بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه جامع پیام نور استان فارس

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

انعکاسی بودن عملگرهای ضربی روی فضاهای باناخ از توابع تحلیلی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی

توسط

طیبه رومزی

استاد راهنما

دکتر بهمن یوسفی

شهریور ۱۳۸۶

تصویب‌نامه

پایان نامه تحت عنوان: **انعکاسی بودن عملگرهای ضربی روی فضاهای باناخ از توابع تحلیلی**

که توسط **طیبه رومزی** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته ریاضی دانشگاه جامع پیام‌نور استان فارس تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است، مورد تأیید می‌باشد.

تاریخ دفاع: ۸۶/۶/۱۷ نمره: ۱۸/۲۵ درجه ارزشیابی: عالی

اعضای هیأت داوران:

نام و نام خانوادگی	هیأت داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱– دکتر بهمن یوسفی	استاد راهنما	استاد	
۲– دکتر فریبا ارشاد	استاد مشاور	استادیار	
۳– دکتر صدیقه جاهدی	استاد داور	استادیار	

سپاسگزاری

برای من مایه شادی است که سپاسگزاری عمیق خود را نسبت به اشخاص زیر ابراز دارم.

به ویژه جناب آقای **دکتر بهمن یوسفی** که تجربه‌ی حاضر بیش از هر چیز مدیون توجهات بی‌دریغ ایشان می‌باشد که با در اختیار قرار دادن بسیاری از منابع در همان ابتدای کار اینجانب را مورد لطف قرار دادند و با راهنمایی‌های ارزشمند خود بسیاری از کاستی‌ها را از پیش رو برداشتند؛ همچنین استادان بزرگوار خانم‌ها دکتر فریبا ارشاد و دکتر صدیقه جاهدی می‌باشد که با اظهار نظرهای بصیرتمندانه‌شان مرا در دانش و حکمت خود سهیم ساختند.

و نیز دوستان خوبم که بدون خستگی مرا حمایت کردند، به ویژه همسر عزیزم که گوهری است گرانبها و مادر فداکار ایشان و نیز پدر و مادر عزیزم که در تمامی مراحل زندگی مرا یاری نمودند.

یارب ز راه راست نشانی خواهم — از باده و آب و خاک جانی خواهم
از نعمت خویش بهره‌مندم کردی — در شکر گزاریت زبانی خواهم

تقدیم به:

پدر و مادر فداکارم

همسر عزیز و فرزند دلبندم

چکیده

انعکاسی بودن عملگرهای ضربی روی فضاهای باناخ از توابع تحلیلی

بوسیله‌ی:

طیبه رومزی

در مقدمه، بعضی از تعاریف اساسی مانند تابعک محاسبه‌گر نقطه‌ای، عملگرهای ضربی و قضایای مهم و کاربردی را مانند قضیه آلاگلو و قضیه فارل که در فصل‌های بعد مورد نیاز است، مطرح می‌کنیم. در فصل دوم انعکاسی بودن انتقال‌های وزندار یک جانبه و دوجانبه را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در فصل سوم، دو قضیه مهم و اساسی را، که یکی راجع به انعکاسی بودن عملگر ضربی M_z روی فضای هیلبرت از توابع تحلیلی روی دامنه همبند متناهی Ω و دیگری راجع به انعکاسی بودن عملگر ضربی M_z روی فضای هیلبرت از توابع تحلیلی روی دامنه دلخواه Ω می‌باشد، مورد بررسی قرار می‌دهیم. همچنین نشان می‌دهیم که اگر مجموعه طیفی $\sigma(M_z)$ برابر با $\bar{\Omega}$ باشد، آنگاه M_z انعکاسی است؛ در فصل چهارم قضایای ثابت شده در فصل قبل را از فضای هیلبرت به فضای باناخ تعمیم می‌دهیم و در مثال‌هایی انعکاسی بودن عملگرهای ضربی را روی فضاهای $E^p(\Omega)$ و $H^p_\alpha(\beta)$ مورد مطالعه قرار می‌دهیم علاوه بر این ثابت می‌کنیم جبر عملگرهای ضربی روی فضای برگمن انعکاسی است.

فهرست

فصل ۱

مقدمه

۱— مقدمه

در این فصل برخی از تعاریف و قضایای مهم را می‌آوریم و بعضی از مفاهیم را که در فصل‌های بعد مورد نیاز هستند ثابت می‌کنیم.

اگر $\mathcal{X}$ یک فضای نرمدار دلخواه باشد، آنگاه گوی یکه بسته در $\mathcal{X}$ را با نماد $ball\mathcal{X}$ نمایش می‌دهیم. بنابراین داریم:

$$ball\mathcal{X} \equiv \{x \in \mathcal{X} : \|x\| \leq ۱\}$$

قضیه ۱.۱: (قضیه آلاگلو)

اگر $\mathcal{X}$ یک فضای نرمدار باشد، آنگاه $ball\mathcal{X}^*$، wk^*_فشرده است.

برهان: رجوع شود به صفحه ۱۳۰ از [٦]. ■

تعریف ۲.۱: فضای باناخ A یک جبر باناخ است اگر در آن یک ضرب چنان تعریف شده باشد که نامساوی

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \qquad (x, y \in A)$$

برقرار بوده و همچنین قانون شرکت‌پذیری $x(yz) = (xy)z$، قوانین بخش‌پذیری $x(y+z) = xy + xz$، $(y+z)x = yx + zx$؛ $(x, y, z \in A)$ و رابطه

$$(\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha(xy)$$

و به ازای هر اسکالر α برقرار باشند.

در حالت کلی فضای تفکیک‌پذیر مختلط مقدار نامتناهی بعد هیلبرت را با نماد $\mathcal{H}$ و جبر باناخ از تمام عملگرها روی $\mathcal{H}$ را با نماد $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ یا $\mathcal{B}$ نمایش می‌دهیم.

در ادامه دو توپولوژی مهم را روی $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ تعریف می‌کنیم. یکی توپولوژی ضعیف عملگرها روی $\mathcal{B}$، تعریف شده با نیم نرم $\{P_{g,h} : g, h \in \mathcal{H}\}$ است به طوری که:

$$P_{g,h}(A) = |\langle Ag, h\rangle|$$

که با WOT نمایش داده شده است. نت $\{A_i\}$ در $\mathcal{B}$ به صفر همگراست در توپولوژی WOT اگر و تنها اگر برای هر g و h در $\mathcal{H}$، $\langle A_i g, h\rangle \longrightarrow \circ$.

توجه می‌کنیم که WOT یک توپولوژی هاوسدورف به طور موضعی محدب است.

توپولوژی مهم دیگر توپولوژی قوی عملگرها روی $\mathcal{B}$، تعریف شده با نیم نرم $\{P_f : f \in \mathcal{H}\}$ است به طوری که:

$$P_f(A) = \|Af\|$$

که با SOT نمایش داده شده است. نت $\{A_i\}$ در $\mathcal{B}$ به صفر همگراست در توپولوژی SOT اگر و تنها اگر برای هر f در $\mathcal{H}$، $\|A_i f\| \longrightarrow \circ$.

همچنین SOT یک توپولوژی هاوسدورف به طور موضعی محدب است.

تعریف ۳.۱: زیرفضای $\mathcal{M}$ تحت عملگر A پایاست، اگر به ازای هر $x \in \mathcal{M}$ داشته باشیم $Ax \in \mathcal{M}$ به عبارت دیگر یعنی اینکه $A\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$. گردایه‌ی تمام زیرفضاهای $\mathcal{H}$ که تحت A پایا هستند را با $LatA$ نمایش می‌دهیم.

اگر $A \subset \mathcal{H}$، آنگاه:

$\vee A \equiv$ { اشتراک تمام زیرفضاهای خطی و بسته از $\mathcal{H}$ که شامل A هستند }

$\vee A$ را زیرفضای خطی و بسته پدید آمده توسط A می‌نامیم.

تعریف ۴.۱: $\mathcal{M}$ زیرفضای تحویل یافته A است، اگر $\mathcal{M}$ و $\mathcal{M}^{\perp}$ هر دو متعلق به $LatA$ باشند.

$ballB(\mathcal{H})$ با دو توپولوژی WOT و SOT متریک‌پذیر است. با استفاده از قضیه آلاگلو می‌توان دید که $ballB(\mathcal{H})$، در توپولوژی WOT فشرده است.

تعریف ۵.۱: نگاشت $\omega = f(z)$ را در Ω همدیس گوییم، هرگاه f در Ω تحلیلی باشد و مشتق آن، f' هیچ صفری در آن نداشته باشد.

تعریف ۶.۱: (هم ارزی همدیس)

دو ناحیه Ω_1 و Ω_2 را به طور همدیس هم‌ارز گوییم اگر تابعی تحلیلی مانند φ روی Ω_1 موجود باشد به طوری که φ در Ω_1 یک به یک بوده و $\varphi(\Omega_1) = \Omega_2$؛ یعنی یک نگاشت یک به یک همدیس از Ω_1 به روی Ω_2 موجود باشد. تحت این شرایط، معکوس φ در Ω_2 تحلیلی است و در نتیجه یک نگاشت همدیس از Ω_2 بروی Ω_1 می‌باشد.

قضیه ۷.۱: هر ناحیه همبند ساده مانند Ω در صفحه (غیر از خود صفحه) به طور همدیس هم‌ارز قرص یکه باز U می‌باشد.

برهان: رجوع شود به صفحه ۳۳۲ از [۲۰]. ■

تعریف ۸.۱: اگر $\mathcal{L}$ گردایه‌ای از عملگرها روی $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه مجموعه جابه‌جاگر $\mathcal{L}$، $\mathcal{L}'$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{L}' \equiv \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : AT = TA \text{ ،}T \in \mathcal{L} \text{ به ازای هر } \}$$

و دوگان جابه‌جاگر $\mathcal{L}$ نیز که با $\mathcal{L}''$ نمایش داده شده است به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L'' \equiv \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : AT = TA \text{ ،}T \in L' \text{ به ازای هر } \}$$

به وضوح برای هر $\mathcal{L}$، داریم: $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}''$.

تعریف ۹.۱: فرض کنید $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. ما مجموعه طیفی از A را با $\sigma(A)$ و شعاع طیفی از A را با $r(A)$ نمایش می‌دهیم و آنها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sigma(A) \equiv \{\lambda \in I\!\!F : \quad \text{معکوس‌پذیر نیست } A - \lambda\}$$

$$r(A) \equiv \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$$

همچنین مجموعه نقاط تقریبی طیف و مجموعه نقاط طیفی را به ترتیب با $\sigma_{ap}(A)$ و $\sigma_p(A)$ نمایش می‌دهیم و به صورت:

$$\sigma_p(A) \equiv \{\lambda \in I\!F : \ker(A-\lambda) \neq \circ\}$$

$$\sigma_{ap}(A) \equiv \{\lambda \in I\!F : \|(A-\lambda)x_n\| \longrightarrow \circ$$ دنباله $\{x_n\}$ در $\mathcal{H}$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که به ازای هر n، $\|x_n\| = ۱$، $\}$

تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۱۰: اگر $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$، آنگاه $AlgLatA$ جبری از تمام عملگرهای B در $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ بوده به طوری که $LatA \subset LatB$. عملگر A در $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ انعکاسی نامیده می‌شود اگر

$$AlgLatA = W(A)$$

جایی که $W(A)$ کوچکترین زیرجبری از $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ است که شامل A و عضو همانی I است و نسبت به توپولوژی ضعیف عملگرها بسته است. و به راحتی می‌بینیم که،

$$W(A) \subseteq AlgLatA$$

برای ناحیه $\Omega \subset \mathbb{C}$، فضای تمام توابع تحلیلی روی Ω با $H(\Omega)$ نمایش داده شده است و به ویژه $H^\infty(\Omega)$ جبر باناخ از تمام توابع تحلیلی کراندار روی Ω با نرم زیر می‌باشد:

$$\|f\|_\Omega = \|f\|_\infty = \sup\{|f(z)| : z \in \Omega\}$$

فرض کنید $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < ۱\}$ نمایش قرص یکه باز روی صفحه مختلط باشد. ما برای راحتی $H^\infty(U)$ را با H^∞ نمایش می‌دهیم.

فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت از توابع تحلیلی روی دامنه مختلط Ω بوده و همچنین $\mathcal{H}$ شامل ثابت‌ها و به ازای هر λ در Ω شامل تابعک $e(\lambda)$ محاسبه‌گر در نقطه λ که کراندار است، باشد به گونه‌ای که

$$e(\lambda) \quad : \quad \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$e(\lambda)(f) = f(\lambda), \quad (f \in \mathcal{H})$$

با توجه به اینکه $\mathcal{H}$ فضایی هیلبرت است و با استفاده از پیوستگی تابعک محاسبه‌گر نقطه‌ای و قضیه نمایش ریس، به ازای هر λ در Ω یک تابع منحصر به فرد (معمولاً آن را با نماد k_λ می‌نویسیم) در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$وجود دارد به طوری که:

$$(f \in \mathcal{H}), \quad f(\lambda) = \langle f, k_\lambda \rangle$$

تعریف ۱۱.۱: تابع k_λ به ازای هر نقطه λ، تابع هسته نامیده می‌شود.

توجه می کنیم که نرم تابع k_λ برابر با نرم تابعک محاسبه‌گر نقطه‌ای متناظرش است.

تعریف ۱۲.۱: تابع مختلط مقدار φ را روی Ω ضریبی از $\mathcal{H}$ می‌نامیم، اگر به ازای هر $f \in \mathcal{H}$ داشته باشیم $\varphi f \in \mathcal{H}$، و گردایه همه این ضریب‌ها را با $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ نمایش می‌دهیم. هر ضریب φ از $\mathcal{H}$ یک عملگر ضربی M_φ روی $\mathcal{H}$ با ضابطه‌ی

$$(f \in \mathcal{H}), \quad M_\varphi f = \varphi f$$

تعریف می‌کند.

کاربردی از قضیه گراف بسته نشان می‌دهد که M_φ عملگری کراندار روی $\mathcal{H}$ است.

قضیه ۱۳.۱: هر ضریب یک تابع تحلیلی و کراندار روی Ω است.

برهان: فرض کنیم $\mathcal{H}$ شامل تابع تحلیلی f باشد که روی Ω متحد با صفر نیست، و فرض کنیم $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{H})$ و $\lambda \in \Omega$ را به گونه‌ای اختیار می‌کنیم که $f(\lambda) \neq 0$ باشد. پس برای هر عدد صحیح مثبت n داریم:

$$|\varphi(\lambda)|^n |f(\lambda)| \quad = \quad |(M_\varphi^n f)(\lambda)|$$

$$= |\langle M_\varphi^n f, k_\lambda\rangle|$$
$$\leq \|M_\varphi^n f\|\|k_\lambda\|$$
$$\leq \|M_\varphi^n\|\|f\|\|k_\lambda\|$$

با گرفتن ریشه nام، از نامساوی آخر خواهیم داشت:

$$|\varphi(\lambda)||f(\lambda)|^{\frac{1}{n}} \leq \|M_\varphi\|\|f\|^{\frac{1}{n}}\|k_\lambda\|^{\frac{1}{n}}$$

حال n را به سمت بی‌نهایت میل می‌دهیم و از اینکه $f(\lambda) \neq 0$ استفاده می‌کنیم، پس داریم:

$$|\varphi(\lambda)| \leq \|M_\varphi\|$$

بنابراین روی $\Omega \backslash f^{-1}\{0\}$، $|\varphi| \leq \|M_\varphi\|$. با توجه به پیوستگی f، $\Omega \backslash f^{-1}\{0\}$ در Ω باز است. توجه می‌کنیم که $\Omega \backslash f^{-1}\{0\}$ در Ω چگال است، زیرا اگر فرض کنیم $z_0 \in \Omega$، آنگاه یک همسایگی B_r از z_0 وجود دارد به طوری که به ازای هر $z \in B_r$، $f(z) \neq 0$، چون در غیر این صورت اگر هر همسایگی $B_{r'}$ از z_0 دارای نقطه‌ای مانند z باشد به طوری که $f(z) = 0$، آنگاه داریم:

$$B_{r'}(z_0) \cap f^{-1}\{0\} \neq \phi$$

پس z_0 نقطه حدی $f^{-1}\{0\}$ است بنابراین $f \equiv 0$ و با توجه به فرض این تناقض است پس یک دنباله $\{z_n\}$ وجود دارد به طوری که $z_n \longrightarrow z$ و $f(z_n) \neq 0$، پس

$$\overline{\Omega \backslash f^{-1}\{0\}} = \Omega$$

از آنجا که φ یک ضریب است لذا $\varphi f \in \mathcal{H}$. فرض کنیم $g = \varphi f$ پس $\varphi = g/f$ بنابراین φ روی $\Omega \backslash f^{-1}\{0\}$ تحلیلی است و روی این مجموعه توسط $\|M_\varphi\|$ کراندار است. چون f با صفر متحد نیست پس $f^{-1}\{0\}$ در Ω نقطه حدی ندارد و با استفاده از قضیه ریمان روی تکین برداشتنی‌ها، می‌توانیم φ را به یک تابع تحلیلی روی Ω توسیع دهیم که لزوماً با $\|M_\varphi\|$ کراندار است. ■

گزاره ۱۴.۱: اگر $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{H})$ و $\lambda \in \Omega$، آنگاه $M_\varphi^* k_\lambda = \overline{\varphi(\lambda)} k_\lambda$.

برهان: برای هر $f \in \mathcal{H}$ ما داریم:

$$\begin{aligned}\langle M_\varphi^* k_\lambda, f\rangle &= \langle k_\lambda, M_\varphi f\rangle = \langle k_\lambda, \varphi f\rangle \\ &= \overline{\varphi(\lambda) f(\lambda)} = \overline{\varphi(\lambda)}\langle k_\lambda, f\rangle = \langle \overline{\varphi(\lambda)} k_\lambda, f\rangle\end{aligned}$$

پس نتیجه مورد نظر بدست می‌آید. ■

تعریف ۱.۱۵: اگر G یک دامنه کراندار در صفحه باشد، آنگاه G^* را متمم بستار مولفه‌های غیرکراندار از متمم بستار G می‌نامیم و گوییم G^* غلاف کاراتئودوری از G است.

در بحث توابع تحلیلی G^* می‌تواند به عنوان درون مجموعه‌ای از نقاط مانند $z_\circ$ در صفحه که برای هر چندجمله‌ای p در نامساوی زیر صدق کند

$$|p(z_\circ)| \leq \sup\{|p(z)| : z \in G\},$$

در نظر گرفته شود. هر مولفه از G^* همبند ساده است، در واقع واضح است که هر کدام از مولفه‌ها یک متمم همبند دارند، ما مولفه‌هایی از G^* را که شامل G هستند، G^1 می‌نامیم.

اگر G کراندار باشد و $G = G^1$، آنگاه G را یک ناحیه کاراتئودوری می‌نامیم.

واضح است که مرز G برابر است با مرز مولفه‌های غیرکراندار از $\mathbb{C}\backslash\bar{G}$. بنابراین زیرمجموعه باز و همبند G از صفحه ناحیه کاراتئودوری نامیده می‌شود اگر مرزش برابر با مرز مولفه‌های غیرکراندار از $\mathbb{C}\backslash\bar{G}$ باشد.

قضیه ۱.۱۶: (قضیه فارل) فرض کنید G یک دامنه کراندار در صفحه مختلط بوده و فرض کنید f یک تابع تحلیلی کراندار روی G باشد. در این صورت دنباله‌ای به طور یکنواخت کراندار از چندجمله‌ای‌ها وجود دارد که به طور نقطه‌ای به f همگراست اگر و تنها اگر f یک توسیع تحلیلی کراندار روی G^1 داشته باشد.

برهان: رجوع شود به [۱۳] و [۱۴]. ■

قضیه ۱۷.۱: (قضیه نمایش ریس)

اگر $L : \mathcal{H} \longrightarrow I\!F$ تابعک خطی و کراندار باشد، آنگاه بردار منحصر به فرد $h_\circ$ در $\mathcal{H}$ وجود دارد به گونه‌ای که

$$(h \in \mathcal{H}), \quad L(h) = \langle h, h_\circ \rangle \quad , \quad \|L\| = \|h_\circ\|$$

برهان: رجوع شود به [۵]. ■

۱۸.۱: (نامساوی ون نیومن)

فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت بوده و $A \in B(\mathcal{H})$. در این صورت اگر $\|A\| \leq ۱$ و D قرص یکه و بسته باشد، آنگاه برای هر چندجمله‌ای p،

$$\|p(A)\| \leq \|p\|_D = \|p\|_{\bar{D}}$$

برهان: رجوع شود به [٦]. ■

تعریف ۱۹.۱: اگر γ یک منحنی طول‌پذیر بسته در $\mathbb{C}$ باشد، آنگاه برای هر $a \notin \{\gamma\}$ داریم

$$n(\gamma; a) = \frac{۱}{۲\pi i} \int_\gamma (z-a)^{-۱} dz$$

$n(\gamma; a)$ را اندیس γ نسبت به نقطه‌ی a می‌نامیم.

توجه می‌کنیم که $n(\gamma; a)$ تعداد دفعاتی است که منحنی γ حول نقطه‌ی a می‌چرخد.

فصل ۲

انعکاسی بودن برخی از انتقال‌های وزندار

۲– انعکاسی بودن برخی از انتقال‌های وزندار

در این فصل انتقال‌های وزندار روی فضای هیلبرت مشخص شده است و در دو قضیه مهم ثابت خواهد شد که بعضی از انتقال‌های وزندار یک جانبه و دوجانبه انعکاسی هستند. مرجع‌های [۲۲]، [۲۳]، [۲۵] و [۲۶] مراجع مفیدی در این زمینه می‌باشند.

تعریف ۱.۲: یک انتقال وزندار یک جانبه (دوجانبه) روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$، یک عملگر مانند T از $\mathcal{H}$ به خودش با ضابطه $Te_n = w_n e_{n+1}$ است جایی که:

$$(\{e_n\} = \{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty})\ \{e_n\} = \{e_n\}_{n=0}^{\infty}$$

پایه متعامد برای $\mathcal{H}$ است و $\sup_n |w_n| < \infty$.

در ابتدا ما از [۲۵] برای بعضی از نمادها و قضایا، که برای اثبات نتیجه اصلی‌مان در این فصل مورد نیاز است، استفاده خواهیم کرد. برای اثبات این قضایا به [۲۵] مراجعه شود.

فرض کنید $\{\beta(n)\}$ دنباله‌ای از اعداد صحیح مثبت با $\beta(0) = 1$ باشد. ما فضایی از دنباله‌های $f = \{\hat{f}(n)\}$ را در نظر می‌گیریم به گونه‌ای که

$$\|f\|^2 = \|f\|_\beta^2 = \sum |\hat{f}(n)|^2 [\beta(n)]^2 < \infty$$

نماد $f(z) = \sum \hat{f}(n) z^n$ به ازای هر مقدار از z، برای سری‌هایی که همگرا باشند یا همگرا نباشند، می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. اگر دامنه مقادیر n روی اعداد صحیح نامنفی باشد، آنگاه اینها سری‌های توانی صوری هستند، در غیر این صورت سری‌های لوران صوری هستند.

فرض کنید $H^{۲}(\beta)$ ($L^{۲}(\beta)$) نمایش فضای سری‌های توانی صوری (سری‌های لوران) باشند. این فضاها فضای هیلبرت با ضرب داخلی زیر هستند:

$$\langle f,g\rangle = \sum \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)} \quad [\beta(n)]^{۲}$$

M_z را به عنوان عملگر ضربی روی $H^{۲}(\beta)$ یا $L^{۲}(\beta)$ در نظر می‌گیریم به طوری که:

$$(M_z f)(z) = \sum \hat{f}(n) z^{n+۱}$$

گزاره ۲.۲: عملگر M_z (روی $L^{۲}(\beta)$ یا روی $H^{۲}(\beta)$) به طور منحصر به فرد برابر است با یک انتقال وزندار یک به یک (با دنباله وزنی $\{w_n\}$ که در پایین داده شده است). برعکس، هر انتقال وزندار یک به یک به طور منحصر به فرد برابر است با M_z (روی $L^{۲}(\beta)$ یا روی $H^{۲}(\beta)$، برای یک انتخاب مناسب از β).

رابطه بین $\{w_n\}$ و β به صورت زیر داده شده است:

$$\begin{aligned}
&(\text{هر } n) && \omega_n = \beta(n+۱)/\beta(n) \\
&(n > ۰) && \beta(n) = \omega_۰ \cdots \omega_{n-۱} \\
& && \beta(۰) = ۱ \\
&(n > ۰) && \beta(-n) = (\omega_{-۱} \cdots \omega_{-n})^{-۱}
\end{aligned}$$

نتیجه ۳.۲: M_z کراندار است اگر و تنها اگر $\beta(k+۱)/\beta(k)$ کراندار باشد و در این حالت، $\|M_z^n\| = \sup_k[\beta(k+n)/\beta(k)]$ $(n = ۰, ۱, ۲, ...)$.

برهان: به صفحه ۵۹ از [۲۵] مراجعه شود. ■

ضرب از سری‌های لوران صوری را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$fg = h$$

$$\left(\sum \hat{f}(n) z^n\right)\left(\sum \hat{g}(n) z^n\right) = \sum \hat{h}(n) z^n \qquad (۱-۲)$$

جایی که

$$\hat{h}(n) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\hat{g}(n-k) \quad (n \in I\!N \cup \{\circ\}) \tag{۲−۲}$$

در مورد سری‌های توانی صوری، یعنی وقتی برای $n < \circ$، $\hat{f}(n) = \hat{g}(n) = \circ$، سری‌ها در (۲−۲) تبدیل به جمع

$$\hat{h}(n) = \sum_{k=\circ}^{n} \hat{f}(k)\hat{g}(n-k)$$

می‌شوند. فرض کنید $H^\infty(\beta)$ $(L^\infty(\beta))$ نمایش مجموعه‌ای از سری‌های توانی صوری (سری‌های لوران) $\varphi(z) = \sum \hat{\varphi}(n) z^n$ به طوری که،

$$(\varphi L^{۲}(\beta) \subset L^{۲}(\beta)) \quad \varphi H^{۲}(\beta) \subset H^{۲}(\beta).$$

اگر $(L^\infty(\beta))$ $H^\infty(\beta)$ $\varphi \in$، آنگاه تبدیل خطی که از ضرب توسط φ روی $(L^{۲}(\beta))$ $H^{۲}(\beta)$ به وجود می آید در هر دو حالت با M_φ نمایش داده خواهد شد. برای اثبات گزاره زیر به [۲۵] مراجعه شود.

گزاره ۴.۲: M_φ یک تبدیل خطی کراندار است و $M_{\varphi\psi} = M_\varphi M_\psi$ جایی که φ و ψ متعلق به $H^\infty(\beta)$ $(L^\infty(\beta))$ باشد.

قضیه ۵.۲: جابه‌جاگر M_z از $L^{۲}(\beta)$ $(H^{۲}(\beta))$ برابر با $L^\infty(\beta)$ $(H^\infty(\beta))$ است.

برهان: رجوع شود به [۲۵]. ■

بنابراین اگر T یک انتقال وزندار یک به یک باشد، آنگاه جابه‌جاگر آن یک زیرجبر آبلی ماکسیمال از $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ است. (نتیجه ۱، از صفحه ۶۳، [۲۵]).

ما شعاع طیفی T را با $r(T)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۶.۲: اگر T یک انتقال وزندار یک جانبه یا یک انتقال وزندار دو جانبه باشد که معکوس‌پذیر نباشد، آنگاه:

$$\sigma(T) = \{z : |z| \le r(T)\}$$