



دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده عمران

تعیین ضریب کمانش ورق‌های منحنی شکل تحت تاثیر بارهای طولی و جانبی با روش نوار محدود

پایان نامه کارشناسی ارشد عمران - سازه

بهداد تیموری غرب

استاد راهنما
دکتر مجتبی ازهری

تابستان ۱۳۸۵

فهرست مطالب

<u>صفحه</u>	<u>عنوان</u>
هشت	فهرست مطالب.....
۱	چکیده.....
	فصل اول: مقدمه و کلیات
۲	۱-۱ کلیاتی پیرامون کمانش ورق‌ها.....
۷	۱-۲ گذری بر مطالعات گذشته.....
۷	۱-۲-۱ روش‌های دقیق تحلیل کمانش.....
۷	۱-۲-۱-۲ روش‌های عددی تحلیل کمانش ورق‌های مستوی.....
۱۰	۱-۲-۱-۳ روش‌های عددی تحلیل کمانش ورق‌های استوانه‌ای.....
۱۱	۱-۳ اهداف تحقیق حاضر.....
	فصل دوم: معادلات کمانش ورق‌های استوانه‌ای و روابط انرژی
۱۲	۱-۲ مقدمه.....
۱۳	۲-۲ معادلات تغییر شکل و انرژی کرنشی یک المان پوسته‌ای.....
۱۳	۱-۲-۲ روابط مربوط به جابجایی و تغییر مکان.....
۱۷	۲-۲-۲ روابط مربوط به انرژی کرنشی المان پوسته‌ای.....
۱۸	۳-۲ فرم کلی تغییر شکل‌ها و معادلات تعادل یک ورق استوانه‌ای.....
۲۳	۴-۲ معادله تعادل ورق استوانه‌ای تحت بار متقارن محوری.....
۲۵	۵-۲ کمانش متقارن ورق‌های استوانه‌ای تحت اثر فشار محوری یکنواخت.....
۲۷	۶-۲ حل عمومی کمانش ورق استوانه‌ای تحت اثر فشار محوری.....
۳۰	۷-۲ تعیین نیروهای کمانشی برای یک ورق منحنی شکل.....
	فصل سوم: کلیاتی در مورد حل به روش نوار محدود
۳۳	۱-۳ مقدمه.....
۳۴	۲-۳ ماتریس سختی المان نوار $[k]$
۳۶	۱-۲-۳ ماتریس سختی غشائی (داخل صفحه) $[k_{in}]$
۳۸	۲-۲-۳ ماتریس سختی خمشی $[k_{\theta}]$

<u>صفحه</u>	<u>عنوان</u>
۴۰۳-۳-ماتریس هندسی $[k_g]$
فصل چهارم: تحلیل پایداری ورق‌های منحنی شکل به روش نوار محدود	
۴۴۱-۴-مقدمه.....
۴۵۲-۴-تعیین نیروهای کمانشی ورق منحنی شکل.....
۴۵۱-۲-۴-مشخصات هندسی و فیزیکی مسئله.....
۴۶۲-۲-۴-توابع جابجائی.....
۴۷۳-۲-۴-تعیین توابع شکل هرمیتی مربوط به راستای عرضی نوار منحنی شکل.....
۵۰۴-۲-۴-انرژی پتانسیل ورق.....
۵۰۵-۲-۴-انرژی ارتجاعی و ماتریس سختی ورق منحنی شکل.....
۵۲۶-۲-۴-انرژی پتانسیل و ماتریس هندسی ورق منحنی شکل.....
۵۶۷-۲-۴-تعیین نیروهای کمانشی ورق منحنی شکل.....
۵۷۳-۴-نتایج.....
۵۸۱-۳-۴-بررسی رفتار ورق‌های مستوی.....
۵۸الف-بررسی صحت نتایج.....
۶۱۲-۳-۴-بررسی رفتار ورق‌های منحنی شکل.....
۶۱الف-بررسی صحت نتایج.....
۶۲ب-ورق منحنی با شرایط تکیه گاهی SSSS.....
۶۵ج- ورق منحنی با شرایط تکیه گاهی SCSC.....
۶۷۴-۴-بررسی رفتار ورق منحنی در شرایط تکیه گاهی مختلف.....
۶۸۵-۴-اثر متقابل بارهای طولی و جانبی.....
فصل پنجم: نتیجه گیری و پیشنهادات	
۷۰۱-۵-جمع بندی مباحث.....
۷۱۲-۵-پیشنهاداتی برای کارهای بعدی.....
۷۳مراجع.....

چکیده

هدف اصلی این تحقیق بررسی کمانش موضعی صفحات منحنی شکل تحت تاثیر بارهای طولی و جانبی داخل صفحه است. در این صفحات علاوه بر بارهایی که در امتداد طولی وجود دارد، بارهای جانبی نیز وارد می‌گردد که باعث پیچیده‌تر شدن کمانش این صفحات می‌شود. با توجه به اینکه حل مسائل صفحات با روش‌های تحلیلی برای بعضی شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری معمولاً سخت و طولانی است، استفاده از روش‌های عددی مناسب‌تر به نظر می‌رسد. روش نوار محدود را می‌توان یکی از روش‌های عددی کارا برای تحلیل مسائل خمش و پایداری صفحات دانست. انواع مختلف این روش عبارتند از: روش نوار محدود عادی، نوار محدود مختلط و نوار محدود اسپلاین. برای تحلیل پایداری صفحات منحنی شکل تحت بارهای طولی و جانبی از روش نوار محدود معمولی با استفاده از المان نوار منحنی شکل استفاده شده است. در المان نوار منحنی شکل ۴ خط گره در نظر گرفته شده است و در هر خط گره ۴ درجه آزادی که شامل ۳ درجه آزادی انتقالی و ۱ درجه آزادی دورانی است، وجود دارد. در این روش از توابع مثلثاتی در جهت طولی و از توابع شکل هرمیتی در جهت عرضی، برای درونیابی مقادیر گره‌ای استفاده می‌گردد. روش نوار محدود به خاطر داشتن یک درجه آزادی کمتر در گره‌ها و داده‌های ورودی کمتر، به روش المان محدود برتری دارد و سریع‌تر به جواب همگرا می‌شود. برای بعضی حالات بارگذاری و تکیه‌گاهی نمودارهایی از ضرایب کمانش موضعی و اندرکنش بارهای طولی و جانبی بحرانی صفحات منحنی شکل تنظیم شده است. از این ضرایب کمانش می‌توان در طراحی پوسته‌های دایروی، لوله‌های جدار نازک و سایر سازه‌های مربوط استفاده کرد.

فصل اول

مقدمه و کلیات

۱-۱- کلیاتی پیرامون کمانش ورق‌ها

ورق‌ها اجزای سازه‌ای مسطح یا منحنی شکلی هستند که ضخامت آنها در مقایسه با دیگر ابعادشان کوچکتر است. به لحاظ همین هندسه خاص بسیاری از اجزاء مورد بررسی در مهندسی، در دسته‌بندی ورق‌ها قرار می‌گیرند. یکی از مهم‌ترین مباحث مورد توجه در این قبیل سازه‌ها، مسئله پایداری آنها می‌باشد. مطالعات و پژوهش‌های زیادی توسط دانشمندان در طی سال‌های اخیر روی مبحث پایداری ورق‌ها به عنوان یک عضو سازه‌ای با اهمیت، انجام شده است. بررسی کمانش کلی و کمانش موضعی مهمترین بخش از مبحث پایداری ورق‌ها می‌باشد. پدیده‌ی کمانش موضعی زمانی رخ می‌دهد که سازه تحت نیروهای فشاری داخل صفحه قرار گیرد. تا زمانی که نیروهای فشاری داخل صفحه به حد کمانش نرسیده‌اند افزایش بار فقط باعث تغییر شکل ورق به صورت محوری می‌شود ولی وقتی نیروهای فشاری به یک حد بحرانی معین می‌رسند ورق به طور ناگهانی

تغییر شکل می‌دهد که به این تغییر شکل ناگهانی کمانه کردن و یا به اصطلاح کمانش گفته می‌شود. این تغییر شکل باعث نقصان در مقاومت ورق در برابر نیروهای فشاری و کاهش ظرفیت باربری ورق می‌شود. وقوع این پدیده در ورق‌ها امر مطلوبی نمی‌باشد. برای رفع این نقص راه‌کارهای متعددی وجود دارد که از جمله راه‌کارهای مورد استفاده می‌توان به استفاده از سخت‌کننده‌های عرضی، افزایش ضخامت ورق و استفاده از مقاطع عرضی خاص اشاره کرد. طبیعتاً استفاده از صفحات ضخیم در طراحی سازه‌ها راه حل مناسبی برای رفع مشکل کمانش موضعی نیست زیرا ممکن است باعث غیر اقتصادی شدن طرح گردد. به عنوان مثال استفاده بهینه از مصالح در تعیین ضخامت ورق همراه با ایجاد فرم هندسی خاص در مقطع عرضی ورق از راه‌حل‌های مناسب برای جلوگیری از پدیده‌ی کمانش موضعی می‌باشد.

کمانش ورق‌ها در حالت کلی به کمانش ستون‌ها شبیه می‌باشد. با توجه به دوبرندی بودن، ورق قابلیت جذب نیروهای داخل صفحه بیشتری نسبت به ستون دارا است و قادر به تحمل بارهای بیشتر از بارهای کمانشی خود می‌باشد. برای بدست آوردن بارهای کمانشی ورق‌ها از معادلات دیفرانسیل جزئی (پاره‌ای) استفاده می‌شود. در حالی که معادلات دیفرانسیل مربوط به بررسی رفتار ستون‌ها، معادلات دیفرانسیل معمولی می‌باشند. در این قسمت برای بیان بهتر و مقایسه معادلات کمانش مربوط به ستون‌ها و ورق‌ها اشاره‌ای به این معادلات می‌شود. صفحات از دو نظر با ستون متفاوت می‌باشند. از دیدگاه ریاضی تفاوت اصلی بین صفحه و ستون این است که کمیاتی نظیر تغییر شکل جانبی و لنگر خمشی در ستون تابع یک متغیر مستقل (x) هستند ولی در صفحه تابعی از دو متغیر مستقل (x, y) می‌باشند. در نتیجه رفتار یک صفحه به وسیله معادلات دیفرانسیل جزئی مشخص می‌شود. در صورتی که برای بررسی رفتار ستون از معادلات دیفرانسیل معمولی استفاده می‌شود. تفاوت مهم دیگر صفحه و ستون در کمانش این دو آشکار می‌شود. برای یک ستون، کمانش توانائی آن را برای تحمل بار اضافی خاتمه می‌دهد. بنابراین بار بحرانی بار گسیختگی ستون می‌باشد در حالیکه صفحات قادر هستند که بار محوری بیش از بار بحرانی را تحمل کنند.

در سال ۱۹۱۰ تیموشنکو^۱ برای اولین بار با به کارگیری رابطه انرژی زیر توانست بار کمانش یک ستون دو سر مفصل را بطور دقیق بدست آورد.

$$\Delta W = \Delta U \quad (1-1)$$

که ΔW تغییرات کار خارجی و ΔU تغییرات انرژی کرنشی سیستم می‌باشند.

علت دقیق بودن جوابی که او بدست آورد انتخاب تابع شکل واقعی (تابع سینوسی) برای شکل کمانش ستون بود. یک قاعده کلی در مورد مقادیر بار کمانش محاسبه شده توسط روش انرژی وجود دارد و آن بزرگتر بودن بار کمانش محاسبه شده نسبت به بار کمانش واقعی است. وقتی که تابع تغییر شکل در نظر گرفته شده غیر واقعی باشد با بکار بردن چنین تابعی در واقع سیستم مجبور شده است که بر خلاف میل ذاتی و طبیعی خود تغییر شکل بدهد. این تغییر شکل اجباری از نظر فیزیکی مفهومی جز سخت‌تر کردن سیستم ندارد و سیستم سخت شده بدیهی است که بار کمانش بزرگتری خواهد داشت. معادله دیفرانسیل حاکم بر رفتار تیر را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} + P \frac{d^2 v}{dx^2} = 0 \quad (2-1)$$

(EI)، سختی خمشی تیر، v ، جابجائی در امتداد قائم تیر و P ، بار محوری وارد بر ستون می‌باشد.

با تعمیم حالت یک بعدی به دو بعدی معادلات حاکم بر رفتار ورق‌ها را می‌توان بیان کرد که در زیر به اختصار بیان شده است.

به طور کلی صفحات به سه دسته تقسیم می‌شوند:

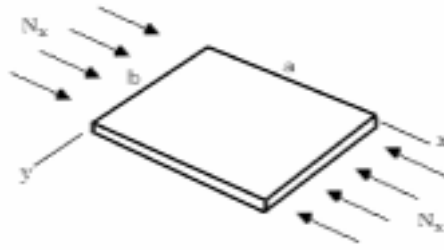
۱- صفحات نازک: ضخامت این نوع از صفحات در مقایسه با سایر ابعاد صفحه کوچک می‌باشد. در این نوع صفحات تغییر شکل برشی جانبی در مقایسه با تغییر شکل خمشی قابل صرف نظر می‌باشد.

۲- صفحات ضخیم: ضخامت این نوع از صفحه‌ها در برابر سایر ابعاد صفحه و تغییر شکل برشی جانبی در مقایسه با تغییر شکل خمشی قابل ملاحظه می‌باشد.

۳- غشاها: صفحاتی با ضخامت اندک هستند، به طوری که مقاومت خمشی آنها بسیار کم می‌باشد و بار جانبی به صورت نیروهای درون صفحه ای وارد می‌شود.

پایداری ورق‌ها معمولاً بر اساس تئوری ورق‌های نازک بررسی می‌شود. با در نظر گرفتن یک ورق مستطیلی تحت بارگذاری نشان داده شده در شکل ۱-۱ می‌توان معادله دیفرانسیل حاکم بر رفتار ورق را به صورت زیر بیان کرد [۱].

$$D \nabla^4 w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3-1)$$



شکل ۱-۱: ورق مستطیلی با تکیه گاه مفصلی در چهار طرف

D ، ضریب صلیبیت ورق و w ، جابجائی در امتداد قائم ورق می باشد.

∇^4 ، اپراتور تعادلی دوبعدی ورق می باشد که به صورت زیر بیان می شود.

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (۴-۱)$$

N_x ، بار محوری وارد بر ورق می باشد.

مسئله کمانش صفحه با تکیه گاه های مفصلی در چهار طرف را می توان با استفاده از معادله دیفرانسیل بیان شده در رابطه (۳-۱) حل کرد دلیل حل سریع و آسان این مسئله خاص با استفاده از معادله دیفرانسیل ورق، اعمال شرایط مرزی هندسی (مربوط به تغییر مکان) و شرایط مرزی استاتیکی (مربوط به نیروها و لنگرها) در معادله با حدس صحیح از تابع تغییر شکل صفحه در هنگام کمانش می باشد. مسائل متنوعی در پایداری صفحات وجود دارد که شامل بارهای مختلف مثل بارهای برشی و خمشی و شرایط مرزی گوناگون نظیر لبه های آزاد، گیردار و یا لبه های بطور نسبی گیردار در برابر چرخش و صفحات با اشکال هندسی مختلف می باشند. در اکثر موارد فوق تعیین جواب های دقیق معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله با مشکلات محاسباتی نظیر همگرایی کند سری ها و یا معادلات بفرنج مواجه می شود. این مسائل باعث جایگزینی حل عددی مسائل پایداری به جای روش های دقیق شده است.

علیرغم شباهت بسیار نزدیک معادلات دوبعدی و یک بعدی، محاسبات مربوط به مسئله دو بعدی بسیار پیچیده تر از مسئله یک بعدی می باشد. برای این منظور برای حل معادله از فرم تغییر شکل ورق از نوع سینوسی به صورت زیر استفاده می گردد.

$$w(x, y) = A_{mn} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \quad (۵-۱)$$

با جایگذاری عبارت فوق در معادله حاکم بر رفتار ورق در رابطه (۳-۱) می‌توان نیروی کمانشی ورق (N_{cr}) را به صورت زیر بدست آورد.

$$N_{cr} = \pi^2 D \left(\frac{a}{n} \right)^2 \left[\left(\frac{n}{a} \right)^2 + \left(\frac{m}{b} \right)^2 \right]^2 \quad (۶-۱)$$

برای محاسبه مقدار بار بحرانی، معادله (۶-۱) باید نسبت به مقادیر n, m مینیمم گردد. با دقت در رابطه فوق می‌توان فهمید که برای بدست آوردن مقدار مینیمم این رابطه باید $m=1$ و پارامتر n دارای مقادیر مختلف باشد. با مساوی یک قرار دادن مقدار m و با فرض متغیر بودن پارامتر n رابطه (۶-۱) به صورت زیر قابل بازنویسی است.

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left[n \left(\frac{b}{a} \right) + \frac{1}{n} \left(\frac{a}{b} \right) \right]^2 \quad (۷-۱)$$

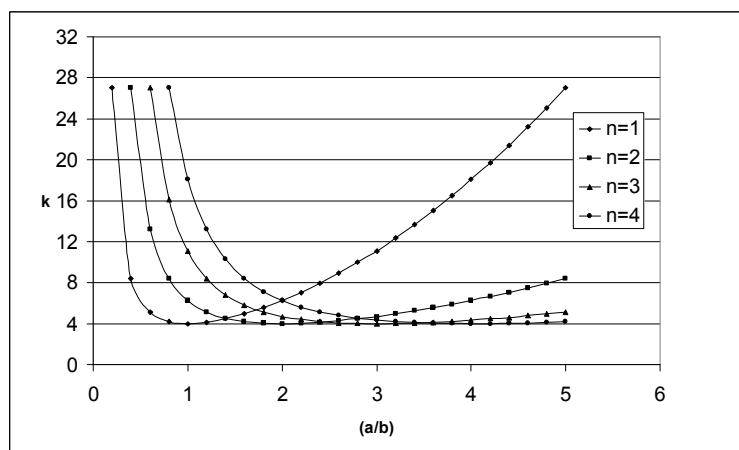
و یا به عبارت دیگر:

$$N_{cr} = k \frac{\pi^2 D}{b^2} \quad (۸-۱)$$

که در آن k ضریب بار کمانشی بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$k = \left[n \left(\frac{b}{a} \right) + \frac{1}{n} \left(\frac{a}{b} \right) \right]^2 \quad (۹-۱)$$

این رابطه نشان می‌دهد که مقدار بار بحرانی به نسبت a/b بستگی دارد. نمودار ۱-۱ تغییرات ضریب بار کمانشی k بر حسب مقدار a/b برای یک ورق مستطیلی با شرایط تکیه‌گاه مفصلی در چهار طرف و تحت بارگذاری محوری را نشان می‌دهد که برای مقادیر مختلف n بدست آمده است.



نمودار ۱-۱: تغییرات ضریب کمانش موضعی ورق k بر حسب a/b

۱-۲- گذری بر مطالعات گذشته

۱-۲-۱- روش های دقیق تحلیل کمانش

به جرات می توان اوایلر را بنیان گذار علم پایداری سازه ها نامید زیرا برای اولین بار در سال ۱۷۴۴ اولین تحلیل صحیح پایداری یک ستون را بر اساس روش تعادل خنثی ارائه نمود و مودهای کمانش تحت این مودها را محاسبه کرد [۱]. اولین بررسی های چشمگیر در مورد ورق ها در سال های ۱۸۰۰ انجام گرفته است. ایده های اصلی توسط افرادی چون ناویر، کریشهف و لوی ارائه شد [۱]. لاگرانژ در سال ۱۸۱۱ و ناویر در سال ۱۸۲۰ معادله خیز جانبی ورق تحت اثر بار گسترده عمود بر میان صفحه را بررسی کرد [۲]. شاید بتوان شروع جدی مبحث پایداری صفحات را مربوط به تحقیقات برایان دانست که در سال ۱۸۹۱ میلادی توانست با استفاده از سری های سینوسی مضاعف فوریه مسئله کمانش یک صفحه مستطیلی متکی بر تکیه گاه های مفصلی را حل نماید که معمولاً نخستین راه حل مسئله کمانش صفحات قلمداد می شود [۲].

۱-۲-۲- روش های عددی تحلیل کمانش ورق های مستوی

سیستم های مهندسی به دو دسته پیوسته و ناپیوسته تقسیم می شوند. در واقع مسائل مکانیک سازه محیط هایی پیوسته دارای تعداد نامحدودی درجه آزادی و شرایط مرزی پیچیده همراه با خواص غیریکنواخت مواد هستند، به این معنی که تعداد نامحدودی متغیر در فرم معادله دیفرانسیل بر رفتار سیستم های پیوسته حکمفرما است. حل دقیق برای معادلات دیفرانسیل فقط برای سیستم های ساده با شرایط مرزی ساده امکان پذیر است. با اعمال روش های عددی قابل قبول بر پایه اصول مهندسی، قادریم راه حل مناسب را برای مسائل پیچیده مهندسی بیابیم. هدف روش های عددی تبدیل یک سیستم پیوسته به تعداد محدودی سیستم ناپیوسته است. برای حل معادلات دیفرانسیل به روش های عددی این معادلات با روش هایی نظیر روش های تغییراتی یا مانده وزنی فرموله می شوند. روش های مانده وزنی برای اکثر مسائل علمی مهندسی کاربرد دارند، اما روش های تغییراتی بیشتر برای مسائل مکانیک جامدات مناسب هستند.

پس از فرموله کردن نوبت حل به وسیله روش های عددی می رسد. از روش های عددی موجود می توان به روش تفاضل های محدود، روش اجزاء محدود و روش نوامحدود اشاره کرد. در روش های عددی مانند اجزاء محدود از تعدادی المان برای تقریب زدن پاسخ استفاده می شود، این اجزاء به وسیله گره هایی روی مرزهایشان به هم متصل می شوند. روش اجزاء محدود در مورد مسائل مکانیک جامدات براساس تقریب جابجائی به وسیله

تخمین تغییر مکان گره‌ها، اعمال می‌شود این روش در نهایت منجر به حل یک دستگاه معادلات جبری می‌شود. با این روش حل بسیاری از مسائل پیچیده مکانیک سازه میسر گردیده است. استفاده از روش اجزاء محدود در جهت تحلیل پایداری ورق‌ها از آن جمله است. محققین بسیاری از جمله گالاگر و پادلوگ در سال ۱۹۶۳، والاس، مارتین، کاپر و هارتز در سال ۱۹۶۶ و گالاگر و پرزینسکی در سال ۱۹۶۸ از روش اجزاء محدود جهت تحلیل کمانش ورق استفاده کردند.[۳].

ورق‌ها اجزای سازه‌ای منشوری شکل هستند و از نظر تکیه‌گاهی هم ساده‌اند، در حالیکه روش اجزاء محدود با قابلیت زیادی که دارد ما را به حل مسائلی که چه به لحاظ شرایط مرزی و چه به لحاظ هندسی پیچیده هستند، قادر می‌سازد. اما کاربرد این روش برای تحلیل مستلزم صرف وقت زیاد جهت آماده‌سازی اطلاعات ورودی و تفسیر خروجی‌ها و در نتیجه صرف هزینه زیادی است. به همین علت روش نوار محدود به‌عنوان نوع خاصی از اجزاء محدود مورد توجه پژوهشگران قرار گرفت. در این روش حجم اطلاعات به‌طور قابل ملاحظه‌ای کم می‌شود. در عین حال دقت در حد مطلوب قابل حصول است. در روش نوار محدود سازه به نوارهایی تقسیم می‌شود که لبه‌های انتهایی این نوارها منطبق بر مرز سازه است. نوارها به وسیله خطوط گرهی که موازی با مرزهای طولی هستند در امتداد طول به یکدیگر متصل می‌شوند. در بعضی حالات نیز ممکن است از خطوط گرهی داخلی برای رسیدن به یک نوار با مرتبه بالاتر استفاده شود. درجات آزادی در یک خط گرهی از نوار، معمولاً کمتر از درجات آزادی در یک گره از المان می‌باشد و در کل تعداد درجات آزادی به‌طور قابل ملاحظه‌ای کمتر از روش نوار محدود است. در نتیجه در این روش تعداد معادلات، پهنای نوار ماتریس سختی و حجم خروجی‌ها کمتر است.

طی سی سال اخیر، بسیاری از محققین از روش نوار محدود برای تحلیل کمانش ورق استفاده کرده‌اند. در این راستا از روش‌های مختلف نوار محدود استفاده شده است.

این روش‌ها عبارتند از:

۱- روش نوار محدود معمولی^۱ (FSM)

۲- روش نوار محدود مختلط^۲

۳- روش نوار محدود اسپلاین^۳

1 -Finite Strip Method
2 -Complex Finite Strip Method
3 -Spline Finite Strip Method

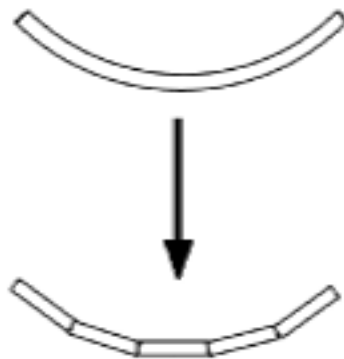
اولین باری که در روش‌های عددی ماتریس هندسی برای حل مسائل کمانش مطرح گشت و برای تحلیل کمانش سازه‌ها مورد استفاده قرار گرفت توسط ترنر و همکاران او [۴] در سال ۱۹۶۰ بود. او این مفهوم را برای سازه‌های خرابایی و همچنین صفحات با المان‌های مثلثی تحت تنش غشائی مورد استفاده قرار داد. تا اواخر دهه شصت روش‌های المان محدود برای حل کمانش کاملاً فرموله شده و مقالات زیادی در این زمینه ارائه شد. به موازات پیشروی روش‌های عددی حل کمانش ورق‌ها، روش نوار محدود نیز توسعه یافت. روش نوار محدود معمولی همان روشی است که توسط چونگ [۵] ارائه شد. در این روش به علت فرض رفتار سینوسی برای ورق در یک جهت و در نتیجه تبدیل مسئله از دو بعدی به تک بعدی، ابعاد مسئله کوچک شده و سریعاً همگرا می‌شود. البته فرض توابع سینوسی فقط برای شرایط مرزی مفصلی و یا برای ورق‌های طویل، که شرایط مرزی اهمیت خود را از دست می‌دهند، مناسب است.

پرزمینسکی [۶] در سال ۱۹۷۳ از روش نوار محدود نیمه تحلیلی برای حل کمانش موضعی ورق تحت فشار دو محوری استفاده کرد. روش او در فرمول‌بندی نوار محدود همان روش تقریبی چونگ و چونگ [۷] بود. که در آن جابجائی نوار در حین کمانش در جهت طولی به صورت تغییرات سینوسی و در جهت عرضی به صورت یک چند جمله‌ای درجه ۳ فرض شده است. اما این روش با وجود اینکه برای کمانش موضعی ارتجاعی اعضا جدار نازک مناسب است، برای کمانش جانبی و تغییر شکلی قابل استفاده نمی‌باشد. علت این امر فرض معمول کمانش موضعی است که همه خطوط اتصال بین اجزاء مسطح، پس از کمانش نیز کاملاً مستقیم باقی می‌مانند. تحلیل‌هایی که قادر به مدل کردن مودهای کمانش موضعی، تغییر شکلی و جانبی اعضا جدار نازک مسطح باشند بر اساس یک روش نوار محدود دقیق توسط ویتریک، ویتریک و کرزن در سال ۱۹۶۸، ویلیامز و ویتریک در سال ۱۹۶۹ و یک روش نیمه تحلیلی در ادامه کار پرزمینسکی، توسط پلانک و ویتریک در سال ۱۹۷۴ و هنکاک در سال ۱۹۷۸ توسعه یافت [۳].

روش نوار محدود نیمه تحلیلی توسط برادفورد [۸] در سال ۱۹۹۰، ازهری و برادفورد [۹] در سال ۱۹۹۱ و ۱۹۹۴ برای تحلیل کمانش موضعی توسعه یافت.

۱-۲-۳- روش‌های عددی تحلیل کمانش ورق‌های استوانه‌ای

از انواع ورق‌های نازک می‌توان به ورق‌های استوانه‌ای شکل اشاره کرد که دارای کاربرد فراوانی در صنایع امروزی می‌باشند. عمده‌ترین تفاوت ورق‌های استوانه‌ای شکل با ورق‌های مستوی، فرم هندسی این نوع ورق‌ها می‌باشد. مطالعات فراوانی بر روی رفتار ورق‌های استوانه‌ای و مخروطی شکل با روش‌های مختلف از جمله روش نوار محدود انجام شده است. اکثر تحقیقات با استفاده از المان بندی ورق‌های منحنی در امتداد طولی به وسیله ورق‌های مستوی بوده است. برای بدست آوردن نتایج قابل قبول برای این نوع از سازه‌ها استفاده از تعداد زیادی از المان‌های مستطیلی برای بدست آوردن شکل تقریبی سازه نیاز می‌باشد. این روش به دلیل به وجود آمدن تعداد زیاد المان و به تبع آن حجم زیاد ماتریس‌های سختی و هندسی، روش مناسبی برای حل این ورق‌ها نمی‌باشد. چونگ و چونگ [۱۰] در مطالعه خود رفتار ورق‌های منحنی شکل را با استفاده از توابع شکل مربوط به جابجائی‌های ورق‌های مستوی شکل بدست آورده‌اند. در شکل ۱-۲ نحوه المان بندی این ورق‌ها به وسیله ورق‌های مستوی نشان داده شده است.



شکل ۱-۲: المان بندی ورق منحنی شکل به وسیله ورق‌های مستطیلی صاف

میر و چونگ [۱۱] در دو کار جداگانه کمانش ورق پل‌های جعبه‌ای منحنی شکل با تکیه‌گاه‌های ساده در لبه‌های پل را حل کرده‌اند. این دو تغییرات مولفه جابجائی در امتداد محیطی را به صورت هارمونیک، تغییرات در امتداد طولی را به صورت خطی و تغییرات مولفه عمود بر صفحه را به صورت چند جمله‌ای درجه سوم در نظر گرفته‌اند. داو [۱۲] روش تقریبی نوار محدود را بر پایه تئوری کلاسیک ورق^۱ برای حل استاتیکی ورق‌های منحنی شکل ایزوتروپ ارائه کرد. در سال‌های اخیر مطالعات فراوانی بر روی این نوع از ورق‌ها انجام شده است که به عنوان مثال می‌توان به مطالعات مگنوکی و همکاران [۱۳] بر روی ورق‌های استوانه‌ای با ۳ لبه تکیه‌گاه ساده

و یک لبه آزاد اشاره کرد. همچنین به دلیل کاربرد فراوان ورق‌های منحنی در سازه‌های هوایی و فضائی، سازمان هوا-فضای آمریکا (NASA) [۱۴] تحقیقات گسترده بر روی کماتش ورق‌های منحنی شکل تحت تاثیر نیروهای طولی و جانبی انجام داده است.

۱-۳-اهداف تحقیق حاضر

همان‌طور که در قسمت‌های قبلی اشاره شده است ورق‌های طولی به مقدار قابل توجهی در صنایع هوایی و کشتی سازی و سایر موارد مورد استفاده قرار می‌گیرند. این سازه‌ها را با استفاده از ورق‌های دراز و نازک (صاف و یا منحنی) که در امتداد طولی نسبت به هم مقید می‌باشند، می‌توان ساخت. برای استفاده بهینه از این نوع سازه‌ها علاوه بر مسائل مربوط به مقاومت مصالح اجزاء تشکیل دهنده سازه‌ها، مسئله پایداری سازه‌ها نیز باید مد نظر قرار بگیرد. در این پایان نامه در ابتدا به بررسی تعیین نیروی کماتشی ورق‌های منحنی شکل به روش دقیق اشاره می‌شود. در این روش ورق با تکیه‌گاه‌های مفصلی تحت بررسی قرار می‌گیرد. با بررسی موضوع کماتش ورق‌های منحنی شکل به روش نوار محدود و با در نظر گرفتن توابع شکل مثلثاتی و چندجمله‌ای برای جابجائی‌های ورق در جهات طولی و عرضی و تعیین ضرایب کماتش این ورق‌ها، برای حالت‌های مختلف بارگذاری و همچنین تکیه‌گاه‌های مختلف به این مهم می‌توان رسید که حل این مسائل با استفاده از روش‌های عددی تا حدود بسیار زیاد در وقت و همچنین حجم عملیات محاسباتی صرفه جوئی می‌کند. همچنین تاثیرات ابعاد ورق‌ها بر روی مقدار ضریب کماتش ورق‌ها مورد بررسی قرار گرفته است که در بخش‌های بعدی به تفصیل مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

فصل دوم

معادلات کمانش ورق‌های استوانه‌ای و روابط انرژی

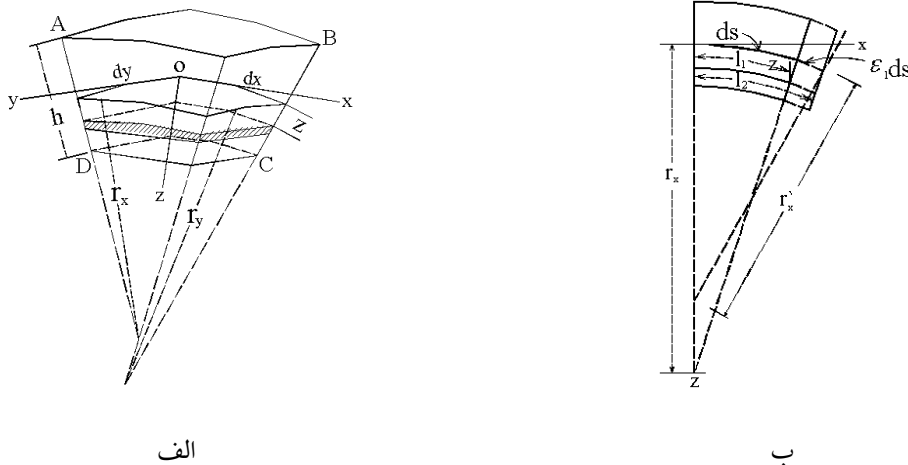
۲-۱- مقدمه

در این فصل ابتدا روابط تنش-کرنش ورق‌ها و روابط انرژی مربوط به تغییر شکل ورق‌ها بیان می‌گردد. سپس اشاره‌ای به جابجایی‌های حاصل از تغییر شکل ورق استوانه‌ای و ورق بریده شده از ورق استوانه‌ای در اثر نیروهای خارجی گردیده و با استفاده از معادلات دیفرانسیل مربوط به جابجایی‌ها، معادلات تعادل و همچنین معادلات مربوط به کمانش این نوع ورق‌ها بدست می‌آیند. با تعیین این معادلات و حل آنها می‌توان نیروهای کمانشی ورق‌های مذکور را بدست آورد. با مقایسه معادلات بدست آمده برای تعیین نیروی کمانشی ورق‌های منحنی شکل و معادلات بدست آمده برای ورق‌های مستوی می‌توان دریافت که ورق‌های منحنی به دلیل داشتن فرم خاص هندسی، دارای نیروی کمانشی بزرگتری نسبت به ورق‌های مستوی نظیر خود می‌باشند که در بخش‌های بعدی به تفصیل به این موضوع اشاره می‌شود.

۲-۲- معادلات تغییر شکل و انرژی کرنشی یک المان پوسته‌ای:

۲-۲-۱- روابط مربوط به جابجائی و تغییر مکان

شکل ۱-۲ یک المان بی نهایت کوچک ABCD از یک پوسته را نشان می‌دهد که توسط دو جفت از مقاطع عمود بر صفحه میانی در جهت انحناهای اصلی صفحه جدا گردیده است. محورهای مختصات x و y در نقطه O به دو خط انحنای اصلی پوسته مماس می‌باشند و جهت z عمود بر صفحه میانی در نظر گرفته شده است. همان طوری که در شکل ۱-۲ الف نشان داده شده است r'_x و r'_y به ترتیب شعاع‌های انحنای اصلی در صفحات xz و yz می‌باشند. ضخامت پوسته یک مقدار ثابت می‌باشد که h نامگذاری شده است. در خمش پوسته، المان‌های خطی مثل AD و BC عمود بر صفحه میانی به صورت مستقیم و عمود بر فرم تغییر یافته صفحه میانی باقی می‌مانند.



الف

ب

شکل ۱-۲: یک المان بریده شده از یک ورق منحنی شکل

در طول خمش، صفحات جانبی المان ABCD فقط نسبت به خطوطی که از تلاقی صفحه میانی با صفحات جانبی به وجود می‌آیند دوران می‌کنند. اگر r'_x و r'_y مقادیر شعاع انحناء پس از تغییر شکل باشند، با توجه به شکل ۱-۲ ب کرنش یک لایه نازک با فاصله z از صفحه میانی که تنها از دوران صفحات جانبی ناشی می‌شود، به صورت زیر بیان می‌شود [۱۵].

$$\varepsilon_x = -\frac{z}{1-\frac{z}{r_x}} \left(\frac{1}{r'_x} - \frac{1}{r_x} \right) \quad \varepsilon_y = -\frac{z}{1-\frac{z}{r_y}} \left(\frac{1}{r'_y} - \frac{1}{r_y} \right) \quad (1-2)$$

در شکل ۲-۱-ب چرخش صفحات جانبی المان به علت کرنش صفحه میانی و با فرض حرکت موازی این صفحات نسبت به حالت اولیه خود نیز نشان داده شده است. کرنش ε_x لایه‌ای به فاصله z از صفحه میانی به صورت زیر نوشته می‌شود [۱۵].

$$\varepsilon_x = \frac{l_2 - l_1}{l_1} \quad l_1 = ds \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) \quad l_2 = ds(1 + \varepsilon) \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) \quad (2-2)$$

با جایگذاری مقادیر l_1 و l_2 ، کرنش ε_x را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_1}{1 - \frac{z}{r_x}} - \frac{z}{1 - \frac{z}{r_x}} \left[\frac{1}{(1 - \varepsilon_1)r'_x} - \frac{1}{r_x} \right] \quad (3-2)$$

به همین ترتیب برای کرنش ε_y خواهیم داشت:

$$\varepsilon_y = \frac{\varepsilon_2}{1 - \frac{z}{r_y}} - \frac{z}{1 - \frac{z}{r_y}} \left[\frac{1}{(1 - \varepsilon_2)r'_y} - \frac{1}{r_y} \right] \quad (4-2)$$

به طوری که ε_1 و ε_2 کرنش‌های صفحه میانی در جهات x و y می‌باشند.

در این بخش ضخامت پوسته در مقایسه با شعاع انحناء بسیار کوچک در نظر گرفته شده است. به همین دلیل از مقادیر $\frac{z}{r_x}$ و $\frac{z}{r_y}$ می‌توان در برابر واحد صرف نظر کرد بنابراین:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1 - z \left(\frac{1}{r'_x} - \frac{1}{r_x} \right) = \varepsilon_1 - \chi_x z \quad \varepsilon_y = \varepsilon_2 - z \left(\frac{1}{r'_y} - \frac{1}{r_y} \right) = \varepsilon_2 - \chi_y z \quad (5-2)$$

در روابط فوق χ_x و χ_y تغییرات انحناء می‌باشند.

در حل این مسئله فرض شده است که هیچ‌گونه تنش قائم به لایه مورد نظر وارد نمی‌شود ($\sigma_z = 0$). همچنین با

استفاده از روابط تنش-کرنش، تنش‌های درون صفحه‌ای در جهات x و y چنین بدست می‌آیند:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} [\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2 - z(\chi_x + \nu \chi_y)] \quad \sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} [\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1 - z(\chi_y + \nu \chi_x)] \quad (6-2)$$

E مدول الاستیسیته و ν ضریب پواسون می‌باشند.

در شکل ۲-۱-الف بر روی هر یک از وجوه المان ABCD نیروهای مربوطه را می‌توان با برآیند نیروهای عمودی پخش شده در مرکز وجه و لنگر خمشی متمرکز جابجا کرد. با توجه به کوچک بودن ضخامت پوسته ورق، وجوه کناری پوسته ورق را می‌توان مستطیلی شکل فرض کرد. نیروهای برآیند و ممان‌های خمشی وارد بر طول واحد را می‌توان به صورت زیر بیان کرد [۱۵]:

$$\left\{ \begin{aligned} N_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) \\ N_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) \end{aligned} \right. \quad (7-2)$$

$$\left\{ \begin{aligned} M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_x dz = -D(\chi_x + \nu\chi_y) \\ M_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_y dz = -D(\chi_y + \nu\chi_x) \end{aligned} \right. \quad (8-2)$$

D ضریب صلبیت خمشی ورق بوده که از رابطه زیر بدست می آید:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (9-2)$$

در صفحه عمود بر محور x نیروهای برشی برآیند و ممان‌های پیچشی را می توان به صورت زیر بیان کرد.

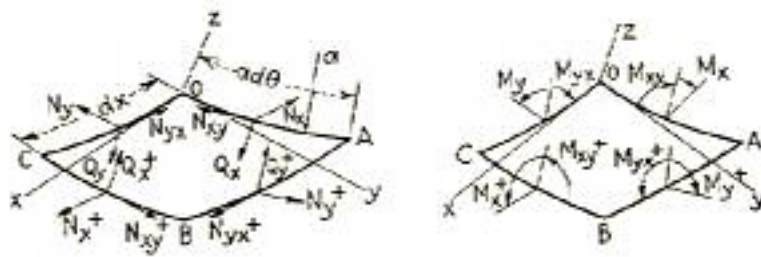
$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz \quad N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz \quad M_{xy} = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \tau_{xy} dz \quad (10-2)$$

τ_{xz} و τ_{yz} مولفه‌های تنش برشی در صفحه عمود بر محور x می باشند. هم چنین در صفحه عمود بر محور y ،

نیروهای برآیند و ممان‌های پیچشی را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz \quad N_{yx} = N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz \quad M_{yx} = M_{xy} = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \tau_{xy} dz \quad (11-2)$$

نیروهای ارائه شده در روابط (۱۰-۲) و (۱۱-۲)، در شکل ۲-۲ نشان داده شده است.



شکل ۲-۲: شکل اولیه المان جدا شده از یک استوانه جدار نازک به همراه نیروهای وارده

رابطه تنش برشی τ_{xy} و پیچش المان ABCD نشان داده شده در شکل ۱-۲ را می توان به صورت زیر نوشت [۱۵].

$$\tau_{xy} = -2G z \chi_{xy} \quad (۱۲-۲)$$

$$M_{xy} = D(1-\nu) \chi_{xy} \quad (۱۳-۲)$$

به طوری که به جای χ_{xy} می توان از عبارت $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ استفاده کرد. در المان ABCD در طول خمش پوسته، $\chi_{xy} dx$ چرخش لبه BC نسبت به OZ حول محور x می باشد. با اعمال پیچش، یک کرنش برشی γ نیز در صفحه میانی ورق به وجود می آید [۱۵] لذا داریم:

$$\tau_{xy} = (\gamma - 2z \chi_{xy}) G \quad (۱۴-۲)$$

بنابراین:

$$N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz = \frac{\gamma h E}{2(1-\nu)} \quad M_{xy} = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz = D(1-\nu) \chi_{xy} \quad (۱۵-۲)$$

بدین ترتیب فرض می شود که در طول خمش پوسته، المان های خطی عمود بر صفحه میانی مستقیم باقی مانده و عمود بر صفحه میانی تغییر شکل یافته می باشند. نیروهای N_x و N_y و N_{xy} و ممان های M_x و M_y و M_{xy} در روابط (۷-۲)، (۸-۲) و (۱۰-۲) را می توان به وسیله سه مولفه کرنش در صفحه میانی پوسته (ϵ_x و ϵ_y و γ) و سه مولفه تغییرات انحاء و پیچش در صفحه میانی (χ_x و χ_y و χ_{xy}) بیان کرد.

۲-۲-۲- روابط مربوط به انرژی کرنشی المان پوسته‌ای

انرژی کرنشی ارتجاعی یک جسم الاستیک برای یک حالت تنش کلی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

[۱]

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dx dy dz \quad (۱۶-۲)$$

انرژی کرنشی شامل دو قسمت می‌باشد:

۱- انرژی کرنشی ناشی از خمش

۲- انرژی کرنشی ناشی از کشیدگی صفحه میانی

انرژی کرنشی ناشی از خمش المان پوسته را می‌توان از روابط زیر بدست آورد [۱۵].

با فرض رفتار ارتجاعی و صرف نظر کردن از تنش‌های راستای z (تنش مستوی)، روابط تنش-کرنش بیان شده در

روابط (۶-۲) و (۱۴-۲) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{Eh^3}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \rightarrow \{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (۱۷-۲)$$

با جابجایی مقادیر $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ و $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ به جای تغییرات انحناء ε_x و ε_y و γ_{xy} بردار کرنش $\{\varepsilon\}$ را می‌توان

به صورت زیر نیز بیان کرد:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (۱۸-۲)$$

با توجه به اینکه این مسئله با فرضیات تئوری تغییر شکل‌های کوچک ورق‌های نازک حل می‌شود، مقادیر σ_z و

γ_{yz} و γ_{xz} برابر صفر می‌باشند. با قرار دادن مقادیر ε_x و ε_y و γ_{xy} در رابطه (۱۶-۲) و با انتگرال‌گیری و