دانشگاه گیلان

دانشکده علوم پایه

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

ایده آل های تعمیم یافته اول در حلقه ها

از:

محدثه رحمتی سلکی سری

استاد راهنما:

دکتر شهاب الدین ابراهیمی آتانی

تیر ۱۳۸۹


بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

(گرایش محض)

عنوان:

ایده آل های تعمیم یافته اول در حلقه ها

از:

محدثه رحمتی سلکی سری

استاد راهنما:

دکتر شهاب الدین ابراهیمی آتانی

تیر ۱۳۸۹

تقدیم به :

ساحت مقدس امام زمان (عج)

و

پدر و مادر مهربانم

تقدیر و تشکر

خدا را بی نهایت شاکرم که مرا مورد لطف و عنایت خویش قرار داد تا کار این پایان نامه به انجام برسد. امیدوارم باز هم بر من منت نهاده و توفیق طی کردن درجات بالاتر علمی را به من عطا فرماید.

از زحمات استاد بزرگوار، جناب آقای دکتر شهاب الدین ابراهیمی آتانی که راهنمایی و هدایت اینجانب را بر عهده گرفته اند و پاسخگوی سؤالاتم بودند کمال تشکر را دارم.

از اساتید محترم دانشگاه گیلان که در طول دوران تحصیل مرا یاری نمودند بخصوص جناب آقای دکتر منصور هاشمی و جناب آقای دکتر فرهاد درستکار که داوری این پایان نامه را پذیرفته اند و با راهنمایی های خود سهم بسزایی در هر چه بهتر شدن آن داشته اند قدردانی می نمایم.

از خانواده عزیزم که همواره مرا برای رسیدن به اهداف خود مورد حمایت خویش قرار داده و مشوق من بوده اند ممنون و سپاس گزارم.

فهرست مطالب

موضوع **صفحه**

چکیده فارسی .... **ث**

چکیده انگلیسی .... **ج**

پیشگفتار **۱**

فصل صفر :

مقدمات و مطالب پیشنیاز **۳**

فصل اول :

ایده آل های تقریباً اول **۱۹**

فصل دوم :

ایده آل های تقریباً اول در حلقه های خاص **۳۶**

فصل سوم :

مثال ها **۴۶**

واژه نامه :

انگلیسی- فارسی **۵۹**

فارسی- انگلیسی **۶۵**

مراجع **۷۱**

چکیده :

ایده آل های تعمیم یافته اول در حلقه ها محدثه رحمتی سلکی سری

فرض کنید R یک حلقه جابجایی با $1_R \neq 0_R$. تعمیم های متفاوتی از ایده آل های اول R مورد بررسی قرار گرفته است. در این رساله ما ایده آل های تقریباً اول و به طور ضعیف اول و تعمیم آنها را مورد مطالعه قرار می دهیم. به خصوص به مطالعه خواص مشابه و تفاوت های ایده آل های اول و تقریباً اول می پردازیم ([۲] و[۶]).

کلید واژه : ایده آل تقریباً اول، ایده آل به طور ضعیف اول، f – اول، SPAP - حلقه

Abstract :

Generalization of Prime Ideals in the Rings

Mohadese Rahmati Selki Sari

let R be a commutative ring with $1_R \neq \circ_R$. Various generalizations of prime ideals have been studied. In this thesis we study almost prime ideals, weakly prime ideals and their generalization. Particular emphasis is given to the similarities and differences between prime ideals and almost prime ideals [2],[6].

Key words : almost prime ideal, weakly prime, f – prime, SPAP – ring

پیشگفتار :

فرض کنید R یک حلقه جابجایی و یکدار باشد. ایده آل سره P را ایده آل تقریباً اول گوییم هرگاه به ازای هر $a,b\in R$ که $ab\in P-P^2$ نتیجه دهد که $a\in P$ یا $b\in P$. ایده آل P را به طور ضعیف اول گویند هرگاه به ازای هر $a,b\in R$ که $0\neq ab\in P$ آنگاه $a\in P$ یا $b\in P$. ایده آل های تقریباً اول برای مطالعه تجزیه در حوزه های نوتری کاربردی اساسی دارند. این ایده آل ها توسط S.M. Bhatwadeker و P.K. Sharma در سال ۲۰۰۵ معرفی شده است. ایده آل های به طور ضعیف اول که برای مطالعه تجزیه در حلقه های جابجایی که دارای مقسوم علیه صفر هستند به کار می رود، توسط A.G. Agargun، D. D. Anderson و S. Valdes-Leon در سال ۲۰۰۱ معرفی شده است که D. D. Anderson و E. Smith در سال ۲۰۰۳ به طور اساسی آن را مورد مطالعه قرار داده اند. مطالب این رساله به سه فصل تقسیم شده است :

در **فصل صفر** تعاریف و قضایایی آورده شده است که در فصول بعد مورد نیاز هستند. البته در این فصل اکثر قضایا اثبات نشده است ولی منابع مربوطه ذکر شده است.

در **فصل یک** علاوه بر بررسی خواص ایده آل های تقریباً اول، ارتباط چنین ایده آل هایی را نسبت به ایده آل های اول و ایده آل های به طور ضعیف اول بیان و ثابت می کنیم.

در **فصل دو** ساختار حوزه هایی را بررسی می کنیم که در آن هر ایده آل سره از R، حاصلضربی از ایده آل های تقریباً اول است.

در **فصل سه** ابتدا ایده آلسازی را تعریف می کنیم و با استفاده از روش ایده آلسازی، مثالهای بیشتری از ایده آل های تقریباً اول ارائه می دهیم.

فصل صفر :

مقدمات و مطالب پیشنیاز

(۱.۰) نمادگذاری.

- در سراسر این رساله R حلقه ای جابجایی و یکدار است مگر آنکه خلاف آن ذکر شود.

- نماد $\mathbb{Z}$ همواره نشان دهنده مجموعه اعداد صحیح و نماد $\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}_\circ$) همواره نشان دهنده مجموعه اعداد طبیعی (اعداد صحیح نامنفی) است. مجموعه اعداد گویا با نماد نشان $\mathbb{Q}$ داده می شود.

- نماد $\subseteq$ برای نمایش زیر مجموعه بودن و نماد $\subset$ برای نمایش زیر مجموعه سره بودن به کار می رود. لذا به ازای مجموعه های A, B عبارت $A \subset B$ یعنی $A \subseteq B$ و $A \neq B$.

- حاصلضرب دکارتی مجموعه های A, B با نماد $A \times B$ مشخص می شود.

- حلقه چند جمله ایها با متغیرهای $X_n, \dots, X_2, X_1$ بروی حلقه R با نماد $R[X_1, X_2, \dots, X_n]$ نشان داده شده است.

- ایده آل اصلی تولید شده توسط $a \in R$ با نماد $\langle a \rangle$ نشان داده شده است.

(۲.۰) تعریف. الف) عنصر $r \in R$ را یک «مقسوم علیه صفر» گویند هر گاه عنصر ناصفری از R چون b باشد، به قسمی که $rb = \circ$.

ب) R را یک «حوزه صحیح» گویند هر گاه R مقسوم علیه صفر غیر بدیهی نداشته باشد یعنی به ازای هر $a, b \in R$ اگر $ab = \circ_R$ آنگاه $a = \circ_R$ یا $b = \circ_R$.

(۳.۰) تعریف. الف) عنصر وارون پذیر r از حلقه R را یکه گویند و وارون آن را با نماد r^{-1} نشان می دهیم.

به سادگی دیده می شود که اگر r یک یکه باشد آنگاه $\langle r \rangle = Rr = R$.

ب) عنصر $r \in R$ را پوچتوان گوییم اگر عدد طبیعی چون n وجود داشته باشد به قسمی که $r^n = \circ$.

به وضوح معلوم است که هر عنصر پوچتوان یک حلقه، یکه نیست.

(۴.۰) تعریف. ایده آل I از R را خودتوان گویند هرگاه $I^2 = I$.

(۵.۰) تعریف. فرض کنید I, J ایده آل های از حلقه R باشند. در این صورت مجموعه

$$(I : J) = \{r \in R : rJ \subseteq I\}$$

یک ایده آل R است و $I \subseteq (I : J)$. بعلاوه اگر $J = \langle a \rangle$ آنگاه ایده آل $(I : \langle a \rangle)$ را با نماد $(I : a)$ نشان می دهیم.

(۶.۰) تعریف و قضیه. ایده آل سره M از R را ماکسیمال گویند اگر به ازای هر ایده آل I از R که $M \subset I \subseteq R$ آنگاه $I = R$. بعلاوه، ایده آل M ماکسیمال است اگر و فقط اگر R/M یک میدان باشد.

برهان. صفحه ۳ از [۵] را ملاحظه فرمایید.

(۷.۰) تعریف. ایده آل سره P از R را اول گویند هرگاه $ab \in R$ نتیجه دهد $a \in R$ یا $b \in R$.

(۸.۰) قضیه. فرض کنید R یک حلقه جابجایی و غیرصفر باشد در این صورت R دست کم یک ایده آل ماکسیمال دارد. بعلاوه اگر I یک ایده آل سره R باشد آنگاه R ایده آل ماکسیمالی چون M دارد به قسمی که $I \subseteq M$.

برهان. صفحه ۴۰ از [۱۷] را ملاحظه فرمایید.

(۹.۰) تعریف. هر حلقه جابجایی R را که دقیقا یک ایده آل ماکسیمال چون M داشته باشد یک حلقه شبه موضعی گوییم و معمولا آن را با نماد (R, M) نشان می دهیم.

(۱۰.۰) لم. فرض کنید R حلقه ای جابجایی باشد. در این صورت R شبه موضعی است اگر و فقط اگر مجموعه عضوهای غیریکه R یک ایده آل R باشد. بعلاوه، ایده آل ماکسیمال یکتای R برابر مجموعه عناصر غیریکه R است.

برهان. صفحات ۴۱ و ۴۲ از [۱۷] را ملاحظه فرمایید.

(۱۱.۰) تعریف. حلقه R را نوتری گویند هرگاه هر ایده آل R با تولید متناهی باشد. یا به عبارت معادل، هرگاه ایده آل های R در شرط زنجیر صعودی صدق کنند و یا اینکه هر زیرمجموعه غیرخالی از ایده آل های R تحت رابطه شمول دارای عنصر ماکسیمال باشد.

(۱۲.۰) تعریف. حلقه R را آرتینی گویند هرگاه ایده آل های R در شرط زنجیر نزولی صدق کنند و یا اینکه هر زیرمجموعه غیرخالی از ایده آل های R تحت رابطه شمول دارای عنصر مینیمال باشد.

(۱۳.۰) مثال. هر میدان یک حلقه نوتری و آرتینی است.

(۱۴.۰) تعریف. حلقه نوتری R را موضعی گویند هرگاه دارای یک ایده آل ماکسیمال یکتا باشد.

(۱۵.۰) تعریف. فرض کنید I ایده آلی از R باشد. در این صورت ایده آل

$$\sqrt{I} = \left\{ r \in R \middle| r^n \in I \text{ ، به ازای } n > \circ \text{ ای} \right\}$$

را رادیکال I گویند و $I \subseteq \sqrt{I}$.

در حالت خاص اگر $I = \circ$ آنگاه رادیکال I، رادیکال پوچ R یا پوچ رادیکال R نامیده می شود.

(۱۶.۰) **تذکر.** فرض کنید P یک ایده آل اول از R باشد. در این صورت به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $\sqrt{(P^n)} = P$.

برهان. صفحه ۵۲ از [۱۷] را ملاحظه فرمایید.

(۱۷.۰) **تعریف.** ایده آل سره Q از R را یک ایده آل اولیه گویند هرگاه به ازای هر $a, b \in R$ و $ab \in Q$، اگر $a \notin Q$ آنگاه $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به قسمی که $b^n \in Q$.

بدیهی است که هر ایده آل اول R، یک ایده آل اولیه R است.

(۱۸.۰) **لم وتعریف.** فرض کنید Q یک ایده آل اولیه R باشد. در این صورت $P := \sqrt{Q}$ ایده آل اول R است و Q را یک ایده آل $P-$ اولیه گویند. بعلاوه P کوچکترین ایده آل اول R است که شامل Q است.

برهان. صفحه ۶۴ از [۱۷] را ملاحظه فرمایید.

(۱۹.۰) **قضیه.** فرض کنید Q ایده آلی از حلقه جابجایی R باشد به طوریکه ایده آل $M = \sqrt{Q}$ یک ایده آل ماکسیمال R باشد. در این صورت Q یک ایده آل اولیه (در واقع $M-$ اولیه) R است.

برهان. صفحه ۶۴ از [۱۷] را ملاحظه فرمایید.

(۲۰.۰) **تعریف.** فرض کنید R یک حلقه جابجایی و یکدار باشد. رادیکال جیکبسن R را اشتراک همه ایده آل های ماکسیمال R تعریف می کنند، و آن را با نماد $\mathrm{Jac}(R)$ نشان می دهند.

واضح است اگر R شبه موضعی باشد آنگاه $\mathrm{Jac}(R)$ برابر با ایده آل منحصر بفرد R است.

(۲۱.۰) **قضیه.** شرایط زیر در R معادل اند :

(۱) R میدان است.

(۲) R ایده آل سره غیرصفر ندارد.

(۳) ۰ ایده آل ماکسیمال R است.

برهان. صفحه ۱۲۹ از [۱۰] را ملاحظه فرمایید.

(۲۲.۰) لم. فرض کنید k یک میدان باشد و $a_1, \dots, a_n \in k$. در این صورت ایده آل

$$\langle X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n \rangle$$

از حلقه $k[X_1, \dots, X_n]$ یک ایده آل ماکسیمال است.

برهان. صفحات ۳۸۵ و ۳۸۶ از [۱۶] را ملاحظه فرمایید.

(۲۳.۰) لم. فرض کنید I, J دو ایده آل R باشند. در این صورت $I \cup J$ ایده آل R است اگر و فقط اگر $I \subseteq J$ یا $J \subseteq I$.

برهان. صفحه ۷ از [۶] را ملاحظه فرمایید.

(۲۴.۰) تعریف و لم. فرض کنید I, J ایده آل هایی از R باشند. گوییم I, J نسبت به هم اول هستند هرگاه $I + J = R$.

اگر I و J نسبت به هم اول باشند آنگاه $I \cap J = IJ$.

برهان. صفحه ۵۵ از [۱۷] را ملاحظه فرمایید.

(۲۵.۰) مثال. فرض کنید M_1, M_2 ایده آل های ماکسیمال متمایز حلقه R باشند. در این صورت $M_1 + M_2 = R$. فرض کنید چنین نباشد. پس $M_1 + M_2 \neq R$. پس بنا به قضیه (۸.۰)، ایده آل ماکسیمالی چون M هست به قسمی که $M_1 + M_2 \subseteq M$. در این صورت $M_1, M_2 \subseteq M_1 + M_2 \subseteq M$. پس $M = M_1 = M_2$ که تناقضی آشکار است. پس دو ایده آل ماکسیمال متمایز نسبت به هم اول هستند.

(۲۶.۰) تعریف. گوییم زیرمجموعه S از R یک «مجموعه بسته ضربی» است هرگاه $1 \in S$ ،$\circ \notin S$ و به ازای هر $a, b \in S$ داشته باشیم $ab \in S$.

(۲۷.۰) تذکر. فرض کنید S یک زیر مجموعه بسته ضربی از حلقه جابجایی R باشد. رابطه $\sim$ را روی $R \times S$ به صورت زیر تعریف کنید :

به ازای هر $(a, s), (b, t) \in R \times S$

$$(a, s) \sim (b, t) \iff \exists\, u \in S \;:\; u(ta - sb) = \circ$$

در این صورت $\sim$ یک رابطه هم ارزی به روی $R \times S$ است.

اکنون به ازای $(a, s) \in R \times S$، رده هم ارزی شامل (a, s) را با نماد $\frac{a}{s}$ و مجموعه همه رده های هم ارزی را با نماد $S^{-1}R$ تحت اعمال

$$\frac{a}{s}\frac{b}{t} = \frac{ab}{st} \quad , \quad \frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{ta+sb}{st} \qquad (a, b \in R, s, t \in S)$$

یک حلقه جابجایی است. حلقه $S^{-1}R$ را موضعی سازی R نسبت به S می نامیم. عضو صفر آن $\frac{0}{1}$ و همانی ضربی آن $\frac{1}{1}$ است.

تابع $f: R \to S^{-1}R$ با قانون، $f(r) = \frac{r}{1}$ یک همریختی است. این همریختی را «همریختی حلقه ای طبیعی» می نامیم.

برهان. صفحه ۸۱ از [۱۷] را ملاحظه فرمایید.

(۲۸.۰) تذکر. فرض کنید R حلقه ای جابجایی و P یک ایده آل اول از R باشد. فرض کنید $S := R - P$، پس S زیرمجموعه ای بسته ضربی از R است. حلقه $S^{-1}R$ را با R_P نمایش می دهیم. این حلقه یک حلقه شبه موضعی با ایده آل ماکسیمال

$$P_P = S^{-1}P = \left\{\lambda \in R_P \ : \ \lambda = \frac{a}{s} \ , \ a \in P \ , \ s \in S\right\}$$

است. این حلقه را حلقه حاصل از موضعی سازی R در P می نامند.

برهان. صفحه ۸۹ از [۱۷] را ملاحظه فرمایید.

(۲۹.۰) قضیه. فرض کنید S زیر مجموعه ای بسته ضربی از حلقه جابجایی R باشد. اگر P ایده آل اول R باشد و $P \cap S = \emptyset$ آنگاه $S^{-1}P = P_P$ یک ایده آل اول از $S^{-1}R$ است.

برهان. صفحه ۱۴۶ از [۱۰] را ملاحظه فرمایید.

(۳۰.۰) لم. فرض کنید حلقه R نوتری و S زیرمجموعه ای بسته ضربی از R باشد در این صورت $S^{-1}R$ نیز نوتری است.

برهان. صفحه ۴۰ از [۱۷] را ملاحظه فرمایید.

(۳۱.۰) **گزاره.** فرض کنید I و J ایده آل هایی از R باشند. در این صورت $I = J$ اگر و فقط اگر به ازای هر ایده آل ماکسیمال M از R، $I_M = J_M$.

برهان. صفحه ۷۰ از [۱۲] را ملاحظه فرمایید.

(۳۲.۰) **تذکر و تعریف.** فرض کنید R حوزه صحیح باشد و $S = R - \{\circ\}$. پس S زیرمجموعه ای بسته ضربی از R است. در این صورت $S^{-1}R$ یک میدان است که آن را میدان کسرهای R یا میدان خارج قسمتی R می نامند.

برهان. صفحه ۱۴۳ از [۱۰] را ملاحظه فرمایید.

(۳۳.۰) **تعریف.** فرض کنید R یک حوزه صحیح با میدان خارج قسمتی K باشد. هر ایده آل کسری R یک $R-$ زیرمدول ناصفر I از K است به طوریکه به ازای عنصر ناصفری چون $a \in R$، $aI \subset R$.

(۳۴.۰) **مثال. الف)** هر ایده آل ناصفر I در حوزه صحیح R یک $R-$ زیرمدول R، و در نتیجه یک ایده آل کسری R می باشد.

ب) هر $R-$ زیرمدول ناصفر با تولید متناهی I از K یک ایده آل کسری R است. زیرا هرگاه I بوسیله $b_1, \ldots, b_n \in K$ تولید شود، $I = Rb_1 + \cdots + Rb_n$ و به ازای هر i، $b_i = \frac{c_i}{a_i}$، که در آن $c_i, a_i \in R$,$a_i \neq \circ$. فرض کنید $a = a_1a_2 \ldots a_n$. در این صورت، $a \neq \circ$ و

$$aI = Ra_2 \ldots a_nc_1 + \cdots + Ra_1 \ldots a_{n-1}c_n \subset R.$$

(۳۵.۰) **تذکر.** فرض کنید R یک حوزه صحیح با میدان خارج قسمتی K باشد و I,J ایده آل های کسری R باشند. ضرب ایده آل های کسری I,J به صورت

$$IJ = \{\, \sum_{i=1}^{n} a_ib_i \mid a_i \in I \;; b_i \in J \;; n \in \mathbb{N}_\circ \,\}$$

تعریف می شود. واضح است هرگاه I,J ایده آل هایی در R باشند، IJ حاصلضرب معمول ایده آل ها می باشد.

برهان. صفحه ۴۰۱ از [۱۰] را ملاحظه فرمایید.

(۳۶.۰) **تعریف**. ایده آل کسری I از حوزه صحیح R وارون پذیر است هرگاه ایده آل کسری چون J از R موجود باشد به قسمی که $IJ = R$.

(۳۷.۰) **تذکر**. وارون ایده آل کسری وارون پذیر I، منحصر بفرد بوده و برابر است با

$$I^{-1} = \{a \in K | aI \subset R\}$$

که در آن K میدان خارج قسمتی حوزه صحیح R است.

برهان. صفحه ۴۰۲ از [۱۰] را ملاحظه فرمایید.

(۳۸.۰) **مثال**. هر ایده آل اصلی ناصفر در حوزه صحیح R وارون پذیر است.

(۳۹.۰) **لم**. فرض کنید $I_1, I_2, \dots, I_n$ ایده آل هایی از حوزه صحیح R باشند. ایده آل $I_1 I_2 \dots I_n$ وارون پذیر است اگر و فقط اگر به ازای هر $1 \leq i \leq n$ ، I_i وارون پذیر باشد.

برهان. صفحه ۴۰۲ از [۱۰] را ملاحظه فرمایید.

(۴۰.۰) **قضیه**. فرض کنید R یک حوزه صحیح شبه موضعی باشد. در این صورت هر ایده آل وارون پذیر R یک ایده آل اصلی است.

برهان. صفحه ۳۷ از [۱۱] را ملاحظه فرمایید.

(۴۱.۰) **تعریف**. ایده آل A از R را یک ایده آل ضربی گویند اگر به ازای هر ایده آل $B \subseteq A$، ایده آل C از R موجود باشد به قسمی که $B = AC$.

(۴۲.۰) **مثال**. واضح است که هر ایده آل اصلی ضربی است.

(۴۳.۰) **تعریف**. حلقه R را «تجزیه پذیر» گویند هر گاه حلقه های غیر بدیهی R_1, R_2 موجود باشند به قسمی که $R \cong R_1 \times R_2$. حلقه R را که تجزیه پذیر نیست «تجزیه ناپذیر» می نامند.

(۴۴.۰) قضیه. حلقه R را در نظر بگیرید. احکام زیر معادل اند :

(۱) R تجزیه پذیر است.

(۲) R شامل یک عنصر خودتوان e است به قسمی که $e \neq \circ, 1$.

برهان. (۲)⟸(۱) فرض کنید حلقه های غیر بدیهی R_1, R_2 موجود باشند به قسمی که $R \cong R_1 \times R_2$ در این صورت $e = (\circ, 1)$ یا $e = (1, \circ)$ عناصری خودتوان و غیر بدیهی از R می باشند.

(۱)⟸(۲) فرض کنید $e \neq \circ, 1$ یک عنصر خودتوان از R است. قرار دهید $R_1 = \langle e \rangle$ و $R_2 = \langle 1 - e \rangle$. واضح است که $R_1 + R_2 \subseteq R$. فرض کنید $a \in R$ در این صورت داریم

$$a = ae + a(1-e) \in R_1 + R_2.$$

پس $R \subseteq R_1 + R_2$ و در نتیجه $R = R_1 + R_2$.

اکنون فرض کنید $x \in R_1 \cap R_2$ پس عناصر $a_1, b_1 \in R$ موجود اند به قسمی که $x = a_1 e$ و $x = b_1(1-e)$. همچنین از اینکه $e^2 = e$ داریم

$$x = a_1 e = a_1 ee = b_1(1-e)e = \circ$$

پس $R_1 \cap R_2 = \circ$. لذا R برابر است با حاصلجمع مستقیم حلقه های R_1 و R_2 (هر ایده آل یک زیرحلقه است و هر زیرحلقه خود یک حلقه است) و چون برای تعداد متناهی حلقه حاصلضرب مستقیم آنها با حاصلجمع مستقیمشان برابر است پس $R \cong R_1 \times R_2$. ■

(۴۵.۰) نتیجه. در حلقه تجزیه ناپذیر R تنها عناصر خودتوان $\circ, 1$ اند.

(۴۶.۰) تعریف. حلقه R را «منظم فون نویمان» گویند هرگاه به ازای هر $a \in R$ عنصری چون $x \in R$ موجود باشد به قسمی که $a = axa$.

(۴۷.۰) لم. فرض کنید R یک حلقه جابجایی باشد. احکام زیر معادل اند :

(۱) R حلقه منظم فون نویمان است.

(۲) به ازای هر ایده آل ماکسیمال M از R، R_M یک میدان است.

(۳)   هر ایده آل (اصلی) از R، خودتوان است.

برهان. (۲)$\Longleftarrow$(۱) فرض کنید R حلقه منظم فون نویمان است می دانیم R_M یک حلقه شبه موضعی با ایده آل ماکسیمال M_M است. بنا به قضیه (۲۱.۰)، برای اینکه نشان دهیم R_M یک میدان است کافیست نشان دهیم $M_M = \circ$. فرض کنید $\lambda \in M_M$ پس $a \in M$ و $s \in S := R - M$ موجود است به قسمی که $\lambda = \frac{a}{s}$. چون R منظم فون نویمان است پس $x \in R$ موجود است به قسمی که $a = axa$. لذا $(ax)^2 = axax = (axa)x = ax$. پس $e = ax \in M$ یک عنصر خودتوان است. همچنین داریم $a = ea$. از آنجا که $e^2 = e$ داریم $e(1-e) = \circ$. چون M ماکسیمال است پس $1 - e \notin M$ یعنی $1 - e \in S$. پس $\frac{e}{1} = \frac{\circ}{1}$ در نتیجه $\lambda = \frac{a}{s} = \frac{ea}{s} = \frac{e}{1}\frac{a}{s} = \frac{\circ}{s}$ بنابراین $M_M = \circ$.

(۳)$\Longleftarrow$(۲) فرض کنید I ایده آلی از R است و ایده آل ماکسیمال M از R را در نظر بگیرید. در این صورت I_M ایده آلی از R_M است. بنا به (۲)، چون R_M یک میدان است پس بنا به قضیه (۲۱.۰)، $I_M = \circ_M$ یا $I_M = R_M$. در نتیجه ${I_M}^2 = I_M$. بنا به گزاره (۳۱.۰)، $I^2 = I$.

(۱)$\Longleftarrow$(۳) فرض کنید $a \in R$. بنا به (۳)، $\langle a \rangle^2 = \langle a \rangle$. پس $x \in R$ ای وجود دارد که $a = a^2x$. در نتیجه $a = axa$. ■

(۴۸.۰) تعریف. فرض کنید R یک حلقه جابجایی باشد و $a, b \in R$. گویند b بر a بخشپذیر است و می نویسیم $a|b$ هرگاه عنصری غیر مقسوم علیه صفر مانند $x \in R$ وجود داشته باشد به طوریکه $ax = b$.

(۴۹.۰) تعریف. فرض کنید a, b عناصر حلقه R باشند. a راشریک b گویند هرگاه $a|b$ و $b|a$.

با توجه به صفحه ۱۳۶ از [۱۰] معلوم است که a, b شریک هم هستند هرگاه $\langle a \rangle = \langle b \rangle$.

(۵۰.۰) تعریف. الف) عنر ناصفر و غیریکه c از R را تحویل ناپذیر گویند اگر $c = ab$ آنگاه یکی از a, b یکه باشند (نه هر دو). این معادل است با اینکه $\langle c \rangle = \langle a \rangle$ یا $\langle c \rangle = \langle b \rangle$.

ب) عنصر ناصفر و غیریکه $p \in R$ از R را اول گویند هرگاه $p|ab$ آنگاه $p|a$ یا $p|b$.

(۵۱.۰) قضیه. فرض کنید c, p عناصر ناصفر حوزه صحیح R باشند. در این صورت :