بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

حل دستگاه‌های سه‌قطری، پنج‌قطری و متقارن به روش مستقیم و روش معکوس ماتریس

استاد راهنما: دکتر سیّد ابوالفضل شاهزاده فاضلی

استاد مشاور: دکتر محمدرضا هوشمند اصل

پژوهش و نگارش: طیبه دهقان‌نیری

مهر ماه ۱۳۸۸

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم

قدردانی و تشکر

برگی دیگر از تقویم زندگی ورق خورد و در آستانه آغاز فصلی دیگر ایستاده‌ام، اما حرف‌های ناگفته زیادی باقی مانده، حرف‌هایی که از اعماق وجودم سرچشمه می‌گیرد و هیچ‌گاه کلمات قادر به توصیف چنین احساساتی نبوده‌اند. اما اکنون ابزاری در دست نیست، پس سپاس سپاس آن بی‌همتایی را که سردی وجودم را با گرمای عشقش جانشین کرده، او را سپاس می‌گویم که مرا لایق آموختن گردانید، او را که تجلی وجودش در دو گوهر گرانمایه زندگیم، پدر و مادر عزیزم که اسوه ایثار و عشقند، هزاران بار دستان پر مهرشان را می‌بوسم. در این مسیر بر خود لازم می‌دانم از کلیه کسانی که مرا در به انجام رسانیدن یاری و همراهی کرده‌اند، تشکر نمایم.

در ابتدا از استاد بزرگوار و مهربانم، جناب آقای دکتر سیّد ابوالفضل شاهزاده فاضلی در سمت استاد راهنما سپاسگزارم که با رهنمودهای گران‌بها و راهنمایی‌های علمی خود از ابتدا تا انتهای این کار مرا همراهی کرده‌اند و از هم‌یاری، دقت نظر و دلسوزی ایشان صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایم. هم‌چنین از استاد ارجمند جناب آقای دکتر محمدرضا هوشمنداصل که زحمت مشاوره این پایان‌نامه را برعهده گرفتند صمیمانه تشکر می‌کنم. از جناب آقای دکتر سید مهدی کرباسی که با قبول داوری این پایان‌نامه از سوی ایشان، توفیقی بزرگ نصیب اینجانب شد، کمال تشکر و قدردانی را دارم. هم‌چنین از جناب آقای دکتر قاسم برید لقمانی که ایشان نیز مسئولیت داوری این پایان‌نامه را بر عهده داشته‌اند، سپاسگزارم. لازم می‌دانم ازتمامی دوستانم که با هم‌دلی، هم‌راهی و هم‌یاری مرا مجاب به طی مسیر نمودند، مراتب قدردانی را داشته باشم.

بی‌شک این کار علمی بدون حمایت‌های روانی و عاطفی تمامی اعضای خانواده‌ام به انجام نمی‌رسید. تشکر از آنها با واژه‌ها و الفاظ میسر نیست. از درگاه خداوند متعال برای آنها و تمامی کسانی که مرا در این راه همراهی کردند سلامتی و شادکامی را آرزومندم.

پائیز ۱۳۸۸

فهرست مندرجات

چکیده

در محاسبات علمی، مسائل بسیاری منجر به حل دستگاه خطی $AX = b$ می‌شوند. گاهی از روش‌های مستقیم برای حل دستگاه‌های معادلات‌خطی استفاده می‌کنند. هدف این پایان‌نامه، ارائه الگوریتم‌هایی برای حل مستقیم یک دستگاه معادلات خطی است. در این نوشتار علاوه بر معرفی یک روش تجزیه جدید برای حل دستگاه‌های معادلات خطی با ماتریس ضرایب معین‌مثبت، چند روش مؤثر نیز برای حل دستگاه‌های معادلات خطی سه‌قطری و پنج‌قطری با محاسبه معکوس ماتریس ضرایب بیان می‌گردد و در پایان دو روش برای محاسبه‌ی معکوس ماتریس‌های سه‌قطری متقارن معین‌مثبت ارائه خواهد شد.

پیش‌گفتار

لایب‌نیتز در سال ۱۶۹۳ و بعد از آن در سال ۱۷۵۰ کرامر با استفاده ازمحاسبه دترمینان و معکوس ماتریس به حل دستگاه‌های خطی پرداختند. در سال ۱۸۰۱ گاوس روش خود را با عنوان روش حذفی گاوس برای حل دستگاه‌های خطی ارائه کرد و برای سالها روش او مورد استفاده قرار می‌گرفت. در اواخر قرن هجدهم ژردان ریاضی‌دان انگلیسی روش حذفی گاوس را بهبود بخشید. روش او با عنوان روش حذفی گاوس ژردان علاوه بر حل دستگاه‌های خطی برای محاسبه معکوس ماتریس مورد استفاده قرار می‌گیرد. در محاسبه معکوس ماتریس روش حذفی گاوس ژردان با محورگیری اغلب مورد استفاده بوده است هر چند که این روش به دلیل حفظ نکردن ساختار ماتریس، برای ماتریس‌های تنک مانند سه‌قطری و پنج‌قطری چندان مناسب نمی‌باشد. لوپز و دیل [۱] در سال ۱۹۹۸ و شیائو [۲] در سال ۱۹۹۹ روش‌های جدیدی را برای محاسبه معکوس ماتریس‌های سه‌قطری و پنج‌قطری ارائه کرده‌اند. برای حل دستگاه‌هایی با ماتریس ضرایب معین‌مثبت روش تجزیه چولسکی یکی از روش‌های پیشنهادی است ولی بعدها اوانز [۳] در سال ۱۹۹۹ با استفاده از تجزیه چولسکی تجزیه جدیدی ارائه داد. وجود و پایداری این تجزیه توسط خزل[۴]در سال ۲۰۰۲ مورد بررسی قرار گرفت. روشی که در اینجا برای حل دستگاه خطی متقارن ارائه می‌شود به نوعی تغیر یافته روش اوانز است.

این پایان‌نامه مشتمل بر چهار فصل می‌باشد. در فصل اول مفاهیم و پیش‌نیازهایی که در فصول دیگر مورد نیاز می‌باشد گنجانده شده است. در فصل دوم دستگاه‌های معادلات خطی

[۱] Diele and Lopez
[۲] Shiau
[۳] Evans
[۴] Khazal

متقارن معین‌مثبت مورد بررسی قرار گرفته است. تجزیه جدیدی برای حل آنها ارائه شده و هم‌چنین وجود و پایداری این روش اثبات شده و در پایان، الگوریتم و چند مساله حل شده مورد مطالعه قرار گرفته است. در فصل سوم نیز چند روش حل مؤثر برای دستگاه‌های خطی سه‌قطری و پنج‌قطری ارائه شده و هم‌چنین یکی از این روش‌ها برای دستگاه‌های معادلات خطی با ماتریس ضرایب هفت‌قطری و تقریباً هفت‌قطری بسط داده شده است. در فصل آخر با دو روش برای محاسبه معکوس ماتریس‌های سه‌قطری متقارن معین‌مثبت آشنا شده و هم‌چنین در چند مثال دو روش با هم مقایسه می‌شوند.

فصل ۱

تعاریف و پیش نیازها

مقدمه

در این فصل به معرفی و بیان تعاریف مورد نیاز که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار خواهند گرفت، پرداخته شده است. این فصل مشتمل بر سه بخش می‌باشد. در بخش اول و دوم با انواع ماتریس‌ها و دستگاه‌های خطی آشنا شده و در بخش آخر بعضی از انواع تجزیه و اعمالی که روی ماتریس‌ها می‌تواند صورت گیرد معرفی می‌گردد.

۱.۱ انواع ماتریس‌ها

ماتریس متقارن[۱]

تعریف ۱.۱.۱: ماتریس $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ را متقارن گویند، هرگاه $A^t = A$. مجموعه تمام ماتریس‌های متقارن در میدان $\mathbb{F}^{n\times n}$ را به‌صورت $Sym_{\mathbb{F}(n)}$ نشان می‌دهند، بنابراین:

$$Sym_{\mathbb{F}(n)} = \{A_{n\times n} \quad | \quad A = A^t\}.$$

هم‌چنین A را **پادمتقارن** گویند هرگاه $A^t = -A$.

ماتریس تمام‌متقارن [۲]

تعریف ۲.۱.۱: ماتریسی است که در اطراف هر دو قطر اصلی و فرعی متقارن باشد، یعنی یک ماتریس $n \times n$، $A = (a_{ij})$ تمام‌متقارن است اگر به ازای هر $i = ۱, ۲, \cdots, n$ و $j = ۱, ۲, \cdots, n$، $a_{ij} = a_{ji} = a_{n+۱-i, n+۱-j}$.

به‌عنوان مثال ماتریس زیر یک ماتریس تمام‌متقارن می‌باشد:

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۲ & -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

[۱] Symmetric matrix

[۲] Persymmetric matrix

ماتریس تنک[۱]

تعریف ۳.۱.۱: ماتریس A را یک ماتریس تنک گویند هرگاه، تعداد درایه‌های صفر در این ماتریس زیاد باشد.

ماتریس بالاهسنبرگی[۲]

تعریف ۴.۱.۱: ماتریس $A = [a_{ij}]$ را یک ماتریس بالاهسنبرگی گویند، هرگاه به ازای هر $i > j + 1$، $a_{ij} = 0$.

ماتریس پایین‌هسنبرگی[۳]

تعریف ۵.۱.۱: ماتریس $A = [a_{ij}]$ را یک ماتریس پایین‌هسنبرگی گویند، هرگاه به ازای هر $j > i + 1$، $a_{ij} = 0$.

در حالت کلی ماتریس‌های بالاهسنبرگی و پایین‌هسنبرگی به‌صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{bmatrix} * & * & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

پایین‌هسنبرگی

$$\begin{bmatrix} * & \cdots & * & * \\ * & \cdots & * & * \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & * & * \end{bmatrix}$$

بالاهسنبرگی

ماتریس $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ را که هم بالا و هم پایین‌هسنبرگی باشد ماتریس هسنبرگ گویند، شکل کلی آن به‌صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} * & * & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & * & & \vdots \\ 0 & * & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

---

[۱] Sparse matrix

[۲] Upper Hessenberg

[۳] Lower Hessenberg

زیر ماتریس[1]

تعریف ۶.۱.۱: یک زیر ماتریس از ماتریس A، ماتریسی است که از حذف سطرها و ستون‌های مشخصی از A بدست می‌آید.

زیر ماتریس اصلی پیشرو[2]

تعریف ۷.۱.۱: اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد، زیرماتریس اصلی پیشرو A به‌صورت زیر تعریف می‌شود که $۱ \leqslant k \leqslant n$،

$$\mathrm{A}_{kk} = \begin{bmatrix} \mathrm{a}_{۱۱} & \mathrm{a}_{۱۲} & \cdots & \mathrm{a}_{۱k} \\ \mathrm{a}_{۲۱} & \mathrm{a}_{۲۲} & \cdots & \mathrm{a}_{۲k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{a}_{k۱} & \mathrm{a}_{k۲} & \cdots & \mathrm{a}_{kk} \end{bmatrix}$$

ماتریس نواری

تعریف ۸.۱.۱: ماتریس A ،$n \times n$ را نواری گوئیم اگر اعداد صحیح p و q، که $۱ < p, q < n$، با خاصیت $a_{ij} = ۰$ هرگاه $i + p \leq j$ یا $j + q \leq i$، وجود داشته باشند. برای چنین ماتریسی، عرض نوار با $w = p + q - ۱$ تعریف می‌شود. باید توجه کرد که در ماتریس‌های نواری تمام درایه‌های غیر صفر در اطراف قطر اصلی متمرکز می‌شوند.

ماتریس قطری[3]

تعریف ۹.۱.۱: ماتریس $A = [a_{ij}]$ را قطری گویند، هرگاه به ازای هر $i \neq j$ داشته باشیم: $a_{ij} = ۰$، و آن را به‌صورت $A = diag(a_{۱۱}, a_{۲۲}, \cdots, a_{ss})$، که در آن $s = min(m, n)$ نمایش می‌دهند.

مثال: ماتریس نواری با $p = q = ۲$ و عرض ۳، یک ماتریس سه‌قطری [4] است.

[1] Submatrix

[2] Submatrix leading principle

[3] diagonal matrix

[4] tri -diagonal matrix

$$
T=\begin{bmatrix}
a_۱ & c_۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\
b_۱ & a_۲ & c_۲ & \ddots & \vdots \\
۰ & b_۲ & a_۳ & \ddots & ۰ \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-۱} \\
۰ & \cdots & ۰ & b_n & a_n
\end{bmatrix}
$$

هم‌چنین ماتریسی با عرض ۵، یک ماتریس پنج‌قطری [۱] نامیده می‌شود و در حالت کلی می‌توان آن را به‌صورت زیر نشان داد:

$$
P=\begin{bmatrix}
a_۱ & b_۱ & c_۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\
\alpha_۲ & a_۲ & b_۲ & c_۲ & \ddots & \vdots \\
\beta_۳ & \alpha_۳ & \ddots & \ddots & \ddots & ۰ \\
۰ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-۲} \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-۱} \\
۰ & \cdots & ۰ & \beta_n & \alpha_n & a_n
\end{bmatrix}
$$

ماتریس اکیداً قطرغالب[۲]

تعریف ۱۰.۱.۱: ماتریس $n \times n$، A را اکیداً قطرغالب گوئیم، هرگاه به ازای هر $i = ۱, ..., n$ نامساوی

$$| a_{ii} |> \sum_{j=۱}^{n} | a_{ij} |,$$

برای $(j \neq i)$ برقرار باشد. ماتریس را **قطرغالب** گوئیم، هرگاه

$$| a_{ii} |\geq \sum_{j=۱}^{n} | a_{ij} | .$$

ماتریس معین‌مثبت[۳]

تعریف ۱۱.۱.۱: ماتریس $n \times n$ متقارن A را معین‌مثبت گوئیم هرگاه به ازای هر بردار ستونی n بعدی $X \neq ۰$،

---

[۱] penta -diagonal matrix
[۲] Strictly diagonally dominant matrix
[۳] positive definite matrix

$X^tAX > ۰.$

هم‌چنین ماتریس متقارن A را **نیمه معین‌مثبت** گوئیم اگر به ازای هر بردار ناصفر X

$$X^tAX \geq ۰.$$

ماتریس متعامد [1]

تعریف ۱۲.۱.۱: ماتریس مربعی A را متعامد گویند، اگر معکوس آن با ترانهاده‌اش برابر باشد، یعنی $A^t = A^{-۱}$.

قضیه ۱.۱.۱. اگر A یک ماتریس $n \times n$ اکیداً قطرغالب باشد آنگاه A نامنفرد است.

برهان. برای نشان دادن این‌که A نامنفرد است، دستگاه خطی $Ax = ۰$ را در نظر می‌گیریم، فرض می‌کنیم که یک جواب ناصفر برای این دستگاه وجود داشته باشد. در این‌صورت، به ازای k ای داریم:

$$a_{kk}x_k = -\sum_{j=۱, j\neq k}^{n} a_{kj}x_j$$

این نتیجه می‌دهد که

$$| a_{kk} || x_k | \leq \sum_{j=۱, j\neq k}^{n} | a_{kj} || x_j |$$

یا

$$| a_{kk} | \leq \sum_{j=۱}^{n} | a_{kj} | \frac{| x_j |}{| x_k |} \leq \sum_{j=۱, j\neq k}^{n} | a_{kj} |$$

که با اکیداً قطرغالب بودن A در تناقض است و در نتیجه تنها جواب دستگاه $Ax = ۰$، جواب بدیهی $x = ۰$ می‌باشد و بنابراین A نامنفرد است. □

قضیه ۲.۱.۱. اگر A یک ماتریس $n \times n$ معین‌مثبت باشد آنگاه A نامنفرد است.

برهان. هرگاه $x \neq ۰$ برداری باشد که در $Ax = ۰$ صدق می‌کند، آنگاه $x^tAx = ۰$، که با معین‌مثبت بودن A در تناقض است و در نتیجه $Ax = ۰$ تنها جواب بدیهی $x = ۰$ را دارد و بنابراین A نامنفرد است. □

[1] orthogonal matrix

قضیه ۳.۱.۱. برای هر ماتریس A، ماتریس‌های A^tA و AA^t متقارن هستند [۲].

قضیه ۴.۱.۱. اگر ماتریس A معین‌مثبت باشد آنگاه A^{-1} موجود و معین‌مثبت است.

برهان. فرض کنید A معین‌مثبت ولی A^{-1} موجود نباشد، یعنی معکوس A وجود نداشته باشد. در این‌صورت برداری مخالف صفر مانند x موجود است به طوری که $Ax = 0$ و در نتیجه داریم:

$$x^TAx = x^T.0 = 0$$

ولی طبق فرض A معین‌مثبت است و $x^TAx > 0$. پس فرض معکوس‌پذیر نبودن A منجر به تناقض شد. در نتیجه فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

اثبات معین‌مثبت بودن A^{-1}:

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$$

$$\forall y \neq 0 \Longrightarrow A^{-1}y \neq 0 \Longrightarrow x = A^{-1}y$$

$$y^TA^{-1}y = (Ax)^TA^{-1}y = x^Ty = x^TAx > 0$$

پس ماتریس A^{-1}، معین‌مثبت است. □

۲.۱ دستگاه معادلات‌خطی

در حالت کلی یک دستگاه معادلات خطی شامل m معادله و n مجهول به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\begin{cases} \mathrm{a}_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \mathrm{a}_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ \mathrm{a}_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

که a_{ij} ها ضرایب ماتریس و b_i ها اسکالر می‌باشند:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

یا به‌طور خلاصه به‌صورت $AX=b$ نمایش داده می‌شود. به این روش، نمایش شکل ماتریسی دستگاه معادلات گفته می‌شود. هم‌چنین ماتریس A را ماتریس ضرایب یک دستگاه معادلات خطی نامند.

ماتریس افزوده [1]:

تعریف ۱.۲.۱. ماتریس افزوده دستگاه که با $[A:b]$ نشان داده می‌شود به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[A:b]=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

ماتریس سه‌قطری

تعریف ۲.۲.۱. ماتریس $A=(a_{ij})$ را یک ماتریس سه‌قطری گویند، هرگاه برای هر زوج (i,j) که $|j-i|>1$ داشته باشیم: $a_{ij}=0$. ماتریس سه‌قطری را به‌صورت زیر نمایش می‌دهند:

$$A=tridiag\ (a_{i,i-1}, a_{i,i}, a_{i,i+1})$$

دستگاه سه‌قطری

یک دستگاه معادلات خطی که ماتریس ضرایب آن به‌صورت سه‌قطری در مساله ظاهر شود، دستگاه معادلات سه‌قطری نامیده می‌شود. هم‌چنین اگر ماتریس ضرایب یک دستگاه معادلات پنج‌قطری باشد، یک دستگاه معادلات پنج‌قطری خواهیم داشت.

[1] augmented matrix

۳.۱ ماتریس هاوس‌هولدر و کاربرد آن در تجزیه QR و تبدیل هسنبرگی

۱.۳.۱ ماتریس هاوس‌هولدر

ماتریس H به شکل:

$$H = I - \frac{2uu^T}{u^Tu}$$

ماتریس هاوس‌هولدر نامیده می‌شود، که در آن u یک بردار حقیقی ناصفر است. چند مورد از ویژگی‌های یک ماتریس هاوس‌هولدر را به‌صورت زیر می‌توان بیان نمود:

۱) برای هر $x \in \Re^n$ داریم: $\| Hx \|_2 = \| x \|_2$.

۲) H یک ماتریس متعامد است.

۳) H دارای یک مقدار ویژه‌ی ساده‌ی -1 و مقدار ویژه ۱ از مرتبه‌ی تکرار $n-1$ می‌باشد.

۴) $H^2 = I$.

لم ۱.۳.۱. یک بردار غیر صفر $x \neq e_1$ داده شده است، همیشه یک ماتریس هاوس‌هولدر H وجود دارد به‌طوری که، Hx مضربی از e_1 می‌باشد.

برهان. فرض کنیم $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ باشد، H و u را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$H = I - \frac{2uu^T}{u^Tu}, u = x + Sign(x_1) \| x \|_2 e_1,$$

که $\| x \|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

پس بردار u به شکل

$$u = (x_1 + Sign(x_1) \| x \|_2, x_2, \cdots, x_n)^T.$$

است و به‌سادگی دیده می‌شود که:

$$Hx = (-Sign(x_1) \| x \|_2, 0, 0, \cdots, 0).$$

□

۲.۳.۱ تجزیه QR هاوس‌هولدر

اگر یک ماتریس $A_{n\times n}$ داده شده باشد، آنگاه یک ماتریس متعامد Q و یک ماتریس بالامثلثی R وجود دارد به‌طوری که:

$$A = QR$$

ماتریس Q به‌صورت $Q = H_1 H_2 \cdots\cdots H_{n-1}$ می‌باشد که H_i ها هر یک ماتریس هاوس‌هولدر می‌باشند. اکنون نشان داده می‌شود که چگونه می‌توان با استفاده از ماتریس‌های هاوس‌هولدر A را به QR تجزیه کرد.

الگوریتم هاوس‌هولدر

الگوریتم ۲.۳.۱. تجزیه‌ی ماتریس A به دو ماتریس Q و R.

گام ۱: ماتریس هاوس‌هولدر H_1 را به‌گونه‌ای می‌سازیم که $H_1 A$ دارای درایه‌های صفر، زیر درایه a_{11} در اولین ستون‌اش باشد. یعنی،

$$H_1 A = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & & \vdots \\ \vdots & * & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

برای استفاده در گام بعدی A با $A^{(1)}$ نمایش داده می‌شود.

گام ۲: ماتریس هاوس‌هولدر H_2 را به‌گونه‌ای می‌سازیم که درایه های $H_2 A^{(1)}$ در ستون دوم زیر درایه a_{22} صفر باشند و ضمناً صفرهای ستون اول که در گام قبل بدست آمده‌اند، مقدار خود را حفظ می‌کنند.

$$A^{(2)} = H_2 A^{(1)} = \begin{bmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$