بوده اند سپاسگزارم.

از جناب آقای دکتر حبیب اله انصاری طرقی، استاد بزرگوارم که در طول دوران تحصیل و انجام این پایان نامه همواره راهنما و مشوق من بوده اند نهایت امتنان و تشکر را دارم.

از جناب آقای دکتر شهاب الدین ابراهیمی آتانی و جناب آقای دکتر فرهاد درستکار که زحمت داوری پایان نامه را تقبل فرمودند تشکر و قدردانی می کنم.

از خانم فرانک فرشادی فر، دانشجوی دکتری به خاطر راهنمایی های موثرشان در تحقیق و پژوهش صمیمانه متشکرم و در تمام مراحل زندگی آرزوی موفقیت می کنم.

فهرست مطالب

چکیده

مدول هایی که بعضی از زیرمدول های آن ها اول هستند

حوا یعقوبی سلطانمرادی

فرض کنید R یک حلقه ی جابجایی و یکدار باشد. در این پایان نامه، R - مدول هایی را که هر زیرمدول سره آن ها اول (نیمه اول) است، مورد مطالعه قرار داده و در ادامه زیرمدول هایی که زیرمدول صفرشان تنها زیرمدول اول است، مشخص می گردند. اهم مطالعه ی انجام شده برگرفته از منبع [۲] است.

کلید واژه: کاملاً اول، کاملاً نیمه اول، تقریباً کاملاً اول، تقریباً کاملاً نیمه اول، تقریباً اول، نیمه ساده همگن، هم-نیمه ساده، Max - حلقه.

Abstract

Modules Whose Certain Submodules Are Prime

Havva Yaghoubi Soltanmoradi

Let R be a commutative ring with identity. In this thesis, we will study those R- modules in which every proper submodule is prime (semiprime) or those modules in which the zero submodule is the only prime submodule (see [2]).

Key words: Fully prime; fully semiprime; almost fully prime; almost fully semiprime; almost prime; homogenous semisimple; co- semisimple; Max- ring.

برای اولین بار در سال ۱۹۷۸ میلادی Johon Dauns در مقاله ای با عنوان مدول های اول، (ر.ک. [۴]) مفهوم ایده آل اول را از یک حلقه به روی مدول ها بر روی حلقه های غیرجابجایی تعمیم داد. با توجه به نقش اساسی ایده آل های اول در نظریه حلقه ها، گسترش این مفهوم روی مدول ها مورد توجه بسیاری از ریاضیدانان قرار گرفت و سوالات متعددی در این زمینه مطرح گردید. اساسی ترین این سوالات در مورد وجود زیرمدول های اول، ارتباط آن ها با ایده آل های اول حلقه و زیرمدول های ماکسیمال یک مدول بود. دو سال بعد در سال ۱۹۸۰ میلادی، Johon Dauns توانست در دومین مقاله خود در این زمینه، ارتباط ایده آل های اول یک حلقه و زیرمدول های اول یک مدول بر روی آن حلقه را تحت شرایطی خاص بیان کند.

Chinpi Lu در سال ۱۹۸۴ (ر.ک. [۱۲]) قضایای اساسی زیرمدول های اول را اثبات نمود و برخی از قضایای مهم مربوط به ایده آل های اول یک حلقه را به روی مدول ها تعمیم داد. مهمتر از همه، پاسخ وی به سوالات مطروحه بود. در واقع وی نشان داد که لزوماً هر مدولی دارای زیرمدول اول نمی باشد و شرایطی را برای وجود زیرمدول های اول یک مدول بر روی حلقه های جابجایی ارائه داد. علاوه بر این وی نشان داد که هر زیرمدول ماکسیمال یک مدول، اول است.

این پایان نامه در ۴ فصل تنظیم شده است. ابتدا در فصل اول، برخی از مطالب مورد نیاز برای موضوعات مطرح شده در پایان نامه به صورت تعاریف و قضایا آورده می شود. در فصل دوم و سوم، مدول های کاملاً اول و کاملاً نیمه اول بررسی و برخی قضایای اساسی در مورد آنها اثبات می گردد. سپس در فصل چهارم، مدول هایی که زیرمدول صفر، تنها زیرمدول اول (نیمه اول) آن ها است، مشخص می شوند.

فصل اول

مقدمات و مطالب پیش نیاز

مقدمات و مطالب پیش نیاز

در این فصل برخی مطالب مورد نیاز برای پایان نامه به صورت تعریف، قضیه و لم یادآوری مـــی گـردنـد. در سراسر این فصل R نـمایش یک حلقه ی جابجایی یکدار و غیرصفـر و M یـک R - مـدول یـکانی مـی باشد. همچنین منظور از $N \leq M$ $\left(N \lneqq M\right)$ این است که N یک زیرمدول (زیرمدول سره) از M است.

تعریف (۱- ۱):

الف) فرض کنیم M یک R - مدول و L و K زیرمدول هایی از M باشند. در این صورت

$$(L :_R K) = \{r \in R : rK \subseteq L\}.$$

ب) فرض کنیم M یک R - مدول باشد و $S \subseteq R$. در این صورت

$$Ann_R(M) = \{r \in R : rm = 0, \quad \forall m \in M\}.$$

$$Ann_M\left(S\right) = \left\{m \in M : sm = 0, \quad \forall s \in S\right\}.$$

روشن است که $Ann_R(M) = (0 :_R M)$ و اگر N یک R - زیرمدول M باشد، آنگاه $Ann_R(\frac{M}{N}) = \left(N :_R M\right)$ یـک ایده آل R است.

تذکر(۱- ۲): فرض کنیم N و M دو R - مدول به قسمی باشند که $M \subseteq N$، دراین صورت

$$Ann_R(N) \subseteq Ann_R(M).$$

قضیه (۱- ۳): فرض کنید $\left(M_i\right)_{i\in I}$ خانواده ای از زیرمدول های M باشد. در این صورت

$$Ann_R(\sum_{i\in I} M_i) = \bigcap_{i\in I} Ann_R(M_i).$$

برهان: (ر.ک. [۱۷، صفحه ۱۲۰]).

قضیه (۱- ۴): فرض کنید M یک R - مدول باشد به طوری که $M = M_1 \oplus M_2$. آنگاه

$$\frac{M}{M_1} \cong M_2 \qquad \text{و} \qquad \frac{M}{M_2} \cong M_1.$$

برهان: نشان می دهیم $\frac{M}{M_1} \cong M_2$. به طور مشابه $\frac{M}{M_2} \cong M_1$. نگاشت $\varphi : M_2 \to \frac{M}{M_1}$ با قانون $\varphi(x) = x + M_1$ را در نظر بگیرید.

φ، ۱-۱ است:

$$x \in Ker\varphi \Rightarrow \varphi(x) = x + M_1 = 0_{\frac{M}{M_1}} = M_1 \Rightarrow x \in M_1 .$$

از طرفی $x \in M_2$. بنابراین

$$x \in M_1 \bigcap M_2 = (0) \Rightarrow x = 0.$$

φ، برواست: زیرا فرض کنید که $x = m + M_1 \in \frac{M}{M_1}$. آنگاه

$$m \in M = M_1 + M_2 \Rightarrow m = m_1 + m_2,\ m_1 \in M_1,\ m_2 \in M_2.$$

$$\Rightarrow x = m + M_1 = m_1 + m_2 + M_1 = m_2 + M_1 \Rightarrow x = m_2 + M_1.$$

$$\Rightarrow \varphi(m_2) = m_2 + M_1 = x.$$

φ یک R - همریختی است:

$\forall x, \forall y \in M_2$

$$\varphi(x+y) = x + y + M_1 = x + M_1 + y + M_1 = \varphi(x) + \varphi(y).$$

$\forall r \in R,\ \forall x \in M_2$

$$\varphi(rx) = rx + M_1 = x + \ldots + x + M_1 = x + M_1 + \ldots + x + M_1 = \varphi(x) + \ldots + \varphi(x) = r\varphi(x).$$

تعریف (۱– ۵): فرض کنید M یک R - مدول باشد. زیرمدول N از M را یک جمعوند مستقیم گویند هرگاه زیرمدولی چون K از M موجود باشد به طوری که $M = N \oplus K$.

تعریف (۱– ۶): ایده آل P از حلقه R را اول[۱] گویند هرگاه

الف) $P \neq R$.

ب) اگر $x, y \in R$ به قسمی باشند که $xy \in P$، آنگاه $x \in P$ یا $y \in P$. (ر.ک. [۱۷، صفحه ۵۱]).

تعریف (۱– ۷): ایده آل P از حلقه R را نیمه اول[۲] گویند هرگاه

الف) $P \neq R$.

---

۱ Prime
۲ Semiprime

ب) اگر $a \in R$ به قسمی باشد که $a^2 \in P$، آنگاه $a \in P$. (ر.ک. [۱۱، ۱۰-۸]).

تعریف (۱- ۸): زیرمدول N از R- مدول M را اول گویند هر گاه

الف) $N \neq M$.

ب) برای هر $r \in R$ و هر $m \in M$ که $rm \in N$ داشته باشیم $m \in N$ یا $r \in (N :_R M)$.

تعریف (۱- ۹): R- مدول M را اول گویند هرگاه زیرمدول صفر آن اول باشد.

تذکر (۱- ۱۰): فرض کنید M یک R- مدول باشد. اگر N زیرمدولی اول از M باشد، آنگاه $(N :_R M) = P$ ایده آلی اول از R خواهد بود. در این صورت زیرمدول N را یک زیرمدول P- اول می نامیم. همچنین مجموعه ی همه ی زیرمدول های P- اول M را با نماد $Spec_P(M)$ نمایش می دهیم (ر.ک. [۱۳، صفحه ۳۷۴۱]).

توجه (۱- ۱۱): ممکن است $Spec(M)$ برای یک مدول ناصفر M برابر تهی باشد. به عنوان مثال فرض کنید p یک عدد صحیح اول ثابت باشد و $\mathbb{N}_0 = \mathbb{Z}^+ \bigcup \{0\}$.

$$M = \mathbb{Z}_{p^\infty} = \{\alpha \in \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} : \alpha = \frac{r}{p^n} + \mathbb{Z},\ r \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}_0\}$$

یک $\mathbb{Z}$- مدول است که $Spec_{\mathbb{Z}}(M) = \varnothing$ و $Max_{\mathbb{Z}}(M) = \varnothing$ (ر.ک. [۱۳، صفحه ۳۷۴۵]).

قضیه (۱- ۱۲): فرض کنید R یک دامنه ی صحیح باشد به طوری که میدان نیست و K میدان کسر های R باشد. آنگاه برای R- مدول K داریم $Max_R(K) = \varnothing$ و $Spec_R(K) = \{(0)\}$.

برهان: (ر.ک. [۱۳، قضیه ۱]).

تعریف (۱- ۱۳): زیرمدول N از R- مدول M را ماکزیمال گویند هر گاه

الف) $N \neq M$.

ب) اگر L زیرمدولی از R- مدول M به قسمی باشد که $N \subseteq L \subseteq M$، آنگاه $L = M$ یا $L = N$.

مجموعه ی تمام زیرمدول های ماکزیمال R- مدول M را با نماد $Max_R(M)$ نمایش می دهند.

تعریف (۱- ۱۴): زیرمدول N از R- مدول M را زیرمدول مینیمال گویند هر گاه

الف) $N \neq (0)$.

ب) اگر L زیرمدولی از R- مدول M به قسمی باشد که $L \subseteq N$، آنگاه $L = (0)$ یا $L = N$.

لم (۱- ۱۵): فرض کنید M یک R - مدول و N زیرمدول سره ای از M باشد. در این صورت اگر $N \in Max_R\left(M\right)$، آنگاه $(N:_R M) \in Max\left(R\right)$ و $N \in Spec_R\left(M\right)$.

برهان : (ر.ک. [۱۲، صفحه ۶۳، گزاره ۴]).

نکته (۱- ۱۶): اگر N یک زیرمدول اول M باشد، آنگاه $(N:_R M)$ یک ایده آل اول از R است. ولی عکس این مطلب لزوماً برقرار نیست. (ر.ک. [۱۳، صفحه ۳۷۴۴]).

مثال (۱- ۱۷): اگر M، $\mathbb{Z}$ - مدول آزاد[1] $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ باشد و برای $a \in \mathbb{Z}$ که $a>1$، $N=\left(a,0\right)\mathbb{Z}$. آنگاه $\left(N:_{\mathbb{Z}} M\right)=\left(0\right)$ که ایده آلی اول است اما N زیرمدول اول M نیست. (ر.ک. [۱۳، صفحه ۳۷۴۴]).

تعریف (۱- ۱۸): اشتراک همه ی ایده آل های ماکزیمال R را که خود یک ایده آل است، رادیکال جاکوبسن R گویند و با نماد $J\left(R\right)$ نمایش می دهند.

تذکر (۱- ۱۹): فرض کنید M یک R - مدول باشد و $N \lneqq M$. در این صورت N زیرمدول اول M است اگر و فقط اگر $\frac{M}{N}$ یک مدول اول باشد.

برهان: ($\Leftarrow$) فرض کنید N زیرمدول اول M باشد و $r\bar{x} \in \frac{N}{N}=\left(0\right)$ به طوری که $r \in R$ و $\bar{x} \in \frac{M}{N}$. در این صورت،

$$r\bar{x}=r\left(x+N\right)=rx+N\in\frac{N}{N}=\left(0\right)\Rightarrow rx\in N.$$

حال چون N زیرمدول اول M است، پس بنابر (۱- ۸)، $x \in N$ یا $r \in (N:_R M)$. بنابراین،

$$r \in Ann_R(\frac{M}{N}) \qquad \text{یا} \qquad \bar{x}=x+N=N=0_{\frac{M}{N}}.$$

($\Rightarrow$) فرض کنید $\frac{M}{N}$ یک R - مدول اول باشد و $rm \in N$. از این رو

$$rm+N=N\Rightarrow r\left(m+N\right)=N\Rightarrow r\bar{m}=0_{\frac{M}{N}}\Rightarrow \bar{m}=0_{\frac{M}{N}}=N \qquad \text{یا} \qquad r\in\left(N:_R M\right).$$

بنابراین $m+N=N$ یا $r\in\left(N:_R M\right)$. لذا $m \in N$ یا $r \in (N:_R M)$.

---

[1] Free

تعریف (۱- ۲۰): زیرمدول سره ی N از R - مدول M را نیمه اول می گوییم هرگاه به ازای هر $r \in R$ و هر $m \in M$ اگر $r^2m \in N$، آنگاه $rm \in N$.

تعریف (۱- ۲۱): R - مدول M را نیمه اول می گوییم هرگاه زیرمدول صفر آن نیمه اول باشد.

نکته (۱- ۲۲): فرض کنید M یک R - مدول باشد. در این صورت، هر زیرمدول اول، یک زیرمدول نیمه اول است.

برهان: فرض کنیم N زیرمدول اول R - مدول M باشد. نشان می دهیم N زیرمدول نیمه اول است. فرض کنیم $r \in R$ و $m \in M$ به طوری که $r^2m \in N$. چون $r^2m = r(rm) \in N$ و N زیرمدول اول است، لذا بنابر (۱- ۸)، $rm \in N$ یا $rM \subseteq N$، که هر دو نتیجه می دهند $rm \in N$.

تعریف (۱- ۲۳): R - مدول M را ساده[1] گویند در صورتی که $M \neq (0)$ و زیرمدول های غیر بدیهی نداشته باشد.

لم (۱- ۲۴): فرض کنید $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ یک مجموعه ی اندیس گذاری شده از زیرمدول های ساده R - مدول M باشد. اگر $M = \sum_{\alpha \in A} T_\alpha$، آنگاه برای هر زیرمدول K از M، زیرمجموعه ی $B \subseteq A$ وجود دارد به طوری که $(T_\beta)_{\beta \in B}$ مستقل است (یعنی به ازای هر $\beta \in B$، $T_\beta \cap \left(\sum_{\lambda \neq \beta} T_\lambda \right) = (0)$) و $M = K \oplus \left(\oplus_{\beta \in B} T_\beta \right)$.

برهان: (ر.ک. [۱، لم ۹- ۲]).

قضیه (۱- ۲۵): R - مدول M اول است اگر و فقط اگر به ازای هر $0 \neq m \in M$، $P = Ann_R(M) = Ann_R(Rm)$ ایده آلی اول از R باشد.

برهان: ($\Longleftarrow$) فرض کنید M یک R - مدول اول باشد و $0 \neq m \in M$. از طرفی چون R یک حلقه ی جابجایی است، پس $Ann_R(m) = Ann_R(Rm)$. نشان می دهیم به ازای هر $0 \neq m \in M$، $Ann_R(M) = Ann_R(m)$. روشن است که $Ann_R(M) \subseteq Ann_R(m)$. لذا نشان می دهیم $Ann_R(m) \subseteq Ann_R(M)$. فرض کنید $r \in Ann_R(m)$. بنابراین با توجه به این که M یک مدول اول است، داریم

$$rm = 0,\ m \neq 0 \Rightarrow rM = (0) \Rightarrow r \in Ann_R(M).$$

حال نشان می دهیم P یک ایده آل اول R است. برای این منظور باید نشان دهیم برای هر $a, b \in R$ به طوری که $ab \in P$ و $a \notin P$، آنگاه $b \in P$.

---
[1] Simple

چون $ab \in P$، پس $abx = 0$ به ازای هر $x \in M$ $(*)$.

از سویی دیگر داریم

$$a \notin P \Rightarrow \exists y \in M,\ \ ay \neq 0.$$

از $(*)$با توجه به این که M یک مدول اول است، نتیجه می شود

$$aby = 0 \Rightarrow b\left(ay\right) = 0 \Rightarrow ay = 0 \qquad \text{یا} \qquad b \in P \qquad\qquad (**)$$

حال چون $ay \neq 0$، پس $(**)$نتیجه می دهد $b \in P$.

$(\Longrightarrow)$ نشان می دهیم M یک مدول اول است. فرض کنید $rx = 0$ به طوری که $r \in R$ و $0 \neq x \in M$. نشـان مـی دهیم $rM = (0)$. چون $rx = 0$، پس $r \in Ann_R\left(x\right) = Ann_R\left(Rx\right) = Ann_R\left(M\right)$. بنابراین $rM = (0)$.

لم (۱- ۲۶): فرض کنید M یک R- مدول و N زیرمدول سره از M باشد. در این صورت $N \in Max_R(M)$ اگر و فقط اگر R- مدول $\dfrac{M}{N}$ ساده باشد.

برهان: (ر.ک. [۱۲]).

نکته (۱- ۲۷) : هر R- مدول ساده، دوری است.

برهان: (ر.ک. [۷، صفحه ۲۷۹، تمرین ۵]).

قضیه (۱- ۲۸): فرض کنیم N یک R- مدول باشد. در این صورت N ساده است اگر و فقط اگر برای ایده آل ماکزیمال $\underline{m}$ از R داشته باشیم $N \cong \dfrac{R}{\underline{m}}$.

برهان: (ر.ک. [۱، گزاره ۹- ۱]).

نکته (۱- ۲۹): پوچساز هر مدول ساده، ایده آلی ماکزیمال است.

برهان: از (۱- ۲۷) و (۱- ۲۸) نتیجه می شود.

نکته (۱- ۳۰): روی حلقه $\mathbb{Z}$ برای هر مدول ساده مانند M داریم $M \cong \mathbb{Z}_p$ که p یک عدد اول است.

برهان: از (۱- ۲۸) نتیجه می شود.

تعریف (۱- ۳۱): فرض کنید $\left(M_\alpha\right)_{\alpha \in A}$ یک مجموعه ی اندیس گذار از زیرمدول های ساده R- مدول M باشد. اگر M جمع مستقیم عناصر این مجموعه باشد، در این صورت $M = \oplus_A M_\alpha$ یـک تـجزیه نـیـمه سـاده از M اسـت. (ر.ک.

[۱، صفحه ۱۱۶]). R - مدول M را نیمه ساده [۱] گوییم اگر یک تجزیه نیمه ساده داشته باشد. همچنین اگـر در ایـن تجزیه تمام جمعوند ها با هم یکریخت باشند، M را نیمه ساده همگن[۲] گویند.

مثال(۱- ۳۲): هر مدول ساده، نیمه ساده است، ولی عکس آن درست نیست مثلاً مدول صفر یک مدول نیمه ساده است ولی ساده نیست.

تعریف(۱- ۳۳): R - مدول M را منظم[۳] می گوییم هرگاه هر زیرمدول دوری M، جمعوندی از آن باشد. (ر.ک. [۹]).

تعریف (۱- ۳۴): حلقه ی R را اول می گوییم هرگاه ایده آل صفر آن یک ایده آل اول باشد. (ر.ک. [۷، صفحه ۷۰۰]).

تعریف (۱- ۳۵): حلقه ی R را نیمه اول می گوییم هرگاه ایده آل صفر آن یک ایده آل نیمه اول باشد. (ر.ک. [۷، صفحه ۷۰۰]).

قضیه (۱- ۳۶): برای هر R - مدول N، گزاره های زیر معادلند:

۱) N نیمه ساده است.

۲) N توسط مدول های ساده تولید می شود.

۳) N به صورت حاصل جمع بعضی از زیرمدول های ساده N است.

۴) N به صورت جمع زیرمدول های ساده خودش است.

۵) هر زیرمدول N جمعوند مستقیم N است.

برهان: (ر.ک. [۱، قضیه ۹- ۶]).

نکته(۱- ۳۷): زیرمدول و مدول خارج قسمتی هر مدول نیمه ساده، نیمه ساده است. (ر.ک. [۱، صفحه ۱۱۷]).

تعریف (۱- ۳۸): می گوییم M یک R - مدول آرتینی است اگر در شرایط زیر(که معادلند) صدق کند:

۱) هرگاه $\left(G_i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ خانواده ای از زیرمدولهای M باشد و

$$G_1 \supseteq G_2 \supseteq \ldots \supseteq G_i \supseteq G_{i+1} \supseteq \ldots$$

آنگاه $k\in\mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $i\in\mathbb{N}$، $G_k = G_{k+i}$.

۲) هر مجموعه ی ناتهی از زیرمدولهای M شامل عضوی مینیمال نسبت به رابطه ی مشمولیت باشد. (ر.ک. [۱۷، صفحه ۱۳۹]).

---

[۱] Semisimple
[۲] Homogeneouse semisimple
[۳] Regular

تعریف (۱– ۳۹): می گوییم حلقه ی R نوتری است اگر در شرایط زیر (که معادلند) صدق کند:

۱) هر زنجیره ی صعودی از ایده آل های R چون

$$I_1 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq \cdots$$

ایستا باشد.

۲) هر مجموعه ی ناتهی از ایده آل های R نسبت به رابطه ی مشمولیت، عضو ماکزیمال داشته باشد. (ر.ک. [۱۷، صفحه ۵۶]).

قضیه (۱– ۴۰): برای R- مدول نیمه ساده M گزاره های زیر معادلند:

۱) M با تولید متناهی است.

۲) M آرتینی است.

۳) M نوتری است.

۴) M آرتینی و نوتری است.

برهان: (ر.ک. [۱۶، قضیه ۳- ۳]).

تعریف (۱– ۴۱): حلقه ی R را نیمه ساده گویند هر گاه R به عنوان R- مدول نیمه ساده باشد. به عنوان مثال هر میدان، حلقه ی نیمه ساده است. (ر.ک. [۱۶، صفحه ۶۰]).

گزاره (۱– ۴۲): فرض کنید R یک حلقه باشد. گزاره های زیر معادلند:

الف) R نیمه ساده است.

ب) هر R- مدول، نیمه ساده است.

برهان: (ر.ک. [۱۶، گزاره ۳- ۷]).

تعریف (۱– ۴۳): فرض کنید M یک R- مدول باشد. در ایـن صورت $Soc(M)$ را مجموع تمام زیرمدول های ساده (مینیمال) از M می گویند. اگر M زیرمدول مینیمالی نداشته باشد، آنگاه $Soc(M)=0$.

قضیه (۱– ۴۴): فرض کنید $\{E_i\}_{i\in I}$ خانواده ای از R- مدول های باشد. آنگاه

$$Soc(\oplus_{i\in I} E_i) = \oplus_{i\in I} Soc(E_i).$$

برهان: (ر.ک. [۱۶، گزاره ۳- ۱۵]).

قضیه (۱- ۴۵): فرض کنید M یک R- مدول باشد. در این صورت M نیمه ساده است اگر و تنها اگر $Soc(M)=M$.

برهان: (ر.ک. [۱۹، صفحه ۱۷۴]).

تعریف (۱- ۴۶): زیرمدول K از یک R- مدول M اساسی[۱] یا بزرگ (M توسیع اساسی K) نامیده می شود، اگر برای هر زیرمدول غیرصفر $L\subseteq M$، داشته باشیم $K\bigcap L\neq(0)$. (ر.ک. [۱۹، ۱۷- ۱]).

مثال (۱- ۴۷): در $\mathbb{Z}$، هر زیرمدول (ایده آل) غیرصفر، اساسی است. (ر.ک. [۱۹، صفحه ۱۳۷]).

لم (۱- ۴۸): فرض کنید $K\leq M\leq E$، آنگاه E یک توسیع اساسی K است اگر و فقط اگر E توسیع اساسی M و M یک توسیع اساسی K باشد.

برهان: (ر.ک. [۱، گزاره ۵- ۱۶]).

لم (۱- ۴۹): فرض کنید M یک R- مدول باشد. در این صورت هر زیرمدول از M، جمعوند مستقیمی از یک زیرمدول اساسی M است.

برهان: (ر.ک. [۶، نتیجه ۳- ۲۳]).

تعریف (۱- ۵۰): فرض کنید R یک حلقه باشد. R- مدول M را بخش پذیر[۲] گوییم هرگاه برای هر $x\in M$ و هر $r\in R$ که مقسوم علیه صفر نیست، عنصر $y\in M$ وجود داشته باشد به طوری که $ry=x$ (ر.ک. [۷، صفحه ۳۰۴]).

نکته (۱- ۵۱): به ازای هر دامنه ی صحیح R، K میدان کسرهای R، یک R- مدول بخش پذیر است.

برهان: فرض کنید $\frac{a}{b}\in K$ و $0\neq r\in R$. در این صورت

$$\frac{a}{b}=r\left(\frac{1}{r}\frac{a}{b}\right)=r\left(\frac{a}{rb}\right),\ rb\neq 0\,.$$

تعریف (۱- ۵۲): عنصر a از حلقه ی R منظم ون نیومن[۳] است اگر یک عنصر x از R موجود باشد به طوریکه $axa=a$.

هرگاه هر عنصر R منظم باشد، گوییم حلقه ی R یک حلقه ی منظم ون نیومن است.

---

[۱] Essential
[۲] Divisible
[۳] Von-Neumann

همچنین حلقه ی R را منظم می گوییم اگر R یک R - مدول منظم باشد (ر.ک. [۱۹، صفحه ۳۱۶]). به عنوان مثال هر حلقه نیمه ساده، منظم است.

قضیه (۱- ۵۳): حلقه ی R منظم ون نیومن است اگر و فقط اگر R یک حلقه ی نیمه اول و هر حلقه ی خارج قسمتی اول از R، منظم ون نیومن باشد.

برهان: (ر.ک. [۳، صفحه ۱۷۳]).

قضیه (۱- ۵۴): گزاره های زیر برقرارند:

۱) R حلقه ی منظم است اگر و فقط اگر برای هر ایده آل I از R، $I^2 = I$.

۲) هر حلقه ی خارج قسمتی از حلقه ی منظم ون نیومن، منظم ون نیومن است.

برهان: (ر.ک. [۱، صفحه ۱۷۶]).

گزاره (۱- ۵۵): فرض کنید R حلقه ای باشد به طوری که $J(R) = 0$. آنگاه شرایط زیر معادلند:

۱) R حلقه ی منظم ون نیومن است.

۲) هر R - مدول یک زیرمدول ماکزیمال دارد.

برهان: (ر.ک. [۱۰، گزاره ۱- ۶]).

قضیه (۱- ۵۶): هر مدول غیرصفر با تولید متناهی دارای یک زیرمدول ماکزیمال است.

برهان: (ر.ک. [۱، نتیجه ۱۰- ۵]).

لم (۱- ۵۷): عبارت های زیر معادلند:

الف) R حلقه ی منظم ون نیومن است.

ب) هر R - مدول ساده، انژکتیو است.

ج) هر ایده آل از R اشتراکی از ایده آل های ماکزیمال است.

برهان: (ر.ک. [۱۸، صفحه ۱۱۹۳]).

لم (۱- ۵۸): ایده آل P از حلقه ی R نیمه اول است اگر و فقط اگر حلقه ی خارج قسمتی $\frac{R}{P}$، یک حلقه ی نیمه اول باشد. (ر.ک. [۱۱، صفحه ۱۶۹]).

تعریف (۱- ۵۹): R - مدول M را هم- نیمه ساده[۱] گویند هرگاه هر زیرمدول از M اشتراکی از زیرمدول های ماکزیمال M باشد. (ر.ک. [۱، صفحه ۱۲۲]).

لم (۱- ۶۰): R - مدول M هم- نیمه ساده است اگر و فقط اگر رادیکال جاکوبسن هر مدول خارج قسمتی از M صفر باشد.

برهان: (ر.ک. [۱، تمرین ۹- ۱۴]).

نکته (۱- ۶۱): فرض کنید M یک R - مدول باشد، آنگاه خواهیم داشت:

M مدول ساده $\Leftarrow$ M مدول نیمه ساده $\Leftarrow$ M مدول هم – نیمه ساده

$\Uparrow$

M مدول نیمه ساده همگن

برهان: (ر.ک. [۱، صفحه ۱۲۲]).

تذکر(۱- ۶۲): زیرمدول، مدول خارج قسمتی و جمع مستقیم مدول های هم- نیمه ساده، هم- نیمه ساده است.

برهان: (ر.ک. [۵] و [۱، تمرین ۱۸- ۲۳] و [۱۹، ۲۳- ۴]).

تعویض حلقه (۱- ۶۳): فرض کنید M مدولی روی حلقه ی R و I ایده آلی از R باشد که $I \subseteq Ann_R\left(M\right)$، در این صورت M با نگاشت $f:\frac{R}{I}\times M \to M$ با ضابطه ی $f\left(\left(r+I\right),m\right)=rm$ دارای یک ساختار $\frac{R}{I}$- مدولی می شود. این نگاشت قابل تعریف است، زیرا برای هر $r,r' \in R$ و $m \in M$ اگر $r+I=r'+I$، آنگاه $r-r' \in I$ و $I \subseteq Ann_R(M)$. پس $\left(r-r'\right)m=0$ و $rm=r'm$.

بعلاوه هر زیرمجموعه ی M یک R - زیرمدول است اگر و تنها اگر M یک $\frac{R}{I}$- زیرمدول باشد. (ر.ک.[۱۷، صفحه ۱۲۰]).

تعریف (۱- ۶۴): فرض کنید M و N دو R - مدول باشند. در این صورت M را یک مدول N - انژکتیو گویند هرگاه برای هر R - همریختی $f:K \to M$ که در آن K زیرمدولی از N است، R - همریختی ای مانند $g:N \to M$ وجود داشته باشد به طوری که $g\big|_K=f$. (ر.ک. [۱۹، صفحه ۱۲۷]).

لم (۱- ۶۵): فرض کنید M و U دو R - مدول باشند. اگر U به ازای هر زیرمدول دوری N از M، N - انژکتیو باشد،

---

[۱] Co-semisimple