بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی و آمار
گرایش: ریاضی محض - آنالیز

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد(M.Sc)

عنوان:

قضایای نقطه ثابت در فضاهای متریک tvs-مخروطی

استاد راهنما:
دکتر حمید رضا رحیمی

استاد مشاور:
دکتر امین محمودی کبریا

پژوهشگر:
علی اکبر قربانی افتری

شهریور ۱۳۹۲

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی و آمار

گرایش: ریاضی محض - آنالیز

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد(M.Sc)

عنوان:

قضایای نقطه ثابت در فضاهای متریک tvs-مخروطی

استاد راهنما:

دکتر حمید رضا رحیمی

استاد مشاور:

دکتر امین محمودی کبریا

پژوهشگر:

علی اکبر قربانی افتری

شهریور ۱۳۹۲

تقدیم به:

تقدیم به پدرم به استواری کوه، مادرم به زلالی چشمه، همسرم به صمیمیت باران، دخترانم به طراوت شبنم.

تشکر وقدردانی :

بر حسب وظیفه و از باب " من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر اللّه عزّ و جلّ" :

از اساتید بزرگوارم جناب آقای دکتر حمید رضا رحیمی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه به من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند ونیز استاد ارجمند جناب آقای دکتر امین محمودی کبریا که زحمت مشاوره این رساله را در حالی متقبل شدند که بدون مساعدت ایشان، این پروژه به نتیجه مطلوب نمی رسید واستاد گرانمایه جناب آقای دکتر داود ابراهیمی بقا که داوری پایان نامه را پذیرفتند وسایر اساتید ارجمند که در طول مدت تحصیل از کلاسهای درسی شان بهره مند شده ام ؛ کمال تشکر و قدردانی را می نمایم.

همچنین از دوست وهمکار گرامی ام جناب آقای دکتر علیر ضا نور الدینی نهایت تشکر وقدر دانی را دارم.

بسمه تعالی

در تاریخ : ۹۲/۶/۱۷

دانشجوی کارشناسی ارشد **آقای علی اکبر قربانی افتری** از پایان نامه خود دفاع نموده وبا نمره **۱۸** به حروف **هجده** با درجه **بسیار خوب** مورد تصویب قرار گرفت.

امضاء استا راهنما

به نام خدا

معاونت پژوهش و فن آوری واحد تهران مرکز

منشور اخلاق پژوهش

با یاری از خداوند سبحان و اعتقاد به این که عالم محضر خداست و همواره ناظر بر اعمال انسان و به منظور پاس داشت مقام بلند دانش و پژوهش و نظر به اهمیت جایگاه دانشگاه در اعتلای فرهنگ و تمدن بشری، ما دانشجویان و اعضاء هیات علمی واحدهای دانشگاه آزاد اسلامی متعهد می گردیم اصول زیر را در انجام فعالیت های پژوهشی مد نظر قرار داده و از آن تخطی نکنیم:

۱- اصل حقیقت جویی: تلاش در راستای پی جویی حقیقت و وفاداری به آن و دوری از هرگونه پنهان سازی حقیقت

۲- اصل رعایت حقوق: التزام به رعایت کامل حقوق پژوهشگران و پژوهیدگان (انسان، حیوان و نبات) و سایر صاحبان حق.

۳- اصل مالکیت مادی و معنوی: تعهد به رعایت مصالح ملی و در نظر داشتن پیشبرد و توسعه کشور در کلیه مراحل پژوهش

۴- اصل منافع ملی: تعهد به رعایت مصالح ملی و در نظر داشتن پیشبرد و توسعه کشور در کلیه مراحل پژوهش

۵- اصل رعایت انصاف و امانت: تعهد به اجتناب از هرگونه جانبداری غیر علمی و حفاظت از اموال، تجهیزات و منابع در اختیار

۶- اصل رازداری: تعهد به صیانت از اسرار و اطلاعات محرمانه افراد، سازمان ها و کشور و کلیه افراد و نهادهای مرتبط با تحقیق.

۷- اصل احترام: تعهد به رعایت حریم ها و حرمت ها در انجام تحقیقات و رعایت جانب نقد و خودداری از هرگونه حرمت شکنی.

۸- اصل ترویج: تعهد به رواج دانش و اشاعه نتایج تحقیقات و انتقال آن به همکاران علمی و دانشجویان به غیر از مواردی که منع قانونی دارد.

۹- اصل برائت: التزام به برائت جویی از هرگونه رفتار غیرحرفه ای و اعلام موضع نسبت به کسانی که حوزه علم و پژوهش را به شائبه های غیرعلمی می آلایند.

فهرست مطالب

چکیده.

فضاهای متریک مخروطی در سال ۲۰۰۷ میلادی توسط هوانگ[۱] و ژانگ[۲] معرفی گردیده و قضایای نقطه ثابت در این فضاها توسط خودشان برای اولین بار مورد بررسی قرار گرفت. در این پژوهش، توسیع کلی‌تری از فضاهای متریک به نام فضاهای متریک توپولوژیک برداری- مخروطی و مفهوم c- فاصله در یک چنین فضایی چون X معرفی شده و قضایای نقطه ثابت نگاشت‌های روی آن‌ها مورد مطالعه قرار گرفته است. بویژه، خواهیم دید که برخی حقایق شناخته شده در مبحث نقطه ثابت -مثلاً قضایای نقطه ثابت از نوع کنان- حالت‌های ساده و خاصی از نتایج معرفی شده در این‌جا هستند. در انتها، نقطه ثابت‌های مشترک دو نگاشت تعریف شده روی یک فضای متریک توپولوژیک برداری- مخروطی به طور جزئی مطالعه شده‌اند.

مقدمه

به جرأت می‌توان گفت که شناخته شده‌ترین نتیجه در مبحث قضایای نقطه ثابت، اصل انقباضی باناخ[1] در مورد نگاشت‌های انقباضی است که در سال ۱۹۲۳ ارائه گردیده است. البته هر بحثی در ارتباط با نگاشت‌های انقباضی، به طور اجتناب ناپذیری به بحث دیگری در مورد نگاشت-های غیر انبساطی[2] منجر خواهد شد. قضیه‌ی شاودر در مورد این‌گونه نگاشت‌ها یکی از مهم‌ترین حقایق است و البته نتیجه‌ای که در سال ۱۹۶۵ توسط برودر، کرک و گوده ارائه گردیده بیان می‌دارد

---

[1] Banach contraction principle

[2] nonexpansive mappings

که هر نگاشت غیر انبساطی $f : C \longrightarrow C$ که در آن C زیرمجموعه‌ای با شرایط معین در یک فضای هیلبرت است، لااقل یک نقطه‌ی ثابت دارد.

چنان که انتظار می‌رود کامل بودن یک فضای متریک نقش مهمی در همگرایی دنباله‌ها و به تبع آن وجود نقطه ثابت نگاشت‌های تعریف شده روی آن‌ها دارد. به همین دلیل نگاشت‌های روی فضاهای باناخ و بحث در مورد نقاط ثابت آن‌ها مورد توجه زیادی قرار گرفته و دستاوردهای زیادی هم در آن‌ها دیده شده است. یکی از قضایای مهم در این زمینه، نتیجه‌ای منسوب به برودر، شاودر و مانچ است.

در سال‌های اخیر، رویکردهای دیگری در جهت کشف حقایق نو در این مبحث توسط پژوهش‌گران اتخاذ گردیده است که طی آن عموماً یا تعریف مفهوم متریک عمومیت یافته و یا مقدار فاصله دو عضو یک فضای متریک از حالت عددی خارج شده و به یک بردار بدل گردیده است. به عنوان نمونه‌هایی از تعمیم نوع اول می‌توان به فضاهای متریک نوع[3] و یا مفهوم دیگری به نام w– فاصله[4] اشاره کرد. در روش دوم برای تعمیم مفهوم فاصله، هوانگ و ژانگ در سال ۲۰۰۷ برد یک متریک را در یک فضای باناخ نشاندند و به عبارت دیگر مفهوم فاصله از عدد به یک بردار در یک فضای باناخ تبدیل گردید.

در پایان‌نامه حاضر، مفهوم فاصله با استفاده از وجود مخروطی چون P در یک فضای برداری توپولوژیک به برداری در آن فضا تبدیل می‌گردد. برای ارائه‌ی آن‌چه انجام گرفته، در فصل مقدمات مفاهیم و احکام مورد نیاز در سرتاسر این مجموعه را به طور خلاصه آورده‌ایم. در فصل ۱ بعد از یادآوری فضاهای برداری توپولوژیک و برخی ویژگی‌های مورد نیازمان از آن‌ها، فضاهای

---

[3] metric type spaces

[4] w-distance

که هر نگاشت غیر انبساطی $f : C \longrightarrow C$ که در آن C زیرمجموعه‌ای با شرایط معین در یک فضای هیلبرت است، لااقل یک نقطه‌ی ثابت دارد.

چنان که انتظار می‌رود کامل بودن یک فضای متریک نقش مهمی در همگرایی دنباله‌ها و به تبع آن وجود نقطه ثابت نگاشت‌های تعریف شده روی آن‌ها دارد. به همین دلیل نگاشت‌های روی فضاهای باناخ و بحث در مورد نقاط ثابت آن‌ها مورد توجه زیادی قرار گرفته و دستاوردهای زیادی هم در آن‌ها دیده شده است. یکی از قضایای مهم در این زمینه، نتیجه‌ای منسوب به برودر، شاودر و مانچ است.

در سال‌های اخیر، رویکردهای دیگری در جهت کشف حقایق نو در این مبحث توسط پژوهش‌گران اتخاذ گردیده است که طی آن عموماً یا تعریف مفهوم متریک عمومیت یافته و یا مقدار فاصله دو عضو یک فضای متریک از حالت عددی خارج شده و به یک بردار بدل گردیده است. به عنوان نمونه‌هایی از تعمیم نوع اول می‌توان به فضاهای متریک نوع[3] و یا مفهوم دیگری به نام w− فاصله[4] اشاره کرد. در روش دوم برای تعمیم مفهوم فاصله، هوانگ و ژانگ در سال ۲۰۰۷ برد یک متریک را در یک فضای باناخ نشاندند و به عبارت دیگر مفهوم فاصله از عدد به یک بردار در یک فضای باناخ تبدیل گردید.

در پایان‌نامه حاضر، مفهوم فاصله با استفاده از وجود مخروطی چون P در یک فضای برداری توپولوژیک به برداری در آن فضا تبدیل می‌گردد. برای ارائه‌ی آن‌چه انجام گرفته، در فصل مقدمات مفاهیم و احکام مورد نیاز در سرتاسر این مجموعه را به طور خلاصه آورده‌ایم. در فصل ۱ بعد از یادآوری فضاهای برداری توپولوژیک و برخی ویژگی‌های مورد نیازمان از آن‌ها، فضاهای

---

[3] metric type spaces

[4] w-distance

برداری توپولوژیک مخروطی را معرفی کرده و با استفاده از این بستر، یک فضای متریک توپولوژیک برداری - مخروطی و مفاهیم همگرایی و پیوستگی در این گونه فضاها مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

در فصل دوم نتایج اصلی پژوهش گنجانده شده‌اند. در این فصل مفهوم c– فاصله در یک فضای متریک توپولوژیک برداری– مخروطی بیان شده و بعد نتایج نقطه ثابت تحت یک c– فاصله در یک چنین فضاهایی آورده شده‌اند.

در سیر تدوین این پژوهش منابع مختلفی شامل مقاله، کتاب و اینترنت مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته‌اند که به عمده‌ی آن‌ها در بخش مراجع اشاره شده است.

مفاهیم اساسی

تعاریف مقدماتی

این فصل را با بیان تعاریف و مفاهیم مقدماتی که در بخش‌های بعد به آن‌ها نیاز خواهیم داشت و یا تعمیم آن‌ها مطرح خواهند شد، آغاز می‌کنیم.

تعریف ۱. فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناتهی و تابع

$$d : X \times X \longrightarrow [\circ, +\infty) , \qquad (x, y) \mapsto d(x, y)$$

دارای ویژگی‌های زیر باشد:

- برای $x,y\in X$، داشته باشیم: $d(x,y)=0$ اگر و فقط اگر $x=y$ باشد.
- به ازای هر $x,y\in X$ تساوی $d(x,y)=d(y,x)$ برقرار باشد.
- به ازای هر $x,y,z\in X$ داشته باشیم: $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$.

در این‌صورت d را یک متر یا متریک روی X و زوج (X,d) یک فضای متریک نامیده می‌شود.

در فضای متریک (X,d) یک دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ را کوشی گوییم، هرگاه برای هر $\varepsilon>0$، عدد طبیعی n_0 یافت شود به طوری که:

$$\forall m,n\in\mathbb{N}:\ m,n\ge n_0\to d(x_m,x_n)<\varepsilon$$

فضای متریک X را کامل گویند، هرگاه هر دنباله‌ی کوشی در آن همگرا باشد. به عنوان مثال، مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ با متریک معمولی کامل است؛ با این حال زیر فضای آن $(0,1)$ با همین متر کامل نیست. چنان که بعداً خواهیم دید، کامل بودن فضا در وجود یا عدم وجود نقطه ثابت برای نگاشت‌ها نقش مهمی دارد.

هنگامی که A و B دو مجموعه دلخواه باشند، به هر زیر مجموعه‌ی R از حاصل‌ضرب دکارتی آن‌ها یک رابطه از A به B گفته می‌شود. در واقع:

$$R\subseteq A\times B=\{(x,y):\ x\in A,y\in B\}$$

بویژه، اگر R زیر مجموعه‌ای از $A\times A$ باشد، به آن رابطه‌ای روی A گوییم.

رده‌ی خاصی از رابطه‌ها روی یک مجموعه‌ی A از اهمیت ویژه‌ای برخوردار بوده و کاربردهای مختلفی دارد که در ادامه آن را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۲. فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناتهی و R رابطه‌ای روی آن واجد شرایط زیر باشد:

- اگر برای $x, y \in X$ داشته باشیم xRy و yRx، آنگاه $x = y$ باشد. (پاد تقارنی)
- هرگاه برای $x, y, z \in X$ داشته باشیم xRy و yRz، آنگاه رابطه‌ی xRz برقرار باشد. (تعدی)
- به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم xRx. (بازتابی)

در اینصورت R یک رابطه‌ی ترتیب جزئی روی X تعریف می‌کند و X را نسبت به این رابطه مرتب جزئی یا جزئاً مرتب گوییم. اگر علاوه بر این ویژگی‌ها:

- به ازای هر $x, y \in X$، یکی از روابط xRy و یا yRx برقرار باشد، X را نسبت به رابطه-ی R تماماً مرتب یا کلاً مرتب گویند.

مثال ۳. فرض کنید X مجموعه‌ای دلخواه باشد. رابطه‌ی شمول یعنی:

$$E \sim F \iff E \subseteq F$$

یک رابطه‌ی ترتیب جزئی روی مجموعه توانی X است. این رابطه غیر از هنگامی که X تک عضوی باشد، ترتیب کلی نیست. معروف‌ترین رابطه‌ی کلاً مرتب، رابطه‌ی کوچکتری معمولی روی مجموعه اعداد حقیقی است.

فضاهای برداری نرم‌دار

فرض کنید K همواره نشان دهنده‌ی میدان اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ و یا میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ باشد.

تعریف ۴. فرض کنید X یک فضای برداری روی K باشد. نگاشت

$$p: X \longrightarrow [0,+\infty)\ , \qquad x \mapsto p(x)$$

یک شبه نرم روی X نامیده می‌شود هرگاه:

- برای هر $x,y \in X$ داشته باشیم $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$.
- تساوی $p(\lambda x)=|\lambda|\, p(x)$ برای هر $\lambda \in \mathrm{K}$ و $x \in X$ برقرار باشد.

واضح است که برای یک شبه نرم p همواره داریم $p(0)=0$. فرض کنید در مورد یک شبه نرم p شرط زیر درست باشد:

- از $p(x)=0$ نتیجه شود که $x=0$.

در این‌صورت p یک نرم روی X نامیده می‌شود و X را یک فضای نرم‌دار گویند. هنگامی که p یک نرم است، معمولاً $p(x)$ را با $\|x\|$ نشان می‌دهیم.

اگر X یک فضای نرم‌دار باشد، نگاشت $d(x,y)=\|x-y\|$ از $X \times X$ به $[0,+\infty)$ یک متر روی X تعریف می‌کند، زیرا

$$\|x-y\|=\|x-z+z-y\| \leq \|x-z\|+\|z-y\|$$

مثال ۵. به ازای هر عدد طبیعی n، فضای $\mathbb{R}^n$ نسبت به ضابطه‌ی مطرح شده‌ی زیر یک فضای نرم-دار است.

برای $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ و $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ قرار دهید:

$$\|x-y\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

تعریف ۶. فرض کنید X یک فضای نرم‌دار باشد. X را یک فضای باناخ گویند، هرگاه نسبت به متریک حاصل از نرم کامل باشد؛ به عبارت دیگر هر دنباله‌ی کوشی در آن همگرا باشد.

مثال ۷. اگر X یک فضای نرم‌دار دارای بعد متناهی باشد، آنگاه X یک فضای باناخ است.

مثال ۸. فرض کنید X مجموعه‌ی تمام دنباله‌های کران‌دار در مجموعه‌ی اعداد مختلط $\mathbb{C}$ باشد. برای $x=(x_i)_{i=1}^{\infty}$ قرار می‌دهیم:

$$\|x\|_\infty=\sup_{i\in\mathbb{N}}|x_i|$$

در این صورت $\|\cdot\|_\infty$ یک نرم روی X است و X با این نرم به یک فضای باناخ تبدیل می‌شود. این فضای باناخ را معمولاً با ℓ^∞ نشان می‌دهند.

فضاهای متریک مخروطی

در این بخش مفهوم یک فضای متریک مخروطی را بیان می‌کنیم که توسیعی از فضاهای متریک را در اختیار ما قرار می‌دهد. در قسمت عمده‌ی پایان‌نامه، با توسیع جدیدتر و عام‌تری از مفهوم فاصله کار خواهیم کرد.

تعریف ۹. فرض کنید E یک فضای باناخ روی میدان اعداد حقیقی $\mathrm{K}=\mathbb{R}$ باشد. زیرمجموعه‌ی P از E را یک مخروط گویند هرگاه:

(۱) مجموعه‌ی P ناتهی، بسته و $P \neq \{0\}$ باشد.

(۲) برای هر $x, y \in P$ داشته باشیم $x + y \in P$. به عبارت دیگر :

$$P + P \subseteq P$$

(۳) به ازای هر $x \in P$ و هر عدد حقیقی $\alpha \geq 0$ داشته باشیم $\alpha x \in P$. به عبارت دیگر:

$$\alpha P \subseteq P$$

(۴) شرایط $x \in P$ و $-x \in P$ ایجاب کنند که $x = 0$.

فرض کنید E یک فضای باناخ حقیقی و P یک مخروط در E باشد. مخروط P به طور طبیعی یک رابطه ترتیب $\leq$ روی E به صورت زیر القا می‌کند:

$$x, y \in E: \quad x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad y - x \in P$$

توجه کنید که موارد زیر همواره برقرار هستند:

(۱) به ازای هر $x \in E$، $x \leq x$. زیرا $0 \in P$ است.

(۲) اگر $x \leq y$ و $y \leq x$، آنگاه: $y - x \in P \bigcap (-P) = \{0\}$ و لذا $x = y$.

(۳) اگر $x \leq y$ و $y \leq z$، آنگاه:

$$y - x \in P, \ z - y \in P \Rightarrow (y - x) + (z - y) = z - x \in P$$

یعنی $x \leq z$.

بنابراین $\preceq$ یک رابطه ترتیب جزئی روی E است. در چنین حالتی زوج (E,P) را یک فضای باناخ مرتب گویند. نماد $x<y$ به معنای آن است که $x\leq y$ و $x\neq y$ و نامساوی اکید $x\ll y$ هنگامی بکار می‌رود که داشته باشیم:

$$y-x\in \operatorname{int} P$$

که در آن $\operatorname{int} P$ مجموعه نقاط درونی P در E است. در این فصل و در ادامه‌ی پایان‌نامه، همه جا فرض بر این است که مخروط P چنان انتخاب گردیده است که $\operatorname{int} P\neq\varnothing$ باشد.

مثال ۱۰. فضای باناخ $E=C[\circ,\text{۱}]$ متشکل از مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته از بازه‌ی $[\circ,\text{۱}]$ به مجموعه‌ی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ با نرم

$$\| f\| = \sup_{\circ\leq x\leq \text{۱}} |f(x)|$$

را در نظر بگیرید. در این صورت مجموعه‌ی

$$P=\left\{ f\in E:\ \forall x\in[\circ,\text{۱}],\ \ f(x)\geq\circ\right\}$$

یک مخروط در E است.

دو نوع مهم از مخروط‌ها را در زیر معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱۱. مخروط P نرمال نامیده می‌شود هرگاه عدد مثبت M یافت شود به طوری‌که به ازای هر x و y در E با شرط $\circ\leq x\leq y$ داشته باشیم $\|x\|\leq M\|y\|$. کوچک‌ترین عدد M صادق در این شرط را ثابت نرمال مخروط P گویند.

تعریف ۱۲. مخروط P منظم نامیده می‌شود هرگاه هر دنباله صعودی و از بالا کران‌دار در E همگرا باشد. یعنی اگر $x_\text{۱}\leq x_\text{۲}\leq x_\text{۳}\leq\cdots\leq y$، آنگاه x ی در E یافت شود که: