

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه هرمزگان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض

عنوان :

بررسی تأثیر واکسیناسیون بروی یک مدل اپیدمی SIR

استاد راهنما :

دکتر محبوبه محمد حسنی

استاد مشاور :

دکتر احمد احمدی

نگارش و تنظیم :

زینب ترکمانی

خرداد ۹۰

چکیده :

در این پایان نامه ، یک سیستم اپیدمی SIR ساخته و تحلیل می شود . در آن این نتیجه حاصل می شود که اگر پارامترهای مدل در شرط $\beta > \alpha + \gamma + b$ صدق کنند ، آنگاه درنهایت بیماری پایدار و همیشگی خواهد بود . تحت همین شرط ، چگونگی تأثیر واکسیناسیون بروی سیستم اصلی را در نظر خواهیم گرفت . همچنین شرط کافی برای به طور سرتاسری مجاناً پایدار بودن جواب ریشه کن کننده بیماری هم بدست آورده می شود . به علاوه به نتیجه مهم دیگری که دست خواهیم یافت این است که اگر سرعت واکسیناسیون ، کمتر از یک مقداری باشد ، بیماری پایدار و همیشگی و در واقع غیر قابل کنترل خواهد بود .

افراد می توانند سرعت واکسیناسیون مناسب را بر اساس این نتایج نظری انتخاب و بیماری را کنترل نمایند .

واژگان کلیدی : اپیدمی ، مدل SIR ، جواب ریشه کن کننده بیماری

تقدیم به سه وجود مقدس :

آنان که ناتوان شدند تا ما به توانایی برسیم...

موهایشان سپید شد تا ما روسفید شویم...

و عاشقانه سوختند تا گرمابخش وجود ما و روشنگر راهمان باشند...

پدرانمان

مادرانمان

معلمانمان

تقدیر و تشکر :

سپاس خداوندی را که اگر بندگان را از معرفت شکرگزاری بر عطایای پی در پی و نعمت های فراوانی که به آنها ارزانی داشته بازمی داشت ، همه در نعمت های او را تصرف نموده و او را سپاسگزاری نمی کردند و به فراخی از روزی او بهره مند می شدند و او را شکر نمی گفتند ! (فرازی از صحیفه سجادیه)

اکنون که به حول و قوه الهی این پایان نامه را به سرانجام رساندم ، بر خود این وظیفه را می بینم که قدردان زحمات کسانی باشم که هیچگاه نمی توانم آن طور که شایسته است آن را به جا آورم . نخست شکرگزار نعمت های همیشگی پروردگار یکتایی هستم که در مسیر پرپیچ و خم زندگی تنهایی نگذاشت و اگر خواست و لطف و توجه او نبود ، هیچ چیز به سرانجام نیک نمی رسید .

دوم از پشتیبان های همیشگی زندگی ام ، پدر و مادر مهربانم ، که زشتی ها و درشتی هایم را گویی هیچگاه ندیدند و ندانستند ، مهر ورزیدند و همواره تکیه گاهم بودند و پلکانم برای صعود...

از استاد محترم سرکار خانم دکتر محبوبه محمد حسنی که راهنمایی ها و تذکرات دلسوزانه شان هموارکننده مسیر آماده سازی این پایان نامه بود و دلگرمی هایشان آرامش روان را برایم فراهم ساخت .

در پایان از تمامی دوستانم و همه فرشتگانی که بال های محبت خود را گسترانیدند و با تحمل دشواری ها ، سبب شدند تا در کمال آسودگی خیال و فراغت بال ، شوق آموختن در من زنده بماند، صمیمانه سپاسگزارم .

از مشاوره های دلگرم کننده استاد مشاور محترم جناب آقای دکتر احمد احمدی تشکر فراوان دارم.

همچنین از حضور داوران محترم ، جناب آقای دکتر مهدی سبزواری که در طول مسیر علم آموزی از ایشان درس های بسیار گرفتم و از جناب آقای دکتر محمدرضا فرهنگ دوست قدردانی و تشکر می نمایم .

فهرست مطالب

مقدمه..... ۱

فصل اول

تعاريف و مفاهيم اوليه..... ۵

۱-۱ سيستم ديناميكي..... ۶

۱-۱-۱ مسير..... ۷

۱-۱-۲ نقطه تعادل..... ۸

۱-۱-۳ نقطه تناوبي..... ۸

۱-۱-۴ پايداري در مفهوم لياپونوف..... ۹

۱-۱-۵ مجانباً پايدار..... ۹

۱-۱-۶ جاذب..... ۹

۲-۱ تابع لياپونوف..... ۱۰

۱-۲-۱ تعريف تابع كانديد لياپونوف..... ۱۰

۲-۲-۱ تعريف يك نقطه تعادل در يك سيستم..... ۱۱

۳-۲-۱ قضایای اساسی لیاپونوف برای سیستم های مستقل از زمان..... ۱۱

۱-۳-۲-۱ نقطه تعادل پایدار..... ۱۲

۲-۳-۲-۱ نقطه تعادل بطور موضعی مجاناً پایدار..... ۱۲

۳-۳-۲-۱ نقطه تعادل بطور سرتاسری مجاناً پایدار..... ۱۲

۳-۱ سه لم کاربردی..... ۱۳

فصل دوم

تحلیل مدل بندی ریاضی یک اپیدمی..... ۱۵

۱-۲ مدل بندی ریاضی یک بیماری واگیر دار..... ۱۶

۲-۲ بررسی نقاط تعادل سیستم (1)..... ۲۴

فصل سوم

تأثیر واکسیناسیون بر روی مدل بیماری واگیر دار سیستم (1)..... ۴۴

بررسی تأثیر واکسیناسیون و قضایای مربوط به آن..... ۴۵

واژه نامه فارسی به انگلیسی..... ۶۲

منابع و مراجع..... ۶۵

مقدمه :

همواره اثرات بیماری های عفونی و واگیردار ، بر روی انسان و حیوان عظیم بوده است ؛ به طوری که رنج های فیزیکی و روحی فراوانی برجای گذاشته است . به عنوان نمونه می توان از بیماری سارس (SARS)^۱ در سال های ۲۰۰۲-۲۰۰۳ و همچنین آنفلوآنزای نوع A در سال ۲۰۱۰ که بسیاری از کشورها را درگیر خود کرده بودند ، نام برد .

مدل بندی ریاضی بیماری های واگیردار ، یک ابزار ضروری و کاربردی برای مطالعه محدودۀ متنوعی از این بیماری ها می باشد . هدف اساسی مدل بندی ریاضی ، مطالعه شیوع و پخش بیماری ها ، هم در فضای اطراف و هم در زمان می باشد ، به طوری که فهمیدن مکانیزم انتقال بیماری و ویژگی های تأثیرگذار آن ، افراد را قادر به پیش بینی هایی در مورد بیماری و در نتیجه طراحی استراتژی های کنترل بیماری می نماید .

شناخت ریاضیاتی یک اپیدمی^۲ دارای تاریخچه طولانی می باشد که برمی گردد به مدل بیماری آبله دانیل برنولی^۳ در سال ۱۹۷۰ [۳] . اما بیشتر تئوری های ابتدایی در این زمینه ، بین سال های ۱۹۰۰ تا ۱۹۳۵ توسعه داده شد . می توان مهمترین آنها را مدل همه گیری^۴ مشهور SIR کرمک و مک کندریچ^۵ نام برد که در سال ۱۹۲۷ برای مطالعه طاعون سیاه ارائه شد [۷] . در سال ۱۹۳۲ یک مدل SIS ساخته شد

^۱ Severe Acute Respiratory Syndrome
^۲ Mathematical Epidemiology
^۳ Daniel Bernoulli
^۴ epidemic
^۵ Kermack and McKendrick

و " نظریه آستانه " (Threshold Theory) بنا نهاده شد [۱]. در سال های اخیر ، مدل ها بیشتر برای ارزیابی تأثیرات روش های مختلف کنترل بیماری به کار برده می شوند .

شناخت ریاضیاتی اپیدمی با سایر دانش ها متفاوت می باشد زیرا خود را به اعتباربخشی آزمایشات معطوف نمی کند ؛ چرا که آزمایش و تجربه ، گاه بسیار سخت و گاه هم غیر اخلاقی می باشد . مدل بندی ریاضی به عنوان ابزاریست برای مقایسه استراتژی های مختلف ، که طرح ریزی یک همه گیری قابل پیش بینی را فراهم می آورد . همچنین هدف دیگر مدل بندی اپیدمیولوژی ، بوجود آوردن پیش بینی هایی در مورد وقوع و حادث شدن بیماری در آینده می باشد .

در واقع می توان گفت مدل بندی ریاضی ، ابزار مهمی برای آنالیز نحوه شیوع و کنترل بیماری می باشد . فرایند فرمول بندی مدل ، موجب روشن شدن فرضیات ، مقادیر و پارامترها می باشد . پارامترهای به کار برده شده در یک مدل همه گیری ، باید تفسیر واضحی داشته باشند [۳] .

فایده دیگر مدل بندی اپیدمیولوژیکی ، قابل استفاده بودن آن برای ارزیابی حدس های کمی و مقداری است . به طور مثال مدل ها می توانند این ادعا را بررسی کنند که یک برنامه واکسیناسیون دو مرحله ای برای سرخک ، منجر به ایمنی جمعیت مورد نظر خواهد شد ، در حالی که واکسیناسیون یک مرحله ای ، چنین نتیجه ای نخواهد داشت [۳] .

در کنار اهداف و مزیت های و فراوان مدل های ریاضی ، آنها دارای محدودیت هایی نیز می باشند . اولین و واضح ترین این محدودیت ها این است که تمامی آنها نوعی ساده سازی از واقعیت هستند ؛ چرا که همان طور که گفته شد ، آزمایش و تجربه برای تخمین داده ها ، گاه غیر ممکن و غیر اخلاقی است (البته اگر تحقیق و بررسی فرضیات بصورت درست غیر ممکن باشد ، پذیرش فرضیات با یک ماهیت مقداری می تواند با ارزش باشد [۱۰]) . هنگام فرمول بندی یک بیماری خاص ، لازم است تصمیم گرفته شود که کدام عامل حذف و کدام عامل در نظر گرفته شود . این انتخاب اغلب به سؤال های خاصی که پرسیده و باید به آنها جواب داده شود ، بستگی دارد . مدل های ساده این مزیت را دارند که دارای پارامترهای کمی می باشند اما این اشکال بر آن وارد است که بسیار خام و غیرواقعی است . مدل های پیچیده ممکن است واقعی تر باشند اما شامل پارامترهای بسیاری است که در نظر گرفتن تمامی آنها ، محاسبات را سخت و پیچیده می کند .

هنر فرمول بندی اپیدمیولوژی ، ساختن انتخاب هایی مناسب برای فرمول بندی مدل هاست به طوری که علاوه بر اینکه ساده باشد ، به اندازه کافی قابلیت جواب دادن به سؤالات پیش آمده را داشته باشد [۳].

ساده سازی مدل بندی و پذیرش فرضیات ، گاه منجر به پیش بینی های نادرستی می شود . مهمترین دلیل تفاوت بین رفتارها و پیش بینی های مدل ریاضی و شیوع حقیقی بیماری ، این است که انتقال بیماری در واقعیت براساس فعل و انفعالات نوع بشر و رفتارها و عکس العمل های هوشمندانه آنهاست . در واقع انسان ها هرگز از راه های قابل پیش بینی با دلیل همچون باکتری ها و سلول ها ، رفتار نمی کنند . بنابراین باید هم قابلیت ها و هم محدودیت های مدل بندی ریاضی را پذیرفت [۱۰] .

مدل های ریاضی بر اساس سیستم "مستعد های به بیماری ، S ، ناقلین بیماری^۷، I ، و ایمنی یافته های از بیماری ، R ،" نوشته می شوند . به طور مثال مدل اپیدمی SIR ، بدین صورت است که افراد یک جمعیت خاص ، در مرحله اول و قبل از ورود بیماری ، مستعد ابتلا به بیماری هستند . با ورود اولین مورد بیماری به جمعیت ، در مرحله دوم ابتلا به بیماری وجود دارد و در مرحله سوم ، مبتلایان به بیماری بعد از بهبودی از بیماری ، وارد مرحله ایمنی یافتگی از بیماری می شوند ؛ بدین معنی که تا پایان عمر هرگز به بیماری دچار نمی شوند و یا حداقل یک دوره ایمنی یافتگی از بیماری خواهند داشت . از این نوع می توان به بیماری های سرخک ، سرخجه ، آبله مرغان و ... اشاره کرد . و یا مدل SIS ، مدلی است که بیماران پس از بهبودی از بیماری ، هیچ ایمنی ای در برابر بیماری نخواهند داشت و باز هم مستعد ابتلا به بیماری هستند . همچون بیماری های سل ، ذات الریه ، مننژیت و ...

البته در بعضی از مدل ها ، مراحل همچون دوره نهفتگی^۹ بیماری ، E ، وجود دارد که در آن ، بیماری پس از انتقال به شخص وارد مرحله نهفتگی بیماری می شود که از این نوع می توان بیماری ایدز را نام برد [۱۰] .

از جمله پارامترهای مورد استفاده در مدل مورد بحث این پایان نامه ، سرعت تماس ، β ، سرعت تولد ، b ، سرعت مرگ ، d ، گنجایش محیط ، K ، سرعت ایمنی یافتگی ، γ ، می باشند . البته پارامترهای دیگری هم وجود دارند که براساس نیاز مدل ، وارد فرمول بندی می شوند . این مقادیر بر اساس آزمایشات

^۶ Susceptible
^۷ Infective
^۸ Recovered
^۹ Exposed

و نمونه گیری ها در جمعیت های مختلف محاسبه شده اند و مقادیری ثابت می باشند. در این پایان نامه از سرعت تولد و سرعت مرگ لجستیک تعمیم یافته^{۱۰} استفاده می شود. سرعت تولد، ثابت و مقداری مثبت است. سرعت مرگ با طبیعت لجستیک یعنی سرعت مرگ همراه با بالا رفتن اندازه جمعیت تا گنجایش محیط، K ، افزایش می یابد. برای دیدن جزئیات بیشتر مراجعه شود به منبع [۶].

از مهمترین مقادیری که در مدل بندی های ریاضی منظور می گردد، تعداد موارد جدید بیماری در واحد زمان است که به اصطلاح به آن "میزان بروز"^{۱۱} گفته می شود. تجربیات ثابت کرده "میزان بروز استاندارد"^{۱۲} که بصورت $\frac{\beta XY}{N}$ می باشد، بهترین نوع میزان بروز می باشد. جزئیات بیشتر را در [۴] ببینید.

در این پایان نامه مدل (1) و مدل (7) مورد بررسی قرار می گیرند. در مدل (1) بدون واکسیناسیون و مدل (7) با در نظر گرفتن واکسیناسیون، بیماری را مورد بررسی قرار می دهیم. در فصل ۱ ابتدا مفاهیم بنیادی و مورد نیاز را ارائه می دهیم. در فصل ۲ مدل اپیدمی SIR (1) با سرعت تولد و سرعت مرگ لجستیک تعمیم یافته و در نظر گرفتن سایر پارامترها ساخته و تحلیل می شود. در بخش دوم همین فصل، نقاط تعادل این سیستم مورد تحلیل و بررسی قرار می گیرد. در قضیه پایانی فصل ۱، با مقایسه دو کمیت β و $\gamma + b$ می توان در مورد وضعیت نقاط تعادل تصمیم گیری کرد. در واقع تا حدی آینده بیماری را به ما نشان می دهد که اهمیت و واقع بینی سیستم (1) را مشخص می کند.

در فصل ۳، پارامتر مربوط به واکسیناسیون وارد سیستم می شود. اینکه سرعت واکسیناسیون چقدر باشد اهمیت فراوانی دارد. سیستم (7) با در نظر گرفتن همین فاکتور، نوشته می شود. شاید قضیه پایانی این فصل را بتوان به عنوان شاهدهی بر واقعی و کاربردی بودن این پایان نامه دانست چرا که نشان می دهد که اگر سرعت واکسیناسیون از مقداری مشخص کمتر باشد، بیماری همواره در جمعیت خواهد بود و در واقع غیر قابل کنترل است، به اصطلاح ماندگار است.

^{۱۰} Generalized Logistic birth and death rate
^{۱۱} Incidence
^{۱۲} Standard Incidence

فصل اول

مفاهیم و تعاریف بنیادی

در این فصل مفاهیم و تعاریف بنیادی ای را که در فصل های بعد مورد استفاده قرار می گیرند ، بیان می کنیم . ابتدا با تعریف اولیه سیستم دینامیکی و تعاریف وابسته به آن شروع می کنیم . در ادامه تابع لیاپونوف و قضایای مورد استفاده مربوط به آن را خواهیم آورد . بدین منظور از منابع [۵,۸,۹,۱۱] استفاده کردیم .

۱-۱ سیستم دینامیکی

تعریف : فرض کنیم $\varphi: \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته حقیقی مقدار تعریف شده بروی ضرب مجموعه اعداد طبیعی و مجموعه اعداد حقیقی می باشد . حال فرض کنیم دو شرط زیر را داشته باشیم :

$$\varphi(0, x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (i)$$

$$\varphi(k + \ell, x) = \varphi(k, \varphi(\ell, x)) \quad \forall k, \ell \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \quad (ii)$$

گوییم φ یک سیستم دینامیکی گسسته رو به جلو^۱ یا نیم شار گسسته^۲ است اگر تنها شرط (ii) برقرار باشد .

در این تعریف ، نیم شار از این جهت گسسته گفته می شود که یک خانواده یک پارامتری از نگاشت های پیوسته است که این پارامتر در مراحل گسسته و بروی اعداد طبیعی تغییر می کند . به آن یک بعدی گفته می شود زیرا که بروی مجموعه اعداد حقیقی عمل می کند . می توانیم نیم شاری به طور مشابه بروی \mathbb{R}^n نیز تعریف کنیم که آن را $-n$ بعدی می نامیم . به آن سیستم دینامیکی رو به جلو گوییم چرا که اگر \mathbb{N} را به صورت زمان گسسته در نظر بگیریم ، آنگاه اگر از موقعیتی مثل x شروع کنیم ، تابع φ برای $k > 0$ ، آن را به آینده یا به جلو می برد اما لزوماً نمی تواند آن را به عقب ببرد . اگر به جای \mathbb{N} ، \mathbb{Z} قرار دهیم ، این امکان را پیدا خواهد کرد ، بنابراین به تابع φ ، یک شار کامل^۳ گفته می شود که در این صورت برای شار کامل φ ، شرط (i) هم برقرار است .

^۱ Discrete forward dynamical system
^۲ Discrete semiflow
^۳ Flow

شرط (i) می گوید که برای $k = 0$ ، نگاشت $\varphi(0, \bullet)$ ، همانی است. (شاید بتوان گفت که اگر \mathbb{N} زمان باشد، در زمان 0، شرایط هیچ تغییری نمی کند.) شرط (ii) این مطلب را بیان می دارد که اگر از وضعیتی مثل x شروع کنیم و بعد از l مرحله به وضعیت دیگری برسیم و از این وضعیت جدید، k مرحله حرکت کنیم، به وضعیتی می رسیم که اگر از x شروع و $k + l$ مرحله حرکت می کردیم هم به آن می رسیدیم.

اگر تعریف کنیم $F(x) := \varphi(1, x)$ ، آنگاه از شرط (ii) تعریف بالا خواهیم داشت که

$$\varphi(2, x) = \varphi(1, \varphi(1, x)) = \varphi(1, F(x)) = F(F(x)) = (FoF)(x)$$

آنگاه برای $k \in \mathbb{N}$

$$\varphi(k, x) = \varphi(1, \varphi(k-1, x)) = F(F^{k-1}(x)) = (Fo\dots oF)(x) = F^k(x)$$

بنابراین می توانیم بگوییم که نیم شار، با تکرار تابع پیوسته $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، تولید شده است. در این صورت گوییم نیم شار، تولید شده توسط تابع F می باشد.

۱-۱-۱ مسیر^۴

تعریف: برای هر $x \in \mathbb{R}$ ، مجموعه $\{\varphi(k, x) \mid k \in \mathbb{N}\}$ را مسیر x گوییم.

بعنوان مثال برای یک نمونه جمعیتی، اگر \mathbb{N} را زمان در نظر بگیریم، برای $k \in \mathbb{N}$ ، $\{\varphi(k, x) \mid k \in \mathbb{N}\}$ ، مسیر تغییرات جمعیت در طول زمانی مشخص را نشان می دهد. اگر بخواهیم این مسیر را به صورت دنباله نمایش دهیم، همانند زیر خواهد بود:

$$\varphi(1, x) = F(x), \varphi(2, x) = F^2(x), \varphi(3, x) = F^3(x), \dots, \varphi(k, x) = F^k(x)$$

۲-۱-۱ نقطه تعادل^۵

تعریف: نقطه e را نقطه تعادل یا نقطه ثابت^۶ از نیم شار φ گوئیم، هر گاه $\varphi(k, e) = e$ برای هر $k \in \mathbb{N}$ برقرار باشد.

برای نقطه تعادل e ، مسیر آن به صورت e, e, e, \dots می باشد.

۳-۱-۱ نقطه تناوبی^۷

تعریف: نقطه P را نقطه تناوبی با دوره تناوب n گوئیم، اگر $\varphi(n, P) = P$ و $\varphi(k, P) \neq P$ برای $k < n$ باشد. نقطه تناوبی برای نیم شار φ ، نقطه ثابت نگاشت F^n خواهد بود

$$\varphi(n, P) = F^n(P) = P$$

مسیر نقطه تناوبی P با دوره تناوب n به صورت زیر می باشد

$$P = P_0, P_1 = \varphi(1, P_0), P_2 = \varphi(2, P_0), \dots, P_{n-1} = \varphi(n-1, P_0)$$

این مسیر دقیقاً شامل n نقطه است. هر کدام از نقاط این مسیر، خودشان یک نقطه تناوبی با دوره تناوب n هستند.

^۵ Equilibrium point
^۶ Fixed point
^۷ Periodic point

۴-۱-۱ پایداری در مفهوم لیاپونوف^۹

تعریف: نقطه ثابت e از نیم شار φ را پایدار در مفهوم لیاپونوف^۹ گوئیم هر گاه برای هر $\varepsilon > 0$ ، وجود داشته باشد $\delta > 0$ ، به طوری که برای $|x - e| < \delta$ ، برای تمام $k \in \mathbb{N}$ داشته باشیم

$$|\varphi(k, x) - e| < \varepsilon .$$

می توان این تعریف را بدین صورت تفسیر کرد که برای هر x_0 که به اندازه کافی به e نزدیک است ، مسیر x_0 نیز در تمام آینده به e نزدیک خواهد ماند .

۵-۱-۱ مجاناً پایدار^{۱۰}

تعریف: اگر نقطه ثابت e ، پایدار در مفهوم لیاپونوف باشد و وجود داشته باشد $\rho > 0$ ، بطوریکه برای $|x - e| < \rho$ داشته باشیم $|\varphi(k, x) - e| \rightarrow 0$ ، هنگامی که $k \rightarrow \infty$ می رود ، آنگاه نقطه e را مجاناً پایدار گوئیم .

این بدین معنی است که برای هر x_0 که به اندازه کافی نزدیک e باشد ، مسیر x_0 ، برای $k \rightarrow \infty$ ، به e میل می کند .

نکته: به نقطه ثابت e ، ناپایدار گوئیم ، اگر پایدار در مفهوم لیاپونوف نباشد .

۶-۱-۱ جاذب^{۱۱}

تعریف: نقطه ثابت e را جاذب گوئیم اگر وجود داشته باشد $\rho > 0$ به طوری که برای $|x - e| < \rho$ داشته باشیم $|\varphi(k, x) - e| \rightarrow 0$ وقتی که $k \rightarrow \infty$ می رود .

^۸ Stable in Lyapunov sense

^۹ الکساندر لیاپونوف یک ریاضیدان روسی بود که بین سال های ۱۸۵۷ تا ۱۹۱۸ می زیسته است . شهرت او به خاطر مطرح کردن همین تئوری های پایداری در سیستم های دینامیکی است .

^{۱۰} Asymptotically stable

^{۱۱} Attractive

۲-۱ تابع لیاپونوف

توابعی که می توانند پایداری یک سری از نقاط تعادل را اثبات کنند، "توابع کاندید لیاپونوف"^{۱۲} نام دارند. هیچ روش متداولی برای ساختن و یا پیدا کردن یک تابع کاندید لیاپونوف وجود ندارد. این ناتوانی در یافتن تابع کاندید لیاپونوف، هیچ ارتباطی با پایدار بودن یا نبودن نقاط ندارد؛ بدین معنی که عدم توانایی در پیدا کردن یک تابع کاندید لیاپونوف به معنای ناپایدار بودن سیستم نمی باشد.

قضایای اساسی لیاپونوف، برای سیستم های "مستقل از زمان"^{۱۳} که به طور مستقیم با توابع لیاپونوف در ارتباط هستند، ابزار مفیدی برای اثبات پایداری یک نقطه تعادل در یک سیستم دینامیکی مستقل از زمان می باشد.

این را باید بدانیم که قضایای اساسی لیاپونوف، برای سیستم های دینامیکی مستقل از زمان ابزار کافی اما نه لازم برای اثبات پایداری یک نقطه تعادل می باشد. یافتن یک تابع لیاپونوف برای یک نقطه تعادل معین، ممکن است کاملاً از روی خوش شناسی باشد. آزمون و خطا می تواند روشی مناسب برای یافتن تابع لیاپونوف باشد.

۱-۲-۱ تعریف تابع کاندید لیاپونوف

فرض کنیم $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع اسکالر باشد. آنگاه به V ، تابع کاندید لیاپونوف

گفته می شود اگر این تابع به طور موضعی معین مثبت^{۱۴} باشد یعنی

$$V(0) = 0$$

$$V(x) > 0 \quad \forall x \in U \setminus \{0\}$$

به طوری که U یک همسایگی اطراف نقطه $x = 0$ باشد.

^{۱۲} Lyapunov-candidate-functions

^{۱۳} autonomous

^{۱۴} Locally positive definite

۲-۲-۱ تعریف یک نقطه تعادل در یک سیستم

فرض کنیم $\begin{cases} g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ \dot{y} = g(y) \end{cases}$ یک سیستم دینامیکی مستقل از زمان با نقطه تعادل y^*

$$0 = g(y^*) \quad \text{باشد یعنی}$$

گوییم یک تبدیل مؤلفه ای به صورت $x = y - y^*$ وجود دارد به طوری که

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x + y^*) = f(x) \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

بنابراین سیستم جدید $f(x)$ ، در نقطه 0 دارای نقطه تعادل خواهد بود.

۳-۲-۱ قضایای اساسی لیاپونوف برای سیستم های مستقل از زمان

قضیه: فرض کنیم که $x^* = 0$ ، یک نقطه تعادل برای سیستم $\dot{x} = f(x)$ باشد، همچنین فرض

کنیم که

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = \nabla V \cdot \dot{x} = \nabla V \cdot f(x)$$

بنابراین $\dot{V}(x)$ ، مشتق نسبت به زمان^{۱۰} تابع کاندید لیاپونوف V می باشد.

۱-۳-۲-۱ نقطه تعادل پایدار

قضیه: اگر تابع کاندید لیاپونوف V ، بطور موضعی معین مثبت باشد و همچنین مشتق نسبت به زمان این

تابع، به طور موضعی نیمه معین منفی باشد یعنی

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in B \setminus \{0\}$$

برای یک همسایگی B از نقطه 0 ، آنگاه نقطه تعادل، پایدار است.

۱-۳-۲-۲ نقطه تعادل به طور موضعی مجاناً پایدار^{۱۶}

قضیه: اگر تابع کاندید لیاپونوف V ، بطور موضعی معین مثبت باشد و همچنین مشتق نسبت به زمان آن،

به طور موضعی معین منفی باشد یعنی

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \in B \setminus \{0\}$$

به طوری که B یک همسایگی از نقطه 0 باشد، آنگاه نقطه تعادل، به طور موضعی مجاناً

پایدار است.

۱-۳-۲-۳ نقطه تعادل به طور سرتاسری مجاناً پایدار^{۱۷}

قضیه: اگر تابع کاندید لیاپونوف V ، به طور سرتاسری معین مثبت و محوراً بی کران^{۱۸} باشد،

همچنین مشتق نسبت به زمان آن هم به طور سرتاسری معین منفی باشد یعنی

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

Locally asymptotically stable equilibrium ^{۱۶}
 Globally asymptotically stable equilibrium ^{۱۷}
 Radially unbounded ^{۱۸}

آنگاه نقطه تعادل ، به طور سرتاسری مجاناً پایدار است .

توضیح : تابع کاندید لیاپونوف را محوراً بی کران گوئیم اگر

$$\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty$$

۳-۱ سه لم کاربردی :

در این قسمت سه لم مهم در بحث معادلات دیفرانسیل ضربه ای^{۱۹} را ارائه می دهیم که در فصل های بعدی مورد استفاده خواهند بود :

لم ۱-۳.۱ : ([۲]) فرض کنیم سیستم زیر را داشته باشیم

$$\left\{ \begin{array}{l} s'(t) = b(1-s(t)) - (\beta - \alpha)s(t)i(t), \\ i'(t) = \beta s(t)i(t) + \alpha i^2(t) - (\alpha + \gamma + b)i(t), \end{array} \right\}, \quad t \neq n\tau, \quad n=1,2,3,\dots$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s(n\tau^+) = (1-p)s(n\tau^-), \\ i(n\tau^+) = i(n\tau^-), \end{array} \right\}, \quad t = n\tau, \quad n=1,2,3,\dots$$

به طوری که در آن τ یک زیربازه از مجموعه اعداد حقیقی مثبت باشد و b, α, β, γ و p

مقادیر ثابت مثبتی از مجموعه اعداد حقیقی مثبت می باشند؛ حال اگر فرض کنیم $(s(t), i(t))$ ،

جوابی برای این دستگاه با شرایط اولیه $i(0^+) \geq 0$ و $s(0^+) \geq 0$ باشد، آنگاه برای همه

$t \geq 0$ ، $i(t) \geq 0$ و $s(t) \geq 0$. علاوه بر این اگر $s(0^+) > 0$ و $i(0^+) > 0$ خواهیم داشت

$$. \quad i(t) > 0 \quad \text{و} \quad s(t) > 0$$