بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه

بخش ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد رشته ریاضی

کاربردی گرایش آنالیز عددی

حل عددی معادلات انتگرال فازی

استاد راهنما :

دکتر محمد علی ولی

استاد مشاور :

دکتر عظیم ریواز

مؤلف:

علی عبداله پور

شهریور ماه ۱۳۹۰

تقدیم به :

پدر و مادر دلسوز دانشگاه شهید باهنر کرمان،

مهندس علیرضا افضلی پور و بانو فاخره صبا،

آنان که طعم عشق را چشیدند و راه سعادت را در پیش گرفتند.

تقدیم به :

پدربزرگوار، مادر مهربان، همسر مهربان و دو خواهر عزیزتر از جانم.

به پاس دستان زحمتکش پدرم،

دعاهای شبانه مادرم،

و محبت همسرم.

چکیده

در این پایان نامه، معادلا ت انتگرال فازی، فردهلم نوع دوم وهمچنین معادلات انتگرال فازی ولترا مورد بحث وبررسی قرار می گیرد، و جواب دقیق و تقریبی با هم مقایسه شده اند. روش های به کار رفته عبارتند از روش تجزیه آدومیان، روش تقریب های متوالی، روش جایگذارهای متوالی و طرح تقریبی متوالی تیلور.

بدین منظور در فصل اول پیشنیازها و تعاریف وقضایای وجودی آورده شده اند. در فصل دوم حل معادلات انتگرال فازی بررسی شده ودر فصل سوم حل عددی معادلات انتگرال فازی بررسی شده است. همچنین جواب دقیق با جواب تقریبی مقایسه شده است.

تشکرو قدردانی:

سپاس خداوندی که سخنوران از ستودن او عاجزند، حسابگران از شمارش نعمت های او ناتوانند و تلاشگران از ادای حق او در مانده اند، خدایی که افکار ژرف اندیش، ذات او را درک نمی کنند و دست غواصان دریای علوم به او نخواهند رسید.

خداوندا، جانِ من و زبانِ من و عقلِ من، حمد و سپاس تو گویند، حمدی به کمال رسیده، حمدی به حقیقت شکر نائل آمده و حمدی تا غایت خشنودی فرا رفته.

شاکرم بر خداوندی که راه علم آموزی را فرا روی من نهاد و مرا از تاریکی جهل به سوی روشنایی دانایی رهنمون کرد. و در این راه شگرفت، معاشرانی نیکو برایم قرار داد. امید آن که شایستگی و لیاقت رسیدن به کمال دانش و علم را داشته باشم.

از استاد فرزانه و ارجمندم جناب آقای دکتر محمد علی ولی که با راهنمایی های ارزنده خود همچون چراغی فروزان، روشنگر این راه بوده اند، کمال تشکر و قدردانی را دارم. از خداوند منّان برای ایشان توفیق روز افزون و طول عمر پر برکت را خواستارم.

از استاد گرامی و بزرگوارم جناب آقای دکتر عظیم ریواز که با مشاوره های نیکو و سنجیده خود، همواره باعث پیشبرد هر چه بیشتر این رساله بوده اند، نهایت سپاسگزاری و تشکر را دارم.

از اساتید محترم، جناب آقای دکتر ماشاا... ماشین چی و جناب آقای دکتر نظری تشکر می کنم.

درپایان از قطب فازی دانشکده ریاضی و کامپیوتر دانشگاه شهید باهنر کرمان به واسطه حمایت مالی تشکر می کنم.

تابستان ۱۳۹۰

علی عبداله پور

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول

مفاهیم اولیه

۱-۱ مقدمه

پروفسور لطفی عسگرزاده که در جهان علم به پروفسور زاده شهرت دارد، در سال ۱۹۲۶ مطلبی را بدین مضمون نوشت: «ما اساساً به نوع جدیدی از ریاضیات نیازمندیم، ریاضیات مقادیر مبهم یا فازی که توسط توزیع های احتمالات قابل توصیف نیستند.»

وی ایدهٔ خویش را در این مورد در سال ۱۹۶۵ در مقاله ای تحت عنوان «مجموعه های فازی» در مجلهٔ اطلاعات و کنترل به همگان معرفی نمود.

واژهٔ «فازی» در فرهنگ آکسفورد به صورت مبهم، گنگ نادقیق و نا مشخص تعریف شده است، لذا آن را فازی یا به توصیهٔ دکتر ماشین چی، مشکّک ترجمه می کنیم.

پروفسور زاده کلمات درست یا نادرست (مشابه بله یا خیر) را واژه های مناسبی برای ماشین و کامپیوتر که از منطق دودویی یا صفر و یک استفاده می کند، نمی دانست و معتقد بود به جای آنها باید از عبارت درجهٔ درستی استفاده کرد. در واقع وی بر این اعتقاد بود که منطق فازی باید با منطق کلاسیک ارسطویی که بر مبنای صحیح و غلط بودن قضایا شکل می گیرد، جایگزین شود.

لذا نظریهٔ مجموعه های فازی، نظریه ای است برای اقدام در شرایط عدم اطمینان که قادر است بسیاری از مفاهیم و متغیرها و سیستم هایی را که نادقیق هستند، صورت بندی ریاضی ببخشد و زمینه را برای استدلال ، استنتاج، کنترل و تصمیم گیری در شرایط عدم اطمینان فراهم کند.

پروفسور زاده پس از معرفی مجموعه های فازی، مفاهیم الگوریتم فازی را در سال ۱۹۶۸، تصمیم گیری فازی را در سال ۱۹۷۰ و ترتیب فازی را در سال ۱۹۷۱ ارائه نمود. همچنین ایشان در سال ۱۹۷۳ اساس کار کنترل فازی را بنا کرد.

در این میان مهندسان ژاپنی گوی سبقت را از همگان ربودند و از کنترل کننده های فازی در مسائل خود، از جمله در سیستم قطار زیر زمینی سندایی بهره بردند و یکی از پیشرفته ترین سیستم های قطار زیرزمینی جهان را به وجود آوردند. پس از آن در آمریکا و اروپا نیز، دیدگاه های مثبتی نسبت به سیستم های فازی به وجود آمد.

با اینکه نظریهٔ مجموعه های فازی از بدو ورود به دنیای علم تاکنون، همواره در حال پیشرفت و تحول بوده است، اما هنوز در برابر قدرت تفکر و توانایی بی بدیل انسان ناچیز شمرده می شود که این دلیلی بر آیهٔ «فتبارک ا... احسن الخالقین» است.

۱-۲ ساختار مجموعه های فازی

۱-۲-۱ مجموعه معمولی و مجموعه فازی

در مجموعه های معمولی، عناصر یک مجموعه بر اساس یک ویژگی خوش تعریفی مشخص می‌شوند و خوش تعریفی به این معنی است که دقیقاً می توان مشخص کرد که هر عنصر، متعلق به مجموعه هست یا خیر. در این صورت اگر عنصری دارای ویژگی خوش تعریف مجموعه باشد عضو آن مجموعه است، در غیر این صورت عضو آن مجموعه نیست.

این خوش تعریفی را می توان به صورت زیر :

$$A = \{x \in X : p(x)\}$$

نمایش داد که در آن $p(x)$ خاصیت مجموعه است.

لذا اگر X مجموعه مرجع باشد، آنگاه زیر مجموعه معمولی A از X دسته ای از عناصر است که دقیقاً مشخص شده باشند. اما در بسیاری موارد دیگر p دارای خاصیت خوش تعریفی نیست و در تعین عناصر A دچار مشکل می شویم. مثلاً خاصیت باهوش بودن، جوان بودن، خوشمزه بودن غذا و غیره که در این موارد ضابطه p ذهنی و ناخوش تعریف است، بنابراین تعیین عناصر A بستگی به فرد تصمیم گیرنده دارد. چنین خاصیت های ناخوش تعریف، مجمو عه های فازی را به وجود می آورند.

۱-۲-۲ تابع عضویت مجموعه فازی

فرض کنید X مجموعه مرجع و A زیر مجموعه معمولی از آن باشد. برای این تابع می توان تابعی به نام تابع مشخصهٔ یا نشانگر بصورت زیر تعریف کرد:

$$\chi_A : X \to \{0, 1\}$$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

با توجه به تعریف تابع مشخصه $\chi_A(x)$ یکی از مقادیر 0 یا ۱ را برای هر $x \in X$ می گیرد.

بنا به توصیه پروفسور لطفی عسگرزاده، برد تابع مشخصه را از مجموعه دو عضوی $\{0 , 1\}$ به بازه بسته $[0 , 1]$ توسعه می دهیم، در این صورت تابعی خواهیم داشت که به هر عضو x از X، عددی از بازه $[0 , 1]$ نسبت می دهد.

در این حالت مجموعه را مجموعه فازی می نامیم و با $\tilde{A}$ نشان می دهیم و این تابع را تابع عضویت $\tilde{A}$ می نامیم و با μ_A نشان می دهیم. همچنین به ازای هر $x \in X$، $\mu_A(x)$ را درجه عضویت x در مجموعه $\tilde{A}$ می نامیم.

بنابراین یک مجموعه فازی، مجموعه ای است که درجات عضویت اعضای آن به طور پیوسته از بازه $[0 , 1]$ اختیار می شوند. مجموعه فازی $\tilde{A}$ به طور کامل و یکتا توسط تابع عضویت $\mu_A(x)$ مشخص می شود. در واقع تابع عضویت به هر عضو، وابسته به میزان دارا بودن صفت مورد نظر، درجه ای که عددی بین 0 و ۱ است، را نسبت می دهد $\mu_A(x)$ را می توان درجه پذیرش x به عنوان عضوی از $\tilde{A}$ در نظر گرفت.

۱-۲-۳ نماد گذاری مجموعه فازی

مجموعه فازی را می توان به سه صورت زیر نمایش داد:

الف) بکار بردن مستقیم تابع عضویت مجموعه فازی، که در مثال زیر از آن استفاده می شود.

مثال ۱-۲-۱: فرض کنید $X = [0 , 400]$. A زیر مجموعه فازی X با خاصیت ((نزدیک به ۲۰۰)) به وسیله تابع عضویت زیر تعریف می شود:

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{200} & x \le 200 \\ \dfrac{400-x}{200} & x > 200 \end{cases}$$

ب) بصورت مجموعه ای از زوج های مرتب که به شکل زیر نمایش داده می شود:

$$\tilde{A} = \left\{ \left(x , \tilde{A}(x) \right) : x \in X \right\}$$

ج) اگر X مجموعه متناهی (نامتناهی شمارا) به صورت $X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ باشد و $\tilde{A}$ زیر مجموعه فازی از X باشد، آنگاه مجموعه فازی $\tilde{A}$ را می توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\tilde{A}=\left\{\frac{\tilde{A}(x_1)}{x_1}, \frac{\tilde{A}(x_2)}{x_2}, \dots, \frac{\tilde{A}(x_n)}{x_n}\right\}$$

۱-۳- α برشها و اتحاد تجزیه

α- برش یکی از مفاهیم مفید و مهم در مجموعه های فازی است که بیانگر نوعی ارتباط بین یک مجموعه فازی و مجموعه های معمولی است. α- برش های مجموعه فازی $\tilde{A}$ از تحدید عناصر X ، به گونه ای که درجات عضویت آنها مساوی یا بزرگتر از مقدار مشخص α باشند به وجود می آیند، که در آن $\alpha \in [0\,,1]$ می باشد. لذا تعریف α- برش را به صورت زیر بیان می کنیم.

تعریف ۱-۳-۱: زیر مجموعه قطعی عناصری از X را که درجه عضویت آنها در مجموعه فازی $\tilde{A}$ حداقل به بزرگی α باشد α- برش $\tilde{A}$ می نامیم و با A_α نمایش می دهیم که در آن $\alpha \in [0\,,1]$ یعنی :

$$A_\alpha=\{x\in X : \tilde{A}(x)\ge \alpha\}$$

واضح است که عناصر A_α از مجموعه مرجع انتخاب می شوند، بنابراین A_α یک مجموعه معمولی است. لذا α- برش بین مجموعه فازی $\tilde{A}$ و مجموعه های معمولی A_α ارتباط برقرار می کند. در نتیجه متناظر با هر مجموعه فازی $\tilde{A}$، تعداد متناهی یا نا متناهی مجموعه معمولی α- برش خواهیم داشت.

قضیه ۱-۳-۱: اگر $\tilde{A},\tilde{B}\in F(X)$ مجموعه های فازی باشند، آنگاه ویژگی های اساسی α- برش به صورت زیر است:

۱- اگر α و β اعدادی دربازه $[0\,,1]$ باشند و $0\le\alpha\le\beta$ ، آنگاه $A_\beta \subseteq A_\alpha$. این ویژگی را تودرتو بودن α -برشها می نامند.

۲- اگر دنبالهٔ $\{\alpha_n\}$ صعودی باشد و به αمیل کند، آنگاه $A_\alpha=\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha_n}$.

۳- اگر $\tilde{A}\subseteq\tilde{B}$ باشد، آنگاه به ازای هر $\alpha\in[0\,,1]$ داریم، $A_\alpha\subseteq B_\alpha$.

۴- $\left(\tilde{A} \cup \tilde{B}\right)_{\alpha} = A_{\alpha} \cup B_{\alpha}$

۵- $\left(\tilde{A} \cap \tilde{B}\right)_{\alpha} = A_{\alpha} \cap B_{\alpha}$

اثبات: به [۲۲] مراجعه شود.

۱-۴ کمیت های فازی محدب

در نظریه مجموعه های فازی، مفهوم تحدب نقش مهم وکاربردی ایفا می کند .تعریف کمیت های فازی محدب به صورت زیر است.

تعریف ۱-۴-۱: مجموعه فازی $\tilde{A}$ را محدب گوییم ،هرگاه به ازای هر α که عضو بازه $[0\,,1]$ باشد α- برش $\tilde{A}$ محدب باشد در غیر این صورت آن مجموعه را غیر محدب گوییم.

قضیه ۱-۴-۱: مجموعه فازی $\tilde{A}$ محدب است اگر و فقط اگر برای هر $y \in [x\,,z]$ داشته باشیم:

$\tilde{A}(y) \geq \min\left\{\tilde{A}(x), \tilde{A}(z)\right\}.$

اثبات: به [۱۱] مراجعه شود.

۱-۵ تعاریف اولیه

تعریف ۱-۵-۱: فرض کنیم X یک فضای توپولوژیکی و $f: X \to [-\infty, +\infty]$، آنگاه f نیم پیوسته بالایی است اگر به ازای هر $a \in R$، مجموعه $\{x : f(x) < a\}$ باز باشد.

قرارداد ۱-۵-۱: در این پایانامه R بیانگر مجموعه اعداد حقیقی است.

مثال ۱-۵-۱: تابع $f: R \to R$ با ضابطه $f(x) = \frac{۱}{۱+x^{۲}}$ یک تابع نیم پیوسته بالایی است چون این تابع پیوسته است.

تعریف ۱-۵-۲: یک عدد فازی یک نگاشت مانند $u: R \to [0\,,1]$ است که شرایط زیر را دارا باشد:

(i) u نیم پیوسته بالایی است.

(ii) بیرون بازه ای مانند $[c,d] \subset R$، $u(x) = 0$.

(iii) اعداد حقیقی $a\,,b$ وجود داشته باشند به طوری که $c \leq a \leq b \leq d$ و همچنین

۱. $u(x)$ روی بازه $[c,a]$ اکیداًصعودی باشد.

۲. $u(x)$ روی بازه $[b,d]$ اکیداً نزولی باشد.

۳. $u(x)=1$ روی $[a,b]$

مثال ۱-۵-۲: نگاشت $u: R \rightarrow [0\,,1]$ با ضابطه زیر یک عدد فازی است.

$$u(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{2-1} & 1 \le x \le 2 \\ \dfrac{x-3}{2-3} & 2 \le x \le 3 \\ 0 & x \notin [1,3] \end{cases}$$

مثال ۱-۵-۳: نگاشت $u: R \rightarrow [0\,,1]$ با ضابطه زیر یک عدد فازی است.

$$u(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{2-1} & 1 \le x \le 2 \\ 1 & 2 \le x \le 3 \\ \dfrac{x-4}{3-4} & 3 \le x \le 4 \\ 0 & x \notin [1,4] \end{cases}$$

تعریف ۱-۵-۳: یک عدد فازی دلخواه به شکل پارامتری با یک زوج مرتب از توابع $(\underline{u}(r),\overline{u}(r))$ با $0 \le r \le 1$ نمایش داده می شود و شرایط زیر را دارا می‌باشد:

۱. $\underline{u}(r)$ تابعی کراندار، پیوسته چپ و صعودی روی بازه $[0\,,1]$ است.

۲. $\overline{u}(r)$ تابعی کراندار، پیوسته راست و نزولی روی بازه $[0\,,1]$ است.

۳. برای هر $r \in [0,1]$ ، $\underline{u}(r) \le \overline{u}(r)$.

قرارداد ۱-۵-۲: مجموعه همه اعداد فازی را با E^{1} نمایش می دهیم.

تعریف ۱-۵-۴: جمع و ضرب اعداد فازی دلخواه $u=(\underline{u}(r),\overline{u}(r))$ و $v=(\underline{v}(r),\overline{v}(r))$ به صورت زیر می باشد. در روابط زیر $k\in R$ در نظر گرفته شده است.

$$\left(\overline{u+v}\right)(r)=\overline{u}(r)+\overline{v}(r)$$
$$\left(\underline{u+v}\right)(r)=\underline{u}(r)+\underline{v}(r)$$
$$\left(\overline{ku}\right)(r)=k\,\underline{u}(r),\left(\underline{ku}\right)(r)=k\overline{u}(r)$$ اگر $K<0$ آنگاه
$$\left(\overline{ku}\right)(r)=k\overline{u}(r),\left(\underline{ku}\right)(r)=k\,\underline{u}(r)$$ اگر $K>0$ آنگاه

تعریف ۱-۵-۵: فاصله بین اعداد فازی دلخواه $u=(\underline{u},\overline{u}),v=(\underline{v},\overline{v})$ به صورت زیر می باشد.

$$D(u,v)=\max\left\{\sup_{0\le r\le 1}\left|\underline{u}(r)-\overline{v}(r)\right|,\ \sup_{0\le r\le 1}\left|\overline{u}(r)-\underline{v}(r)\right|\right\}$$

قضیه ۱-۵-۱: (E^1,D) یک فضای متری کامل است.

اثبات: به [۱۹] مراجعه شود.

تعریف ۱-۵-۶: هر تابع مانند $f:R\to E^1$ را یک تابع فازی می گوییم.

تعریف ۱-۵-۷: تابع فازی $f:R^1\to E^1$ را یک تابع پیوسته در $t_0\in R^1$ گوییم هرگاه برای هر $\varepsilon>0$ یک $\delta>0$ وجود داشته باشد به طوری که اگر $|t-t_0|<\delta$ آنگاه $D[f(t),f(t_0)]<\varepsilon$.

تعریف ۱-۵-۸: تابع $f:[a,b]\to E^1$ را در نظر بگیرید. برای هر افراز $p=\{t_0,t_1,\dots,t_n\}$ فرض کنید $R_p=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(t_i-t_{i-1})$ که در آن $\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$. قرار دهید $h=\max_{1\le i\le n}|t_i-t_{i-1}|$ آنگاه انتگرال $f(t)$ روی باز $[a,b]$ به صورت $\int_a^b f(t)dt=\lim_{h\to 0}R_p$ تعریف می شود، مشروط بر این که حد در فضای متری (E^1,D) وجود داشته باشد.

قضیه ۱-۵-۲: اگر تابع فازی $f\left(t\right)$ در فضای متری D پیوسته باشد آنگاه $\int_a^b f\left(t\right)dt$ وجود دارد و همچنین

$$\overline{\int_a^b f\left(t,r\right)dt}=\int_a^b \overline{f}\left(t,r\right)dt$$
$$\underline{\int_a^b f\left(t,r\right)dt}=\int_a^b \underline{f}\left(t,r\right)dt$$

اثبات: به [۱۹]مراجعه شود.

تعریف ۱-۵-۹: بردار $u=\left(u_1,u_2,\ldots,u_n\right)$ که درآن برای هر i،$\left(1\le i\le n\right)$، u_i ها فازی باشند را یک بردار فازی می نامیم.

تعریف ۱-۵-۱۰: فرض کنید $u=\left(u_۱,u_۲,\ldots,u_n\right), v=\left(v_۱,v_۲,\ldots,v_n\right)$ دو بردار فازی باشند، فاصله بین این دو بردار به صورت زیر تعریف می شود:

$$D\left(u,v\right)=\begin{bmatrix} D\left(u_۱,v_۱\right) \\ . \\ . \\ . \\ D\left(u_n,v_n\right) \end{bmatrix}$$

تعریف ۱-۵-۱۱: معادله انتگرال فردهلم خطی نوع دوم به صورت زیر تعریف می شود:

$$u\left(x\right)=f\left(x\right)+\lambda\int_a^b k\left(x,t\right)u\left(t\right)dt\ , \qquad (۱-۵-۱)$$

به طوری که $k\left(x,t\right)$ هسته معادله انتگرال و تابع $f\left(t\right)$ از قبل مشخص است و λ هم یک پارامتر معلوم است. معادله (۱-۵-۱) یک معادله خطی است زیرا که تابع مجهول $u\left(t\right)$ زیر علامت انتگرال به طور خطی ظاهر شده است. یعنی توان $u\left(t\right)$ یک است.

تعریف ۱-۵-۱۲: معادله انتگرال خطی و لترا نوع دوم به فرم زیر می باشد:

$$u\left(x\right)=f\left(x\right)+\lambda\int_a^x k\left(x,t\right)u\left(t\right)dt\ ,$$

که درآن تابع مجهول یعنی $u(t)$ زیر علامت انتگرال خطی می باشد.

تعریف ۱-۵-۱۳: یک جواب معادله انتگرال روی فاصله انتگرال گیری، یک تابع مانند $u(x)$ است به طوریکه در معادله (۱-۵-۱) صدق کند.

مثال ۱-۵-۵: $u(x)=e^x$ یک جواب ازمعادله انتگرال ولترای زیر است.

$$u(x)=1+\int_0^x u(t)dt \tag{۱-۵-۲}$$

در حقیقت با جایگذاری $u(x)=e^x$ در طرف راست معادله (۱-۵-۲) داریم:

$$1+\int_0^x u(t)dt=1+\int_0^x e^t dt=1+\left[e^t\right]_0^x=e^x=u(x)$$

قضیه ۱-۵-۳: (متناوب فردهلم) معادله انتگرال فردهلم (۱-۵-۱) جواب یکتا دارد اگر تنها جواب معادله $u(x)=\lambda\int_a^b k(x,t)u(t)dt$ جواب بدیهی $u(x)=0$ باشد.

اثبات: به [۲۱]مراجعه شود.

قضیه ۱-۵-۴: اگر هسته $k(x,t)$ حقیقی و پیوسته و روی مربع $a\le x\le b$, $a\le t\le b$ کراندار باشد، یعنی روی مربع داشته باشیم $|k(x,t)|\le M$ و اگر $u(x)$ در فاصله $a\le x\le b$ پیوسته و غیر صفر باشد، آنگاه شرط کافی برای وجود یک جواب منحصر بفرد معادله (۱-۵-۱) آن است که:

$$|\lambda|M(b-a)<1.$$

اثبات: به [۶] مراجعه شود.

تعریف ۱-۵-۱۴: معادله انتگرال خطی فازی فردهلم نوع دوم به صورت زیراست:

$$\tilde{u}(t)=\tilde{f}(t)+\lambda\int_a^b k(s,t)\tilde{u}(s)ds \qquad (۱-۵-۳)$$

که در آن $\tilde{f}(t), \tilde{u}(t)$ توابع فازی هستند.

تعریف ۱-۵-۱۵: معادله انتگرال ولترای خطی فازی نوع دوم به فرم زیراست:

$$\tilde{u}(x)=\tilde{f}(x)+\lambda\int_a^x k(x,t)\tilde{u}(t)dt \qquad (۱-۵-۴)$$

که در آن $\tilde{f}(x), \tilde{u}(x)$ توابع فازی هستند.

تعریف ۱-۵-۱۶: فرض کنید $\left(\underline{f}(t,r), \overline{f}(t,r)\right), \left(\underline{u}(t,r), \overline{u}(t,r)\right)$ شکل پارامتری توابع فازی $f(t), u(t)$ باشند. آنگاه شکل پارامتری معادلات انتگرال خطی فازی فردهلم نوع دوم(۱-۵-۳) به صورت زیر است:

$$\underline{u}(t,r)=\underline{f}(t,r)+\lambda\int_a^b v_1\left(s,t,\underline{u}(t,r),\overline{u}(s,r)\right)ds$$

$$(۱-۵-۵)$$

$$\overline{u}(t,r)=\overline{f}(t,r)+\lambda\int_a^b v_2\left(s,t,\underline{u}(t,r),\overline{u}(s,r)\right)ds$$

که در آن برای هر $0\le r\le 1$ و هر $a\le t\le b$،

$$v_1\left(s,t,\underline{u}(t,r),\overline{u}(s,r)\right)=\begin{cases} k(s,t)\underline{u}(s,r) & if\ k(s,t)\ge 0 \\ k(s,t)\overline{u}(s,r) & if\ k(s,t)<0 \end{cases}$$

$$v_2\left(s,t,\underline{u}(t,r),\overline{u}(s,r)\right)=\begin{cases} k(s,t)\overline{u}(s,r) & if\ k(s,t)\ge 0 \\ k(s,t)\underline{u}(s,r) & if\ k(s,t)<0 \end{cases}$$

سیستم (۱-۵-۵) را یک سیستم خطی از معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم درحالت عادی می‌گوییم.