وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

b-رنگ‌آمیزی گراف‌ها

پایان‌نامهٔ دکتری

سعید شعبانی

استاد راهنما: **دکتر حسین حاجی‌ابوالحسن**

استاد مشاور: **دکتر رشید زارع نهندی و دکتر منوچهر ذاکر**

تیر ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

خانواده‌ی عزیزم

اساتید و معلمانم

و همه‌ی آن‌هایی که دوستشان دارم.

تشکر و قدردانی

در ابتدا پروردگار عزیزم را به خاطر همه‌ی نعمت‌هایی که به من عطا نمود شاکر و سپاسگزارم. خداوند یکتایی که سخنوران در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند.

از خانواده‌ی عزیزتر از جانم که همواره یار و یاور و همراه من بوده اند کمال امتنان را دارم. در طول سال‌ها زندگی در کنار آنان، فهمیده‌ام که افتخار داشتن چنین خانواده‌ای بسیار بیشتر از لیاقتم بوده است. به راستی، وجودشان انگیزه‌ای است بی‌پایان برای ادامه‌ی زندگیم.

از استاد عزیزم جناب آقای دکتر حسین حاجی‌ابوالحسن، به خاطر مطالب فراوانی که از ایشان آموختم و نیز تمامی زحمات و کمک‌ها و راهنمایی‌های ارزنده‌یشان در طول تحقیق و تدوین این پایان‌نامه، از صمیم قلب سپاسگزارم و خدا را بسیار شاکرم که افتخار شاگردی ایشان را داشته‌ام.

از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر رشید زارع نهندی، به خاطر تمامی راهنمایی‌ها، کمک‌ها و مهربانی‌های روز افزونشان در طول تحصیلاتم در دوره‌ی کارشناسی ارشد و دوره‌ی دکتری، نهایت تشکر و قدردانی را دارم و همواره قدردان زحمات بی‌دریغ ایشان هستم و نیز خدا را شکر می‌کنم که افتخار شاگردی چنین استادی را داشتم.

بدون شک نقش استاد راهنما در آینده‌ی علمی یک دانشجوی دکتری بسیار مهم و تأثیرگذار است و برای یک دانشجو موهبتی بزرگ است که استاد راهنمایی بزرگ در حوزه‌ی تخصصی خود داشته باشد. از آنجایی‌که آقای دکتر حاجی‌ابوالحسن عضو هیأت علمی دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه‌ی زنجان نبودند، افتخار شاگردی ایشان در ابتدا برای بنده میسر نبود. اما حمایت و لطف فراموش‌نشدنی آقای

دکتر فؤاد کاظمی و آقای دکتر رشید زارع نهندی باعث نایل شدن بنده به این مهم گردید. لذا از این دو استاد بزرگ به خاطر لطف تأثیرگذارشان صمیمانه سپاسگزارم و خود را مدیون ایشان می‌دانم.

از آقای دکتر منوچهر ذاکر به خاطر درس‌هایی که با ایشان گذراندم تشکر می‌کنم.

از آقای دکتر سید عبادا... محمودیان، چهره‌ی ماندگار ریاضی ایران، که مهربانانه زحمت داوری این پایان‌نامه را قبول کردند بسیار سپاسگزارم و حضور ایشان در جلسه‌ی دفاع را افتخاری بزرگ برای خود می‌دانم.

از آقای دکتر حسین شاه‌محمد که در طول مسافرت کوتاه خود به ایران زحمت داوری این پایان‌نامه را از سر لطف پذیرفتند، صمیمانه متشکرم و حضور ایشان را افتخاری بزرگ برای خود می‌دانم.

بر خود لازم می‌دانم از دیگر اساتید گرامی هیأت داوران، آقای دکتر علی طاهرخانی، آقای دکتر بهنام خسروی و آقای دکتر محمد مهدی نجف‌پور، به خاطر قبول داوری این پایان‌نامه و پیشنهادهای مفیدشان خاضعانه تشکر کنم.

از اساتید بزرگواری چون آقای دکتر محمدرضا سالاریان، آقای دکتر سعاد ورسایی، آقای دکتر جمال روئین، آقای دکتر سعید صالحی پورمهر، آقای فرخ فروهنده و آقای خسرو حسین‌زاده، به خاطر درس‌های بسیار سودمندی که با ایشان گذراندم صمیمانه سپاسگزارم.

از تمامی دوستان مهربانم که مجالی برای نام آن‌ها نیست اما یاد و خاطرات ایشان همواره با من خواهد بود مخلصانه سپاسگزارم و از خدای بزرگ، سلامتی و شادی و پیروزی را در همه‌ی مراحل زندگیشان آرزومندم.

در انتها وظیفه دارم از دانشگاه شهید بهشتی و پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، برای مهمان‌نوازی و امکاناتی که از سر لطف در اختیارم قرار دادند، از صمیم قلب تشکر کنم.

چکیده

یک رنگ‌آمیزی رأسی سره از گراف G را یک b-رنگ‌آمیزی از گراف G می‌نامند هرگاه هر کلاس رنگی دارای رأسی باشد که این رأس در تمام کلاس‌های رنگی دیگر همسایه داشته باشد. هر رنگ‌آمیزی از گراف G با $\chi(G)$ رنگ، یک b-رنگ‌آمیزی از G است. به بزرگ‌ترین عدد طبیعی k که یک b-رنگ‌آمیزی از گراف G با k رنگ وجود داشته باشد، عدد b-رنگی گراف G می‌گویند و آن را با $\varphi(G)$ نمایش می‌دهند. گراف G را b-پیوسته گویند هرگاه برای هر عدد طبیعی k که $\chi(G) \leq k \leq \varphi(G)$، یک b-رنگ‌آمیزی از گراف G با k رنگ وجود داشته باشد. در این پایان‌نامه، ابتدا ارتباطی بین همریختی‌های گراف‌ها و b-رنگ‌آمیزی‌های گراف‌ها می‌یابیم و با استفاده از این ارتباط، نشان می‌دهیم که برای هر عدد طبیعی k، کنسر گراف $KG(2k+1, k)$، b-پیوسته است. سپس به بررسی عدد b-رنگی گراف‌های d-منتظمی که دور به طول ۴ ندارند می‌پردازیم. نشان می‌دهیم که برای هر گراف d-منتظم G که دور به طول ۴ نداشته باشد، $\varphi(G) \geq \lfloor \frac{d+3}{2} \rfloor$. همچنین نشان می‌دهیم که اگر G یک گراف d-منتظم باشد که دور به طول ۴ نداشته باشد و $diam(G) \geq 6$، آن‌گاه $\varphi(G) = d+1$. ثابت می‌کنیم برای هر گراف d-منتظم G که دور به طول ۴ ندارد و $\kappa(G) \leq \frac{d+1}{2}$، رابطه‌ی $\varphi(G) = d+1$ برقرار است، که $\kappa(G)$ بیانگر همبندی رأسی گراف G است. همچنین نشان می‌دهیم که هر گراف d-منتظم که C_4 را به عنوان زیرگراف در بر نداشته باشد و فراهمبند یالی نیز نباشد، دارای عدد b-رنگی $d+1$ است. یک رنگ‌آمیزی رأسی سره از گراف G را یک رنگ‌آمیزی برگ‌ریزان از گراف G می‌نامند هرگاه هر رأس، تمام رنگ‌ها را در همسایگی بسته‌ی خود ببیند. هر رنگ‌آمیزی برگ‌ریزان، یک b-رنگ‌آمیزی است. در انتها، رنگ‌آمیزی‌های برگ‌ریزان رده‌های خاصی از گراف‌ها را بررسی خواهیم کرد.

واژه‌های کلیدی: *b-رنگ‌آمیزی، b-پیوسته، همریختی نیمه-موضعی-پوشا، رنگ‌آمیزی برگ‌ریزان.*

فهرست

لیست تصاویر

پیش‌گفتار

منظور از یک رنگ‌آمیزی (سره‌ی رأسی) از یک گراف G، تابعی مانند $f : V(G) \to C$ است که برای هر یال $\{x,y\}$ از G، $f(x) \neq f(y)$. طبیعی است که در بسیاری از کاربردهای عملی این مفهوم، به خاطر صرفه‌جویی در عواملی چون وقت، هزینه و انرژی، به دنبال این هستیم که یک گراف را با کمترین تعداد رنگ‌های ممکن رنگ‌آمیزی کنیم. به کوچک‌ترین عدد طبیعی k که یک رنگ‌آمیزی $f : V(G) \to C$ با خاصیت $|C| = k$ وجود داشته باشد، عدد رنگی گراف G می‌گوییم و آن را با $\chi(G)$ نمایش می‌دهیم. تعیین $\chi(G)$ در حالت کلی یک مسأله‌ی NP-سخت است. بنابراین به دست آوردن این مقدار در حالت کلی، بسیار سخت به نظر می‌رسد. لذا باید به دنبال الگوریتم‌های ابتکاری برای رنگ‌آمیزی گراف‌ها باشیم. در این راستا، روش‌های خاصی مطرح شده است. بعضی از این روش‌ها، مثلا الگوریتم حریصانه، گراف را رنگ‌آمیزی می‌کنند. اما در بعضی روش‌های دیگر، فرض بر این است که یک رنگ‌آمیزی از یک گراف، به ما داده شده است و هدف ما این است که رنگ‌آمیزی دیگری را با استفاده از این رنگ‌آمیزی به دست آوریم که تعداد رنگ‌های آن کمتر از تعداد رنگ‌های رنگ‌آمیزی اولیه باشد. یکی از این روش‌ها این است که اگر هیچ یالی بین دو کلاس رنگی متفاوت وجود نداشت، برای این دو کلاس از یک رنگ استفاده کنیم. متناسب با هر کدام از این روش‌ها، پارامترهای خاصی نیز تعریف می‌شود که همگی به بدترین و وخیم‌ترین حالت متناسب با آن روش دلالت دارند (چرا که خوشحال کننده‌ترین حالت، حالتی است که یک رنگ‌آمیزی با کمترین تعداد رنگ‌های ممکن داشته باشیم)، بدترین جوابی که یک الگوریتم می‌تواند داشته باشد و یا بدترین حالتی که یک روش، در آن حالت، قابل اجرا نباشد. به عنوان مثال، بیشترین تعداد رنگ‌های ظاهر شده در بین تمام اجراهای الگوریتم حریصانه روی یک گراف، پارامتری است که عدد گراندی آن گراف نامیده می‌شود. روشی که موضوع اصلی این پایان‌نامه است، این است که در صورت امکان، رأس‌های یک کلاس رنگی را

بین بقیه‌ی کلاس‌های رنگی توزیع کنیم. بنابراین، موضوع بحث، رنگ‌آمیزی‌هایی خواهند بود که این امکان برای آن‌ها وجود ندارد. رنگ‌آمیزی $f : V(G) \to C$ را یک b-رنگ‌آمیزی می‌نامیم هرگاه برای هر عضو i متعلق به C، رأسی از $f^{-1}(i)$ باشد که این رأس در تمام کلاس‌های رنگی دیگر، همسایه داشته باشد. هر چنین رأسی را یک رأس رنگ-احاطه‌گر (نسبت به رنگ‌آمیزی f) می‌نامیم. بزرگ‌ترین عدد طبیعی k را که یک b-رنگ‌آمیزی $f : V(G) \to \{۱, ۲, \ldots, k\}$ از گراف G وجود داشته باشد، عدد b-رنگی گراف G می‌نامیم و آن را با $\varphi(G)$ نمایش می‌دهیم. همچنین، گراف G را b-پیوسته گوییم هرگاه برای هر عدد طبیعی k که $\chi(G) \leq k \leq \varphi(G)$، یک b-رنگ‌آمیزی از گراف G با k رنگ وجود داشته باشد. فصل اول، به مقدمه‌ای درباره‌ی موضوع پایان‌نامه اختصاص یافته است. در فصل دوم، ابتدا به معرفی نوعی خاص از همریختی‌های بین گراف‌ها با نام همریختی‌های نیمه-موضعی-پوشا می‌پردازیم و ارتباط آن‌ها را با b-رنگ‌آمیزی‌ها بیان می‌کنیم. به عنوان کاربردی از این نوع همریختی‌ها، ثابت می‌کنیم که برای هر عدد طبیعی k، $KG(۲k+۱, k)$ گرافی b-پیوسته است. مقاله‌ی [۵۱] از این فصل استخراج شده است. فصل سوم را به مطالعه‌ی عدد b-رنگی گراف‌های منتظم و حدسی معروف در این زمینه اختصاص داده‌ایم. السحیلی و کویدر، سؤال مهم زیر را مطرح کردند.

سؤال ۱.۰.۰. [۱۹] *آیا هر گراف d-منتظم که کمر آن حداقل ۵ باشد، دارای عدد b-رنگی $d + ۱$ است؟*

سال ۲۰۰۹، جوادی و عمومی، حین مطالعه‌ی عدد b-رنگی گراف‌های کنسر [۳۵] ، ثابت کردند که عدد b-رنگی گراف پترسن برابر ۳ است. این مطلب، در همان سال و به صورت مستقل، توسط بلیدیا، مفری و زمیر [۶] که مشغول بررسی عدد b-رنگی گراف‌های منتظم بودند ثابت شد. لذا گراف پترسن، جوابی منفی برای سؤال السحیلی و کویدر فراهم آورد. اما بلیدیا، مفری و زمیر، حدس زدند که گراف پترسن تنها جواب منفی برای سؤال السحیلی و کویدر است. همچنین، بلیدیا، مفری و زمیر، حدس خود را به ازای $d \leq ۶$ ثابت کردند.

حدس ۲.۰.۰. [۶] *هر گراف d-منتظم با کمر حداقل ۵ که با گراف پترسن یکریخت نباشد، دارای*

عدد b- رنگی $d+۱$ است.

ما حالتی کلی‌تر از پرسش مطرح شده توسط السحیلی و کویدر را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در واقع، عدد b-رنگی گراف‌های d-منتظمی که دور به طول ۴ ندارند را بررسی خواهیم نمود. نشان می‌دهیم که برای هر گراف d-منتظم G که دور به طول ۴ نداشته باشد، $\varphi(G) \geq \lfloor \frac{d+۳}{۲} \rfloor$. همچنین، اگر G شامل مثلث باشد، آن‌گاه $\varphi(G) \geq \lfloor \frac{d+۴}{۲} \rfloor$. همچنین نشان می‌دهیم که اگر G یک گراف d-منتظم باشد که دور به طول ۴ نداشته باشد و $diam(G) \geq ۶$، آن‌گاه $\varphi(G) = d+۱$. سپس ثابت می‌کنیم برای هر گراف d-منتظم G که دور به طول ۴ ندارد و $\kappa(G) \leq \frac{d+۱}{۲}$، رابطه‌ی $\varphi(G) = d+۱$ برقرار است. در ادامه، برای هر گراف d-منتظم G که دور به طول ۴ نداشته باشد و $\kappa(G) < \frac{۳d-۳}{۴}$، کران پایینی برای $\varphi(G)$ بر حسب $\kappa(G)$ ارائه خواهیم داد. همچنین نشان می‌دهیم که هر گراف d-منتظم که $C_۴$ را به عنوان زیرگراف در بر نداشته باشد و فراهمبند یالی نیز نباشد، دارای عدد b-رنگی $d+۱$ خواهد بود. مقالات [۵۳] و [۵۴]، از این فصل برداشت شده‌اند. فصل چهارم را به نوعی خاص از b-رنگ‌آمیزی‌ها که در آن‌ها همه‌ی رأس‌ها، رنگ-احاطه‌گر هستند، اختصاص داده‌ایم. چنین رنگ‌آمیزی‌هایی، برگ‌ریزان نامیده می‌شوند. رنگ‌آمیزی‌های برگ‌ریزان حاصل‌ضرب الفبایی گراف‌ها و حاصل‌ضرب رسته‌ای گراف‌ها را مطالعه خواهیم نمود. نشان خواهیم داد که برای هر گراف G، $\mathrm{Fall}(M(G)) = \varnothing$، که نماد $M(G)$ بیانگر میسیلسکین گراف G است. در نهایت، ثابت می‌کنیم که هر گراف دوبخشی G، در رابطه‌ی $\mathrm{Fall}(G^c) \subseteq \{\chi(G^c)\}$ صدق می‌کند و نیز اینکه تعیین $\mathrm{Fall}(G^c)$، در زمان چندجمله‌ای امکان‌پذیر است. مقاله‌ی [۵۲] نیز از این فصل استخراج شده است.

فصل اول

مقدمه

در سراسر این پایان‌نامه، منظور از یک گراف، یک گراف ساده (بدون طوقه و بدون یال چندگانه) با مجموعه رأس‌های متناهی و ناتهی است. همچنین به‌منظور رعایت اختصار، برای هر عدد طبیعی n، مجموعه‌ی $\{i|\ i \in \mathbb{N}, ۱ \leq i \leq n\}$ را با نماد $[n]$ نمایش خواهیم داد.

منظور از یک رنگ‌آمیزی (سره‌ی رأسی) از گراف G، تابعی مانند $f : V(G) \to C$ است که برای هر یال $\{x, y\}$ از G، $f(x) \neq f(y)$. هر عضو از C را یک رنگ می‌نامیم. همچنین می‌گوییم رأس x با رنگ c رنگ‌آمیزی شده است هرگاه $f(x) = c$. مثال ساده‌ی زیر، کاربردی عملی از رنگ‌آمیزی گراف‌ها را نشان می‌دهد.

مثال ۱.۰.۳. *فرض کنید می‌خواهیم برنامه‌ی امتحانات یک دانشگاه را تنظیم نماییم. در تنظیم این برنامه، باید این نکته را مد نظر داشته باشیم که اگر یک دانشجو در هر دو درس a و b ثبت نام کرده باشد، امتحان این دو درس در یک روز نباشند. برای تدوین یک برنامه، گرافی را در نظر بگیرید که رأس‌های آن، درس‌ها هستند و دو درس مختلف در این گراف به هم متصلند اگر و تنها اگر دانشجویی هر دو درس را در این ترم اخذ کرده باشد. هر رنگ‌آمیزی از این گراف با n رنگ، یک برنامه‌ی امتحانی*

دانشگاه در n روز کاری است و برعکس، یعنی هر برنامه‌ی امتحانی دانشگاه، در n روز کاری، یک رنگ‌آمیزی از این گراف با n رنگ است.

طبیعی است که در بسیاری اوقات به دنبال این هستیم که یک گراف را با کمترین تعداد رنگ‌های ممکن رنگ‌آمیزی کنیم. به کوچک‌ترین عدد طبیعی k که یک رنگ‌آمیزی $f : V(G) \to C$ با خاصیت $|C| = k$ وجود داشته باشد، عدد رنگی گراف G می‌گوییم و آن را با $\chi(G)$ نمایش می‌دهیم. تعیین $\chi(G)$ در حالت کلی یک مسأله‌ی NP-سخت است. بنابراین به دست آوردن این مقدار در حالت کلی، بسیار سخت به نظر می‌رسد. لذا باید به دنبال الگوریتم‌های ابتکاری برای رنگ‌آمیزی گراف‌ها باشیم. یکی از الگوریتم‌های ابتکاری برای رنگ‌آمیزی گراف‌ها، الگوریتم حریصانه است. در این الگوریتم، از اعداد طبیعی برای رنگ‌آمیزی گراف استفاده می‌شود. فرض کنید G یک گراف n رأسی باشد و $v_۱$، $v_۲$، $\ldots$، v_n، ترتیب دلخواهی از رأس‌های G باشد. ابتدا به $v_۱$ رنگ ۱ را نسبت دهید و برای هر عدد طبیعی i که $۲ \leq i \leq n$، در مرحله‌ی i-ام، کوچک‌ترین عدد طبیعی که به عنوان رنگ هیچ‌کدام از رأس‌های مجموعه‌ی $N_G(v_i) \bigcap \{v_۱, \ldots, v_{i-۱}\}$ ظاهر نشده است را به v_i نسبت دهید. نتیجه یک رنگ‌آمیزی سره از گراف G خواهد بود. به سادگی می‌توان نشان داد که برای هر گراف G، ترتیبی از اعضای $V(G)$ وجود دارد که با اعمال الگوریتم حریصانه روی این ترتیب، یک رنگ‌آمیزی از گراف G با دقیقا $\chi(G)$ رنگ حاصل می‌شود. اما از آنجایی‌که تعیین $\chi(G)$ در حالت کلی یک مسأله‌ی NP-سخت است، طبیعی به نظر می‌رسد که برای عده‌ای از جایگشت‌های رأس‌های گراف، تعداد رنگ‌های به کار رفته، بیش از $\chi(G)$ رنگ باشد (گراف‌هایی وجود دارند که با اعمال الگوریتم حریصانه روی هر ترتیب دلخواه از رأس‌های آنها، تعداد رنگ‌های ظاهر شده، دقیقا برابر عدد رنگی آنهاست. گراف‌های کامل و گراف‌های دوبخشی کامل $K_{n,n}$، معروف‌ترین مثال‌های این‌گونه گراف‌ها هستند). دوباره فرض کنید $v_۱$، $v_۲$، $\ldots$، v_n، ترتیب دلخواهی از رأس‌های گراف دلخواه G باشد. اگر الگوریتم حریصانه را روی ترتیب فوق اعمال کنید، برای هر i متعلق به $[n]$، رنگ رأس v_i، کوچک‌ترین عدد طبیعی است که به عنوان رنگ هیچ‌کدام از رأس‌های مجموعه‌ی $N_G(v_i) \bigcap \{v_۱, \ldots, v_{i-۱}\}$ به کار نرفته است. بنابراین،

رنگ رأس v_i، کوچک‌تر یا مساوی $d_G(v_i)+۱$ و در نتیجه کوچک‌تر یا مساوی $\Delta(G)+۱$ است. لذا با اعمال الگوریتم حریصانه روی هر ترتیب دلخواه از رأس‌های G، تعداد رنگ‌های به کار گرفته شده، حداکثر $\Delta(G)+۱$ خواهد بود. برای ترتیب دلخواه σ از رأس‌های گراف G، نماد $c(\sigma)$ را نشانگر تعداد رنگ‌های استفاده شده در اجرای الگوریتم حریصانه روی ترتیب σ در نظر بگیرید. همچنین $P(V(G))$ را مجموعه‌ی همه‌ی جایگشت‌های رأس‌های گراف G تعریف کنید. از آنجایی‌که برای هر جایگشت σ از رأس‌های گراف G، $c(\sigma)\leq\Delta(G)+۱$، مجموعه‌ی $\{c(\sigma)|\ \sigma\in P(V(G))\}$ ناتهی و کراندار است. در سال ۱۹۷۹، کریستن و سلکو [۱۲] عدد $\max\{c(\sigma)|\ \sigma\in P(V(G))\}$ را عدد گراندی گراف G نامیدند و آن را با $\Gamma(G)$ نمایش دادند [۱]. ذکر این نکته لازم است که شیمونز نیز در سال ۱۹۸۳، به صورت مستقل، مفهومی به نام عدد o-رنگی را معرفی و مورد مطالعه قرار داد [۵۵]. اردوش، هار، هدتنیمی و لاسکار، در سال ۱۹۸۷، ثابت کردند که عدد گراندی و عدد o-رنگی هر گراف، با هم برابرند [۲۱].

در واقع، $\Gamma(G)$، بیانگر بیشترین تعداد رنگ‌های به کار رفته در اجرای الگوریتم حریصانه در بین تمام ترتیب‌های رأس‌های گراف G است. تعبیر زیبایی که می‌توان در مورد عدد گراندی به کار برد، این است که $\Gamma(G)$، بیشترین تعداد رنگ‌هایی است که با آنها می‌توان گراف G را طوری رنگ‌آمیزی کرد که برای هر عدد طبیعی i که $۲\leq i\leq\Gamma(G)$، هر رأسی که با رنگ i رنگ شده است تمام رنگ‌های ۱، ۲، ...، $i-۱$ را در همسایگی خود ببیند. یکی از خاصیت‌های جالب الگوریتم حریصانه این است که برای هر عدد طبیعی k که $\chi(G)\leq k\leq\Gamma(G)$، ترتیبی از رأس‌های گراف G مانند σ وجود دارد که $c(\sigma)=k$. در سال ۱۹۸۲، هدتنیمی، هدتنیمی و بیر، الگوریتمی چندجمله‌ای برای یافتن عدد گراندی درخت‌ها معرفی کردند [۳۰]. این در حالی است که گویال و ویشواناتان در سال ۱۹۹۷، نشان دادند که تعیین عدد گراندی گراف‌ها در حالت کلی، یک مسأله‌ی NP-کامل است [۲۶]. سال ۲۰۰۶،

[۱] گاهی به جای نماد $\Gamma(G)$، از نماد $\chi_{FF}(G)$ نیز برای این عدد استفاده می‌شود که FF مخفف First-Fit است. این نماد نیز کاملا با این رنگ‌آمیزی همخوانی دارد، زیرا هر رأس، اولین رنگی که در همسایگی آن استفاده نشده را به عنوان رنگ خود برمی‌گزیند.

ذاکر نشان داد که این مسأله حتی برای مکمل گراف‌های دوبخشی نیز NP-کامل است [۵۹]. اشکال الگوریتم حریصانه در اینجاست که $\Gamma(G)-\chi(G)$ می‌تواند به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد. دو مثال زیر، این موضوع را به روشنی نشان می‌دهند.

مثال ۴.۰.۱. *گراف G را گرافی دوبخشی با دو بخش $\{x_1,\dots,x_n\}$ و $\{y_1,\dots,y_n\}$ و مجموعه یال‌های $\{\{x_i,y_j\}\mid i,j\in[n],\ i\neq j\}$ تعریف کنید. در واقع، G از حذف یال‌های یک تطابق کامل از گراف دوبخشی کامل $K_{n,n}$ حاصل شده است. این گراف، معمولا با نماد $K^-_{n,n}$ نمایش داده می‌شود. تابع $f:V(G)\to[n]$ که به ازای هر i متعلق به $[n]$، عدد i را به x_i و y_i نسبت می‌دهد، یک رنگ‌آمیزی از گراف G با n رنگ است که از اجرای الگوریتم حریصانه روی ترتیب x_1، y_1، x_2، y_2، $\dots$، x_n، y_n، حاصل شده است. بنابراین $\Gamma(G)\geq n$. از طرفی دیگر، $\Gamma(G)\leq\Delta(G)+1=n$. پس $\Gamma(G)=n$ و لذا $\Gamma(G)-\chi(G)=n-2$. در نتیجه، $\Gamma(G)-\chi(G)$ می‌تواند به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد.*

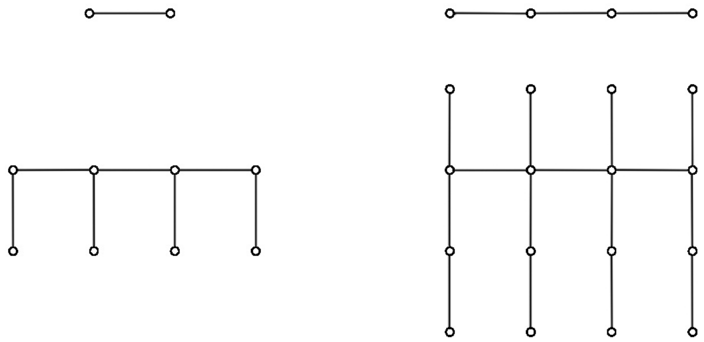
در مثال بعد، گراف‌های مورد بحث، درخت هستند.

مثال ۵.۰.۱. *دنباله‌ای بازگشتی از درخت‌ها را به صورت زیر در نظر بگیرید :*

T_2 را درختی با دو رأس در نظر بگیرید. برای هر عدد طبیعی n که $n\geq 3$، گراف T_n را با استفاده از T_{n-1} می سازیم. فرض کنید T_{n-1} درختی k رأسی با مجموعه رأس‌های $\{v_1,\dots,v_k\}$ باشد. برای ساختن T_n، به هر رأس از T_{n-1} یک برگ آویزان کنید. در واقع، T_n درختی $2k$ رأسی با مجموعه رأس‌های $\{v_1,\dots,v_k\}\bigcup\{v'_1,\dots,v'_k\}$ و مجموعه یال‌های

$$E(T_n):=E(T_{n-1})\bigcup\{\{v_i,v'_i\}\mid i\in[k]\}$$

است. شکل ۱.۱ ، درخت‌های T_2، T_3، T_4 و T_5 را نمایش می‌دهد که تعداد رأس‌های آن‌ها به ترتیب ۲ ، ۴ ، ۸ و ۱۶ است. حال، نشان می‌دهیم برای هر عدد طبیعی n که $n\geq 2$، $\Gamma(T_n)=n$. بدین‌منظور، از استقراء روی n استفاده می‌کنیم. واضح است که $\Gamma(T_2)=2$. فرض کنید $n\geq 2$ و $\Gamma(T_n)=n$. حال، حکم استقراء را به ازای $n+1$ ثابت می‌کنیم. σ را جایگشتی از $V(T_n)=\{v_1,\dots,v_{2^{n-1}}\}$



شکل ۱.۱: درخت‌های T_2، T_3، T_4 و T_5، به ترتیب با ۲، ۴، ۸ و ۱۶ رأس

در نظر بگیرید که $c(\sigma) = n$. جایگشتی از $V(T_{n+1})$ مانند σ' را به این‌صورت در نظر بگیرید که 2^{n-1} رأس ابتدای آن به ترتیب v'_1، v'_2، ...، $v'_{2^{n-1}}$ باشند و 2^{n-1} رأس بعدی این ترتیب، مطابق σ چیده شده باشند. واضح است که $c(\sigma') = n + 1$. بنابراین $n + 1 \le \Gamma(T_{n+1})$. از طرف دیگر، $\Gamma(T_{n+1}) \le \Delta(T_{n+1}) + 1 = n + 1$. در نتیجه $\Gamma(T_{n+1}) = n + 1$ و حکم استقراء ثابت می‌شود. لذا برای هر n متعلق به $\mathbb{N} \setminus \{1\}$، $\Gamma(T_n) - \chi(T_n) = n - 2$ و این نشان می‌دهد که $\Gamma(G) - \chi(G)$ می‌تواند به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد.

۱.۱ رنگ‌آمیزی‌های کامل

طریقه‌ی نگاه دیگری که می‌توان به رنگ‌آمیزی گراف‌ها داشت، به این‌گونه است که فرض کنید گراف G و یک رنگ‌آمیزی از آن به ما داده شده‌اند و هدف ما این است که در صورت امکان، با روش‌هایی خاص، رنگ‌آمیزی دیگری را با استفاده از این رنگ‌آمیزی به دست آوریم که تعداد رنگ‌های آن کمتر از تعداد رنگ‌های رنگ‌آمیزی داده شده باشد. یک روش خاص در این مورد، این است که در صورت امکان، دو کلاس رنگی را با هم به عنوان یک کلاس رنگی در نظر بگیریم. به بیان دقیقتر، مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید :

- گراف G و رنگ‌آمیزی $f : V(G) \to C$ داده شده‌اند. آیا دو عضو متمایز i و j متعلق به C

وجود دارند که تابع $g : V(G) \to C \setminus \{j\}$ با ضابطه‌ی

$$g(v) = \begin{cases} f(v) & f(v) \neq j \\ i & f(v) = j \end{cases}$$

یک رنگ‌آمیزی سره از گراف G باشد؟

واضح است که لزومی ندارد چنین i و jای وجود داشته باشند. زیرا اگر چنین i و jای وجود داشته باشند، حتما می‌توان گراف G را با تعداد رنگ‌هایی کمتر از $|C|$، رنگ کرد و این مثلا در حالتی که $|C| = \chi(G)$، غیر ممکن است. از طرف دیگر، چنین i و jای وجود دارند اگر و تنها اگر در گراف G، هیچ یالی بین $f^{-1}(i)$ و $f^{-1}(j)$ وجود نداشته باشد. پس اگر در یک رنگ‌آمیزی $f : V(G) \to C$، برای هر دو عضو متمایز i و j متعلق به C، یالی بین $f^{-1}(i)$ و $f^{-1}(j)$ وجود داشته باشد و یا به بیان معادل، $f^{-1}(i) \bigcup f^{-1}(j)$ یک مجموعه‌ی مستقل نباشد، نمی‌توان دو کلاس رنگی متمایز را با هم به عنوان یک کلاس رنگی در نظر گرفت و لذا با این روش، نمی‌توان از روی این رنگ‌آمیزی، یک رنگ‌آمیزی با تعداد رنگ‌های کمتر به دست آورد. هرری، هدتنیمی و پرینس، در سال ۱۹۶۷، چنین رنگ‌آمیزی‌هایی را مطالعه کردند و آن‌ها را رنگ‌آمیزی کامل نامیدند [۱].

تعریف ۱.۱.۱. [۲۹] *رنگ‌آمیزی $f : V(G) \to C$ را یک رنگ‌آمیزی کامل می‌نامیم هرگاه برای هر دو عضو متمایز i و j متعلق به C، $f^{-1}(i) \bigcup f^{-1}(j)$ یک مجموعه‌ی مستقل نباشد.*

همانطور که گفتیم، هر رنگ‌آمیزی از یک گراف G با $\chi(G)$ رنگ، یک رنگ‌آمیزی کامل از G است. همچنین اگر $f : V(G) \to C$ یک رنگ‌آمیزی کامل از G باشد، آن‌گاه $|C| \leq |V(G)|$. بنابراین مجموعه‌ی تمام اعداد طبیعی k که یک رنگ‌آمیزی کامل $f : V(G) \to [k]$ از گراف G وجود داشته باشد، یک مجموعه‌ی غیر تهی و از بالا کراندار است. در نتیجه، این مجموعه، حتما دارای بزرگ‌ترین عضو خواهد بود. این بزرگ‌ترین عضو، نشانگر بیشترین تعداد رنگ بکار رفته در حالت‌های بدی است

---

[۱] این نوع رنگ‌آمیزی را achromatic coloring نیز نامیده‌اند.

که نمی‌توان در آن‌ها با یکی کردن دو کلاس رنگی، یک رنگ‌آمیزی با تعداد رنگ‌های کمتر به دست آورد.

تعریف ۲.۱.۱. [۲۸] *بزرگ‌ترین عدد طبیعی k را که یک رنگ‌آمیزی کامل $f : V(G) \to [k]$ از گراف G وجود داشته باشد، عدد a- رنگی گراف G می‌نامیم و آن را با $\psi(G)$ نمایش می‌دهیم.*

یاناکاکیس و گاوریل [۵۸] در سال ۱۹۸۰ ثابت کردند که اگر G مکمل یک گراف دوبخشی باشد و k نیز یک عدد طبیعی باشد، تعیین اینکه آیا $\psi(G) \geq k$ یا خیر، یک مسأله‌ی NP-کامل خواهد بود. سال ۱۹۸۶، فاربر، هان، هل و میلر [۲۳]، نشان دادند که این مسأله برای گراف‌های دوبخشی نیز NP-کامل است. همچنین، بودلندر در سال ۱۹۸۹ ثابت کرد که این مسأله برای گراف‌های همبندی که به صورت همزمان گراف بازه‌ای و هم‌گراف باشند نیز NP-کامل خواهد بود [۷]. سال ۱۹۹۷، کارنی و ادواردز [۱۰] نشان دادند که این مسأله حتی برای درخت‌ها نیز NP-کامل است.

از خاصیت‌های جالب رنگ‌آمیزی‌های کامل گراف‌ها، می‌توان به قضیه‌ای که هرری، هدتنیمی و پرینس [۲۹] ثابت کردند اشاره کرد. قضیه‌ای که بیان می‌کند برای هر عدد طبیعی k که $\chi(G) \leq k \leq \psi(G)$، یک رنگ‌آمیزی کامل $f : V(G) \to [k]$ از گراف G وجود دارد.

۲.۱ b-رنگ‌آمیزی‌ها

در سال ۱۹۹۹، ایروینگ و منلاو در [۳۴]، روش دیگری را برای کمتر کردن تعداد رنگ‌های مورد استفاده برای رنگ‌آمیزی یک گراف، مورد مطالعه قرار دادند. روش آن‌ها این بود که در صورت امکان، یک کلاس رنگی را بین بقیه‌ی کلاس‌های رنگی توزیع کنیم. این روش، تعمیمی از روش قبلی است که در آن یک کلاس رنگی را فقط به یک کلاس رنگی دیگر می‌چسباندیم. در واقع ایروینگ و منلاو مسأله‌ی زیر را مطرح کردند :

- گراف G و رنگ‌آمیزی $f : V(G) \to C$ داده شده‌اند. آیا رنگی مانند i متعلق به C وجود دارد که گراف G دارای یک رنگ‌آمیزی $g : V(G) \to C \setminus \{i\}$ باشد که برای هر رأس v از $V(G) \setminus f^{-1}(i)$، $f(v)$ و $g(v)$ با هم برابر باشند؟

واضح است که لزومی ندارد چنین iای وجود داشته باشد. زیرا اگر چنین iای وجود داشته باشد، حتما می‌توان گراف G را با تعداد رنگ‌هایی کمتر از $|C|$، رنگ کرد و این مثلا در حالتی که $|C| = \chi(G)$، غیر ممکن است. از طرف دیگر، چنین iای وجود دارد اگر و تنها اگر در گراف G، هر رأس از $f^{-1}(i)$ در حداقل یکی از کلاس‌های رنگی دیگر، همسایه نداشته باشد. پس اگر در یک رنگ‌آمیزی $f : V(G) \to C$، برای هر عضو i متعلق به C، رأسی از $f^{-1}(i)$ باشد که این رأس در تمام کلاس‌های رنگی دیگر همسایه داشته باشد، هیچ‌کدام از کلاس‌های رنگی را نمی‌توان با روش ایروینگ و منلاو بین کلاس‌های رنگی دیگر توزیع کرد و لذا با این روش، نمی‌توان از روی این رنگ‌آمیزی، یک رنگ‌آمیزی با تعداد رنگ‌های کمتر به دست آورد. ایروینگ و منلاو، چنین رنگ‌آمیزی‌هایی را b-رنگ‌آمیزی خواندند. دلیل انتخاب این نام برای این نوع رنگ‌آمیزی، این است که روشی که ایروینگ و منلاو برای بدست آوردن یک رنگ‌آمیزی با تعداد رنگ‌های کمتر ارائه کردند، تعمیمی از روشی است که هرری، هدتنیمی و پرینس ارائه دادند و چون حرف a در ابتدای نام achromatic coloring قرار دارد، اولین حرف بعد از a یعنی b برای این نوع رنگ‌آمیزی به کار گرفته شد.

تعریف ۱.۲.۱. [۳۴] *رنگ‌آمیزی $f : V(G) \to C$ را یک b-رنگ‌آمیزی می‌نامیم هرگاه برای هر عضو i متعلق به C، رأسی از $f^{-1}(i)$ باشد که این رأس در تمام کلاس‌های رنگی دیگر همسایه داشته باشد.*

تعریف ۲.۲.۱. [۳۴] *فرض کنید G یک گراف باشد و $f : V(G) \to C$ نیز یک رنگ‌آمیزی از آن باشد. هر رأس از G که تمام رنگ‌ها ی C را در همسایگی بسته‌ی خود ببیند را یک رأس رنگ-احاطه‌گر (نسبت به رنگ‌آمیزی f) می‌نامیم.*