بسم الله الرحمن الرحيم

١٤٣١٢١ـ٢٠٢١٦٣٣

۱۳۲۶

دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته

ریاضی محض گرایش جبر

عنوان

ارتباط درجات کاراکترهای تحویل ناپذیر و طول کلاسهای تزویج در گروههای حلپذیر

استاد راهنما

دکتر علی اکبر مهرورز

اساتید مشاور

دکتر محمد رضا درفشه

دکتر سعید اکبری

پژوهشگر

محمد حسین جعفری

شهریور ۸۷

تقدیر و تشکر

دانش میراثی ارزشمند است و فضیلت و ارزشی است برای انسان. ارزش علم و دانش تا آنجاست که مولای متقیان علی(ع) می‌فرمایند: «مَن عَلّمَنی حرفاً فقد سیّرنی عبداً» . پس حمد و سپاس فراوان خداوند متعال را که اول معلم انسان است و به انسان آنچه را که نمی‌دانست آموخت. حمد و سپاس بیکران خالق یکتا را که فضل و رحمتش را از بندگانش دریغ نکرد و به این بنده حقیر توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. پس به پاس این فضل و توفیق الهی و به تأسی از حدیث شریف «مَن لَم یَشکُر المخلوق لَم یَشکُر الخالق» وظیفه خود می‌دانم که از زحمات و دلسوزیهای اساتید گرانقدر دکترمهرورز، زنده یاد دکترشهابی، دکتردرفشه و دکتراکبری که با راهنمائیها و تذکرات ارزشمندشان مرا در تهیه این پایاننامه یاری رسان بودند و علم و دانش خود را از من دریغ نکردند، صمیمانه تقدیر و تشکر نموده و مراتب امتنان خود را اظهار نمایم. همچنین از اساتید و معلمان دوران تحصیلم که از آنها درس علم و زندگی یاد گرفتم تشکر و قدردانی می‌نمایم. جا دارد از تمامی دوستان و دانشجویان دوره دکتری بخصوص دکتر رنجبری، دکتر مهری، دکتر عزیزی، دکتر مددی و دکتر فغفوری که برادرانه مشوق و یاریگر اینجانب بودند سپاسگذاری می‌نمایم. در پایان بر خود واجب می‌دانم از خانواده عزیزم مخصوصاً پدر و مادرم که در طول دوران زندگیم یار و حامی اینجانب بوده‌اند قدردانی نموده و احساسات قلبی خود را نسبت به آنها ابراز می‌دارم.

نام خانوادگی دانشجو: جعفری نام: محمد حسین

عنوان: ارتباط درجات کاراکترهای تحویل ناپذیر و طول کلاسهای تزویج در گروههای حلپذیر

استاد راهنما : دکتر علی اکبر مهرورز

اساتید مشاور: دکتر محمد رضا درفشه، دکتر سعید اکبری

مقطع تحصیلی: دکتری رشته: ریاضی محض گرایش: جبر دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۸۷/۶/۹ تعداد صفحه: ۷۱

کلید واژه‌ها: مربعات درجات کاراکترهای تحویل ناپذیر، کاراکتر تحویل ناپذیر باوفا، نمایشهای شبه جایگشتی، مدار منظم، گروه حلپذیر، گروه متقارن، گروه متناوب

چکیده

در فصل اول، فرض کنید G یک گروه متناهی است به طوری که مربع هر درجه کاراکتر تحویل ناپذیر آن اندیس مرکز گروه را عاد می‌کند. آیا می‌توان نتیجه گرفت که گروه پوچتوان یا حتی حلپذیر است؟ اگر گروه حلپذیر نیز باشد، آیا آنگاه می‌توانیم بگوییم که گروه پوچتوان خواهد شد؟ اگر گروه فوق حلپذیر نیز باشد، آیا آنگاه می‌توانیم بگوییم که گروه پوچتوان خواهد شد؟ همچنین در مورد بعضی از تعمیمهای شرط فوق الذکر بحث خواهیم کرد.

در فصل دوم، تا چه اندازه ساختار یک گروه حلپذیر توسط بزرگترین درجه کاراکتر تحویل

ناپذیر گروه تحت تاثیر قرار می‌گیرد مورد بحث قرار خواهد گرفت. نتیجه اصلی این فصل این است که اگر بزرگترین درجه کاراکتر تحویل ناپذیر یک گروه حلپذیر کوچکتر از توان nام عدد اول p باشد و اگر گروه شامل هیچ بخشی ایزومورف با حاصل ضرب حلقوی دو گروه دوری از مرتبه p نباشد آنگاه اندیس بزرگترین $p-$زیرگروه نرمال گروه نیز کوچکتر از توان nام p خواهد بود.

در فصل سوم، ثابت می‌کنیم که یک گروه متناهی دارای یک کاراکتر تحویل ناپذیر باوفاست هرگاه دارای حداکثر دو زیرگروه نرمال می‌نیمال باشد.

در فصل چهارم، سه کمیت مربوط به نمایشهای شبه جایگشتی را برای گروههای متقارن و گروههای متناوب بدست خواهیم آورد.

فهرست مطالب

۱ مربعات درجات کاراکترهای تحویل ناپذیر ۲

۲ بزرگترین درجه کاراکتر تحویل ناپذیر در یک گروه حلپذیر ۳۳

۳ وجود کاراکترهای تحویل ناپذیر باوفا ۴۹

۴ نمایشهای شبه جایگشتی گروههای متقارن و متناوب ۵۵

واژه نامه‌ی فارسی به انگلیسی ٦۲

واژه نامه‌ی انگلیسی به فارسی ٦٦

فصل ۱

مربعات درجات کاراکترهای تحویل ناپذیر

ابتدا خلاصه‌ای از مطالب مورد نیاز از قبیل تعاریف و قضایا آورده می‌شوند و بعد نتایج حاصل شده را ذکر خواهیم کرد.
تمام گروه ها در سراسر این رساله متناهی فرض می‌شوند و اکثر نمادگذاریها و مطالب مربوط به نظریه کاراکترها با کتاب آیزاکس[1] یعنی مرجع [۸] مطابقت دارند.
فرض کنید G یک گروه، K یک کلاس تزویج از G و $\mathbb{C}$ میدان اعداد مختلط باشد. گروه–حلقه $\mathbb{C}[G]$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $\hat{K}$ نشان دهنده حاصل جمع کلاسی متناظر با K در $\mathbb{C}[G]$ باشد. قضیه زیر در حقیقت قسمتی از قضیه (۴.۲) از مرجع [۸] است.

قضیه ۱.۱ فرض کنید $K_1, K_2, \ldots, K_r$ همه کلاس های تزویج گروه G و $\hat{K}_1, \hat{K}_2, \ldots, \hat{K}_r$ حاصل جمع های کلاسی متناظر باشند. در این صورت حاصل جمع های کلاسی یک مبنا برای مرکز $\mathbb{C}[G]$ یعنی $Z(\mathbb{C}[G])$ تشکیل می‌دهند.

لم بعد که همان لم (۲۵.۲) از مرجع [۸] است رابطه بین نمایش های تحویل ناپذیر یک گروه و مرکز آن گروه را نشان می‌دهد.

لم ۲.۱ فرض کنید Θ یک نمایش تحویل ناپذیر از گروه G از درجه n روی $\mathbb{C}$ باشد و فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ روی $\mathbb{C}$ باشد به طوری که A با تمام $\Theta(g)$ ها، $g \in G$، جابجا می‌شود. در این صورت A ماتریس اسکالر است.

نتیجه (۹.۲) از مرجع [۸] در لم زیر آورده می‌شود.

Isaacs[1]

لم ۳.۱ فرض کنید Θ و Φ دو نمایش از گروه G روی $\mathbb{C}$ باشند. در این صورت Θ و Φ معادلند اگر و تنها اگر Θ و Φ کاراکتر یکسانی تامین کنند.

مجموعه تمام کاراکترهای تحویل ناپذیر مختلط گروه G را با نماد $\mathrm{Irr}(G)$ نشان می‌دهیم. فرض کنید $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ و Θ یک نمایش تحویل ناپذیر تامین کننده برای χ باشد. همچنین فرض کنید $z \in Z(\mathbb{C}[G])$. به وضوح $\Theta(z)$ با تمام $\Theta(g)$ ها، $g \in G$، جابجا می‌شود و بنابراین طبق لم (۲.۱) $\Theta(z)$ ماتریسی اسکالر است. لازم به ذکر است که چون ماتریس های اسکالر فقط با خودشان متشابه‌اند و بنا بر لم (۳.۱) نمایش های تامین کننده یک کاراکتر معادلند پس ماتریس اسکالر $\Theta(z)$ مستقل از نمایش تامین کننده برای χ است. حال فرض کنید $\Theta(z) = \omega(z)I$. چون Θ یک جبر هomomorفیسم است پس نتیجه می‌شود که ω نیز یک جبر هومومورفیسم است و بنابراین طبق قضیه (۱.۱) کافی است تابع ω روی حاصل جمع های کلاسی که یک مبنا برای $Z(\mathbb{C}[G])$ تشکیل می‌دهند محاسبه گردد. حال فرض کنید $\hat{K}$ حاصل جمع کلاسی متناظر با کلاس K بوده و $g \in K$. از اینکه $\Theta(\hat{K}) = \omega(\hat{K})I$ و χ یک تابع کلاسی است داریم

$$\chi(1)\omega(\hat{K}) = \chi(\hat{K}) = \sum_{x \in K} \chi(x) = |K|\chi(g)$$

و بنابراین $\omega(\hat{K}) = \frac{|K|\chi(g)}{\chi(1)}$.

یک عدد مختلط را که ریشه یک چند جمله‌ای تکین با ضرایب صحیح باشد یک صحیح جبری گویند. بعدی در حقیقت همان قضیه (۷.۳) از مرجع [۸] می‌باشد.

لم ۴.۱ فرض کنید $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ و $\hat{K}$ حاصل جمع کلاسی متناظر با کلاس K باشد. در این صورت $\omega(\hat{K})$ یک صحیح جبری است.

حال از لم قبل قضیه (۱۱.۳) از مرجع [۸] به راحتی اثبات می‌شود.

لم ۱.۵ فرض کنید $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. آنگاه $\chi(1)||G|$.

فرض کنید χ یک کاراکتر از G باشد. هسته χ عبارت است از زیرگروه نرمال $\ker\chi = \{\ g \in G|\chi(g) = \chi(1)\}$. همچنین تعریف می‌کنیم $Z(\chi) = \{\ g \in G||\chi(g)| = \chi(1)\}$. واضح است که $\ker\chi \subseteq Z(\chi)$. همچنین کاراکتر χ را خطی می‌نامیم هر گاه $\chi(1) = 1$.

می‌دانیم که یک تناظر یک به یک بین کاراکترهای گروه خارج قسمت G/N و آن دسته از کاراکترهای گروه G که هسته آنها شامل N است وجود دارد. در حقیقت مجموعه کاراکترهای گروه خارج قسمت G/N را می‌توان برابر مجموعه آن دسته از کاراکترهایی از گروه G در نظر گرفت که هسته آنها شامل N است. با این نگرش لم (۲۳.۲) از مرجع [۸] به آسانی اثبات می‌شود.

لم ۱.۶ فرض کنید G' زیر گروه مشتق یا جابجاگر G باشد. آنگاه $G' = \bigcap_{\chi(1)=1}\ker\chi$.

در زیر قسمت هایی از لم های (۲۷.۲)، (۲۹.۲) و همچنین لم (۲۸.۲) از مرجع [۸] آورده شده‌اند.

لم ۱.۷

(a) اگر χ یک کاراکتر از G و Θ یک نمایش تامین کننده برای χ باشد آنگاه $Z(\chi) = \{g \in G|\ \exists\ \epsilon \in \mathbb{C};\ \Theta(g) = \epsilon I\}$.

(b) اگر χ یک کاراکتر از G باشد آنگاه $Z(\chi)$ زیرگروه است.

(c) اگر χ یک کاراکتر از G باشد آنگاه برای برخی کاراکتر خطی λ از $Z(\chi)$ داریم $\chi_{Z(\chi)} = \chi(1)\lambda$.

(d) $Z(G) = \bigcap_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} Z(\chi)$.

(e) اگر $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ آنگاه $\chi(1)^2 \leq |G : Z(\chi)|$.

آشکار است که قسمت های (d) و (e) همچنین نتیجه می‌دهند که اگر $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ آنگاه $\chi(1)^2 \leq |G : Z(G)|$ و $\chi(1)^2 \leq |G : \ker\chi|$. با بکار بردن لم قبلی و لم (۴.۱) قضیه (۱۲.۳) از مرجع [۸] حاصل می‌شود.

قضیه ۸.۱ اگر $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ آنگاه $\chi(1)||G : Z(\chi)|$.

حال به آسانی از قضیه قبل و لم (۷.۱) می توان نتیجه گرفت که اگر $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ آنگاه $\chi(1)||G : Z(G)|$ و $\chi(1)||G : \ker\chi|$.

کلیه مطالب قبل نشان می‌دهند که درجات کاراکترهای تحویل ناپذیر یک گروه حاوی اطلاعات مهمی درباره ساختار گروه است. حال اگر گروه دارای برخی خواص اضافی نیز باشد آنگاه ممکن است درجات کاراکترهای تحویل ناپذیر هم در شرایط قوی تری صدق کنند و بر عکس اگر بعضی شرایط روی درجات کاراکترهای تحویل ناپذیر اعمال کنیم آنگاه امکان دارد شرایطی نیز به ساختار گروه تحمیل شود. مطالبی از این قبیل به وفور در مرجع [۸] یافت می‌شوند. به عنوان نمونه، قضیه (۹.٦) از مرجع [۸] بیان می‌کند که یک گروه دارای p−مکمل نرمال آبلی است اگر و تنها اگر تمام درجات کاراکترهای تحویل ناپذیر آن توانی از عدد اول p باشند. همچنین قضایای (٦.۱۲) و (۱۵.۱۲) از مرجع [۸] نشان می‌دهند که گروه دارای طول مشتق حداکثر ۳ است اگر حداکثر ۳ درجه کاراکتر تحویل ناپذیر وجود داشته باشند.

دیدیم که اگر $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ آنگاه $\chi(1)$ مقسوم علیهی از هر کدام از کمیت های $|G|$، $|G:Z(\chi)|$، $|G:\ker\chi|$ و $|G:Z(G)|$ است. همچنین مشاهده کردیم که $\chi(1)^2$ کمتر یا مساوی هر کدام از کمیت های $|G|$، $|G:Z(\chi)|$، $|G:\ker\chi|$ و $|G:Z(G)|$ است. در ضمن توجه کنیم که $|G:Z(\chi)|\,|\,|G:\ker\chi|$ و $|G:Z(\chi)|\,|\,|G:Z(G)|$ ولی هیچ ارتباطی در حالت کلی بین دو کمیت $|G:\ker\chi|$ و $|G:Z(G)|$ وجود ندارد.

حال منطقی به نظر می‌رسد که فکر کنیم که گروه چه خواصی باید داشته باشد تا اینکه مربعات درجات کاراکترهای تحویل ناپذیر یکی از چهار کمیت فوق را عاد کنند. گگولا[2] و لویس[3] در مقاله خودشان [۵] ذکر کرده‌اند که برکویچ[4] در یک لیست چاپ نشده از مسایل خود، مساله شماره (۱۲۱) را چنین مطرح کرده است: فرض کنید برای هر $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ داریم $\chi(1)^2\,|\,|G|$. آیا می‌توان گفت که G پوچتوان است؟ فکر طرح این مساله از آنجا ناشی می‌شود که در گروه های پوچتوان مربع هر درجه کاراکتر تحویل ناپذیر مرتبه گروه را عاد می‌کند. با این وجود آنها با یک مثال بسیار ساده که در زیر می‌آوریم نشان دادند که لازم نیست گروه پوچتوان باشد. آنها همچنین فرصت را غنیمت شمردند و توانستند با استفاده از رده بندی گروه های ساده، گروه های پوچتوان را به صورت زیر بر حسب کاراکترها مشخص کنند. محتوای [۵] قضیه زیر است.

قضیه ۱.۹ گروه G پوچتوان است اگر و تنها اگر برای هر $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ داشته باشیم $\chi(1)^2\,|\,|G:\ker\chi|$.

قبل از ذکر مثال آنها، باید به قضیه (۲۱.۴) از مرجع [۸] توجه کرد.

---

[2] Gagola

[3] Lewis

[4] Berkovich

قضیه ۱۰.۱ اگر $G = A \times B$ (حاصل ضرب مستقیم) آنگاه $\mathrm{Irr}(G) = \mathrm{Irr}(A) \times \mathrm{Irr}(B)$ به طوری که اگر $\theta \in \mathrm{Irr}(A)$ و $\varphi \in \mathrm{Irr}(B)$ آنگاه بنا به تعریف داریم $(\theta \times \varphi)(ab) = \theta(a)\varphi(b)$.

حال به ذکر مثال گگولا و لویس می‌پردازیم. فرض کنید $G = A \times B$ که در آن A یک گروه آبلی و B یک گروه دلخواه است. حال اگر $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ آنگاه طبق قضیه قبل کاراکترهای $\theta \in \mathrm{Irr}(A)$ و $\varphi \in \mathrm{Irr}(B)$ وجود دارند به طوری که $\chi = \theta \times \varphi$. چون تمام کاراکترهای تحویل ناپذیر گروه های آبلی خطی هستند پس $\chi(1) = \varphi(1)$. حال اگر همچنین فرض کنیم که کوچکترین مضرب مشترک درجات کاراکترهای تحویل ناپذیر B، مرتبه A را عاد می‌کند آنگاه به آسانی می‌بینیم که $\chi(1)^2 | |G|$. بنابراین لزومی ندارد که گروه G پوچتوان باشد چون B دلخواه است.

همچنین باید متذکر شویم که با استفاده از رده بندی گروه های ساده، گگولا اخیراً در [۴] موفق شد به نتیجه رضایت بخش زیر در رابطه با مساله برکویچ دست یابد.

قضیه ۱۱.۱ فرض کنید G یک گروه غیربدیهی باشد به طوری که برای هر $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ داشته باشیم $\chi(1)^2 | |G|$. آنگاه G دارای زیرگروه نرمال آبلی غیربدیهی است.

البته با پذیرفتن قضیه (۹.۱) ما می‌توانیم قضیه ساده زیر را اثبات کنیم.

قضیه ۱۲.۱ فرض کنید G یک گروه باشد. آنگاه گزاره های زیر معادلند.

(a) G پوچتوان است.

(b) برای هر $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ داریم $\chi(1)^2 | |G : Z(\chi)|$.

(c) برای هر $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ داریم $\chi(1)^2 || G : \ker \chi|$.

اثبات.

$(a \Rightarrow b)$ فرض کنید $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. ابتدا فرض کنید G یک p–گروه است. حال طبق قسمت (e) از لم (۷.۱) داریم $\chi(1)^2 \leq |G : Z(\chi)|$ و چون کمیت های $|G : Z(\chi)|$ و $\chi(1)$ توان هایی از p هستند نتیجه حاصل می‌شود. حال فرض کنید G پوچتوان بوده ولی p–گروه نباشد. پس زیر گروه های غیر بدیهی A و B از G وجود دارند به طوری که $G = A \times B$. حال بنا بر قضیه (۱۰.۱) کاراکترهای $\theta \in \mathrm{Irr}(A)$ و $\varphi \in \mathrm{Irr}(B)$ وجود دارند به طوری که $\chi = \theta \times \varphi$. حال به آسانی از دو رابطه زیر

$$\begin{aligned} |\chi(ab)| &= |(\theta \times \varphi)(ab)| \\ &= |\theta(a)||\varphi(b)| \\ &\leq \theta(1)\varphi(1) \\ &= \chi(1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\theta(a)||\varphi(b)| &= |(\theta \times \varphi)(ab)| \\ &= |\chi(ab)| \\ &\leq \chi(1) \\ &= \theta(1)\varphi(1), \end{aligned}$$

می‌توان نتیجه گرفت که $Z(\chi) = Z(\theta) \times Z(\varphi)$. بنابراین به استقرا نتیجه می‌شود که $\theta(1)^2||A : Z(\theta)|$ و $\varphi(1)^2||B : Z(\varphi)|$ و در نهایت $\chi(1)^2||G : Z(\chi)|$.

$(b \Rightarrow c)$ فرض کنید $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. چون $|G : Z(\chi)|||G : \ker \chi|$ حکم ثابت می‌شود.

$(c \Rightarrow a)$ این قسمت همان قضیه (۹.۱) است.

□

دقت کنیم که اگر G پوچتوان بوده و $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ دلخواه باشد آنگاه چون $|G : Z(\chi)|||G : Z(G)|$ از قسمت (b) قضیه قبل نتیجه می‌شود که $\chi(1)^2||G : Z(G)|$.

حال طبیعی به نظر می‌رسد که گروه هایی که در آنها مربعات درجات کاراکترهای تحویل ناپذیر اندیس مرکز گروه را عاد می‌کنند مورد بررسی قرار گیرند. در ادامه سعی می‌کنیم نگاهی به گروه هایی بیاندازیم که در فرض زیر صدق می‌کنند.

فرض $(*)$: فرض کنید G یک گروه باشد به طوری که برای هر $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ داشته باشیم $\chi(1)^2||G : Z(G)|$.

ابتدا باید خاطرنشان کنیم که گروهی که در مثال فوق ذکر شد به وضوح لزومی ندارد که در فرض $(*)$ صدق کند. توضیح چند نکته در اینجا ضروری به نظر می‌رسد. می‌توان انتظار داشت که گروه هایی که در فرض $(*)$ صدق می‌کنند پوچتوان نباشند. دلایل زیر کافی است تا قبول کنیم که این انتظار چندان هم بیهوده نیست. اول اینکه فرض $(*)$ ضعیف تر از شرط ذکر شده در قسمت (b) قضیه (۱۲.۱) است. به بیان دقیق تر چون $|G : Z(G)|$ بزرگتر یا مساوی $|G : Z(\chi)|$ می‌باشد، بنابراین مربعات درجات کاراکترهای تحویل ناپذیر آزادی عمل بیشتری خواهند داشت

و در نتیجه تاثیرشان بر ساختار گروه کمتر خواهد شد. دوم اینکه در فرض $(*)$ فقط مربعات درجات کاراکترهای تحویل ناپذیر و اندیس مرکز گروه نقش دارند در حالیکه در شرط ذکر شده در قسمت (b) یا قسمت (c) قضیه (۱۲.۱) نه تنها مربعات درجات کاراکترهای تحویل ناپذیر حضور دارند بلکه $|G : Z(\chi)|$ یا $|G : \ker \chi|$ نیز نقش موثری ایفا می‌کنند که خود اینها به نوبه خود به طور کامل به کاراکتر χ وابسته هستند.

در ادامه سعی بر این است که به سوالات زیر پاسخ داده شود.

۱) اگر گروه G در فرض $(*)$ صدق کند آیا می‌توان گفت که G پوچتوان است؟ حلپذیر چطور؟ گروه G چقدر می‌تواند از حلپذیری فاصله گیرد؟

۲) اگر فرض کنیم که گروه G علاوه بر اینکه در فرض $(*)$ صدق می‌کند حلپذیر نیز باشد آنگاه آیا می‌توان گفت که G پوچتوان خواهد شد؟

۳) اگر G گروهی فوق حلپذیر باشد و فرض $(*)$ هم در مورد آن صادق باشد آنگاه آیا می‌توان در مورد پوچتوانی G تصمیمی اتخاذ کرد؟

به نظر می‌رسد برای اینکه بتوانیم به سوالات فوق جوابی پیدا کنیم باید به روشی غیر از حاصل ضرب مستقیم گروه ها بیاندیشیم. در زیر نگاهی مختصر به تعریف حاصل ضرب نیم مستقیم گروه ها و معادل های آن داشته و چند لم بر حسب ضرورت ثابت می‌کنیم.

گوییم گروه H روی گروه K عمل می‌کند یا H از طریق اتومورفیسم ها روی K عمل می‌کند هرگاه برای هر $h, h_1, h_2 \in H$ و $k, k_1, k_2 \in K$ روابط زیر برقرار باشند:

$$k^1 = k,\ (k^{h_1})^{h_2} = k^{(h_1 h_2)},\ (k_1 k_2)^h = (k_1)^h (k_2)^h.$$

به بیانی معادل، گروه H روی گروه K عمل می‌کند هرگاه هومومورفیسمی مانند $\varphi : H \longrightarrow Aut(K)$ وجود داشته باشد. هسته این هومومورفیسم را هسته عمل گویند. پس هسته

عمل یعنی $\ker\varphi$ زیرگروه نرمال H است.

گوییم عضو $k \in K$ یک نقطه ثابت از عمل است هرگاه برای هر $h \in H$ داشته باشیم $k^h = k$. مجموعه تمام نقاط ثابت عمل را با نماد $C_K(H)$ نشان می‌دهیم. به راحتی دیده می‌شود که $1 \in C_K(H)$. همچنین واضح است که $C_K(H)$ زیرگروه K است.

گوییم عمل H روی K باوفا است یا H روی K به طور باوفا عمل می‌کند هرگاه $\ker\varphi = 1$ یا به عبارت معادل هرگاه φ منومورفیسم باشد.

گوییم عمل H روی K بدیهی است یا H روی K به طور بدیهی عمل می‌کند هرگاه $\ker\varphi = H$ یا به عبارت معادل هرگاه φ هومومورفیسم بدیهی باشد. همچنین آشکار است که H روی K به طور بدیهی عمل می‌کند اگر و تنها اگر $C_K(H) = K$.

گوییم عمل H روی K متباین است یا H روی K به طور متباین عمل می‌کند هرگاه $(|H|, |K|) = 1$.

فرض کنید H و K دو زیرگروه از گروه G باشند. گوییم G حاصل ضرب نیم مستقیم K توسط H است و با نماد $G = H \ltimes K$ نشان می‌دهیم اگر داشته باشیم

$$G = HK, \; H \cap K = 1, \; K \trianglelefteq G.$$

به راحتی ثابت می‌شود که گروه H روی گروه K عمل می‌کند اگر و تنها اگر گروهی مانند G وجود داشته باشد که دارای زیرگروه هایی مانند H_1 ایزومورف با H و K_1 ایزومورف با K بوده به طوری که $G = H_1 \ltimes K_1$. اگر H و K را به ترتیب با تصویرشان H_1 و K_1 در G یکسان در نظر بگیریم می‌توانیم فرض کنیم که H و K زیرگروه هایی از G هستند و بنابراین $G = H \ltimes K$. واضح است که با این یکسان سازی عمل H روی K همان عمل تزویج در گروه G خواهد شد و بنابراین هسته عمل یعنی $\ker\varphi$ دقیقاً برابر است با مرکزساز معمولی K در H یعنی $C_H(K)$.

همچنین مجموعه تمام نقاط ثابت عمل یعنی $C_K(H)$ همان مرکزساز معمولی H در K خواهد بود.

در لم زیر مرکز حاصل ضرب نیم مستقیم را در چند حالت خاص محاسبه می‌کنیم. دقت کنیم که $C_K(H)$ همان مجموعه نقاط ثابت عمل است و $C_H(K)$ نیز همان هسته عمل است.

لم ۱۳.۱ فرض کنید گروه H روی گروه K عمل می‌کند و $G = H \ltimes K$. در این صورت

(a) $Z(G) \subseteq Z(H)C_K(H)$.

(b) اگر $Z(H) = 1$ آنگاه $Z(G) = Z(K) \cap C_K(H)$.

(c) اگر $C_K(H) = 1$ آنگاه $Z(G) = Z(H) \cap C_H(K)$.

(d) اگر K آبلی باشد آنگاه $Z(G) = (Z(H) \cap C_H(K))C_K(H)$.

(e) اگر $Z(H) = 1$ و K آبلی باشد آنگاه $Z(G) = C_K(H)$.

(f) اگر $C_K(H) = 1$ و H آبلی باشد آنگاه $Z(G) = C_H(K)$.

(g) اگر H و K آبلی باشند آنگاه $Z(G) = C_H(K)C_K(H)$.

اثبات.

(a) فرض کنید $g \in Z(G)$ دلخواه باشد. پس اعضایی مانند $h \in H$ و $k \in K$ وجود دارند به طوری که $g = hk$. حال اگر $x \in H$ دلخواه باشد آنگاه از رابطه $hk = g = g^x = h^x k^x$ خواهیم داشت $h = h^x$ و $k = k^x$ و در نتیجه $h \in Z(H)$ و $k \in C_K(H)$ و بنابراین $g \in Z(H)C_K(H)$.

(b) حال فرض کنید $Z(H) = 1$. پس بنا به قسمت (a) داریم $Z(G) \subseteq C_K(H)$. حال اگر $k \in Z(G)$ و $y \in K$ دلخواه باشند آنگاه $k = k^y$ و بنابراین $k \in Z(K)$ و در نتیجه $k \in Z(K) \cap C_K(H)$. همچنین واضح است که $Z(K) \cap C_K(H) \subseteq Z(G)$.

(c) حال فرض کنید $C_K(H) = 1$. پس بنا به قسمت (a) داریم $Z(G) \subseteq Z(H)$. فرض کنید $h \in Z(G)$ و $k \in K$ دلخواه باشند. پس داریم $h = h^k$ و در نتیجه $h \in C_H(K)$. بنابراین $Z(G) \subseteq Z(H) \cap C_H(K)$ و آشکار است که $Z(H) \cap C_H(K) \subseteq Z(G)$.

(d) حال فرض کنید K آبلی است و $g \in Z(G)$ دلخواه است. پس بنا به قسمت (a) اعضایی مانند $h \in Z(H)$ و $k \in C_K(H)$ وجود دارند به طوری که $g = hk$. حال اگر $y \in K$ دلخواه باشد آنگاه از رابطه $hk = g = g^y = h^y k^y = h^y k$ خواهیم داشت $h = h^y$ و در نتیجه $h \in Z(H) \cap C_H(K)$ و بنابراین $g \in (Z(H) \cap C_H(K))C_K(H)$. به وضوح همچنین دیده می‌شود که $(Z(H) \cap C_H(K))C_K(H) \subseteq Z(G)$.

(e) این قسمت حالت خاصی از قسمت (b) یا (d) است.

(f) این قسمت حالت خاصی از قسمت (c) است.

(g) این قسمت حالت خاصی از قسمت (d) است.

□

فرض کنید H یک گروه و K یک زیرگروه H و $\mathbb{F}$ یک میدان دلخواه باشد. حال گروه–حلقه $\mathbb{F}[H]$ را در نظر بگیرید. واضح است که K می‌تواند از راست با ضرب روی $\mathbb{F}[H]$ عمل کند. به عبارتی دیگر می‌توان $\mathbb{F}[H]$ را به عنوان $\mathbb{F}[K]$–مدول راست در نظر گرفت.

گوییم T یک تراگرد (ترانسورسال) چپ K در H است هرگاه T شامل فقط یک عضو از هر هم مجموعه چپ K در H باشد.

لم زیر در حقیقت نقاط ثابت عمل فوق را نشان می‌دهد.

لم ۱۴.۱ فرض کنید H یک گروه و K یک زیرگروه H و T یک تراگرد چپ K در H بوده و $\mathbb{F}$ یک میدان دلخواه باشد و فرض کنید K روی $\mathbb{F}[H]$ از راست با ضرب عمل می‌کند. در این صورت

$$C_{\mathbb{F}[H]}(K) = \{\sum_{t\in T}\lambda_t t\sum_{x\in K}x|\lambda_t\in\mathbb{F}\}\cong\prod_{t\in T}\mathbb{F}\cong\mathbb{F}^{|H:K|}.$$

اثبات. ابتدا فرض کنید $k\in K$ و $\lambda_t\in\mathbb{F}$ دلخواه باشند که در آن $t\in T$. در این صورت خواهیم داشت

$$\begin{aligned}(\sum_{t\in T}\lambda_t t\sum_{x\in K}x)^k &= (\sum_{t\in T}\lambda_t t\sum_{x\in K}x)k\\ &= \sum_{t\in T}\lambda_t t\sum_{x\in K}xk\\ &= \sum_{t\in T}\lambda_t t\sum_{x\in Kk}x\\ &= \sum_{t\in T}\lambda_t t\sum_{x\in K}x.\end{aligned}$$

معنی عبارت فوق این است که $\sum_{t\in T}\lambda_t t\sum_{x\in K}x\in C_{\mathbb{F}[H]}(K)$. حال بر عکس فرض کنید $\sum_{x\in H}\lambda_x x\in C_{\mathbb{F}[H]}(K)$ و $k\in K$ دلخواه باشند که در آن $\lambda_x\in\mathbb{F}$. آنگاه داریم

$$\sum_{x\in H}\lambda_x x = (\sum_{x\in H}\lambda_x x)^{k^{-1}}$$