به نام آنکه جان را فکرت

آموخت

چراغ دل به نور جان

برافروخت

دانشگاه پیام نور استان فارس

پایان نامه
برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته: ریاضی محض

دانشکده: علوم ریاضی

گروه ریاضی

عنوان پایان نامه:

مباحثی بر مدول های ضربی و تصویری

استاد راهنما:

دکتر سید ناصر امیری

استاد مشاور:

دکتر احمد خاکساری

نگارش:

مهدی سیدی

تیر ۱۳۸۸

دانشگاه پیام نوراستان فارس

بسمه تعالی

تصویب پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان **مباحثی بر مدولهای ضربی و تصویری** که توسط

مهدی سیدی در مرکز شیراز تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است مورد تأیید می باشد.

تاریخ دفاع: ۸۸/۵/۱

نمره: ۵ /۱۸

درجه ارزشیابی : عالی

اعضای هیأت داوران:

نام و نام خانوادگی	هیأت داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱ـ دکتر سید ناصر امیری	استاد راهنما	استادیار	
۲ـ دکتر احمد خاکساری	استاد مشاور	استادیار	
۳ـ دکتر محبوبه حسینی یزدی	استاد داور	استادیار	
۴ـ دکتر حسین توللی	نماینده تحصیلات تکمیلی	دانشیار	

تقدیم به

پدر و مادرم

سپاس و قدردانی

سپاس آن **نگارنده غیب** را که به من توفیق داد تا گامی کوچک در راهی بردارم که در نهایت به خودش ختم می شود.

از استاد گرامیم جناب آقای **دکتر سید ناصر امیری** که در مراحل مختلف شکل گیری و تصحیح این رساله مرا یاری نمودند مراتب قدردانی و تشکرخود را ابراز می دارم.

از استاد مشاور محترم جناب آقای **دکتر احمد خاکساری** که راهنماییهای مفید ایشان همواره چراغ راه من بود بینهایت سپاسگذارم.

از استاد محترم سرکار خانم **دکتر محبوبه حسینی یزدی** که زحمت داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند و همچنین با دقت و وسواس تمام آن را ویرایش نمودند قدردانی می کنم.

از دوست عزیزم جناب آقای **امین قنبرنژاد** که از هر گونه کمک به بنده دریغ نکردند تشکر می کنم.

و در نهایت از همه ی عزیزانی که به گونه های مختلف مرا یاری نمودند و نام آنها از قلم افتاد تقدیر و تشکر می نمایم.

فهرست مطالب

چکیده	۱
مقدمه	۲
فصل اول: مقدمات و مفاهیم اولیه	۵
فصل دوم: مدول‌های ضربی و $\theta(M)$	۲۵
فصل سوم: مدول‌های تصویری و $T(M)$	۵۷
واژه‌نامه	۸۴
مراجع	۸۹

چکیده

ایده‌آل شرکت پذیر $\theta(M)$ و ایده‌آل اثر $T(M)$ از مدول M ، در مطالعه مدولهای ضربی و تصویری نقش مهمی دارند . ما این دو را بررسی می کنیم و بخصوص نشان می دهیم مدولهای باوفای ضربی و تصویری خصوصیات مشترکی دارند .

ما از یک روش استفاده می کنیم که بر پایه مدولهای ضربی اندرسون [۱] بناشده است و قادر است اثباتهای جدیدی از قضیه ها را روی مدولهای ضربی از [۱۰] ,[۱۶] ,[۲۱] بیان کند ، و همچنین نتایج مشابهی برای مدولهای تصویری ارائه دهد .

[۱] Anderson

مقدمه

در این رساله فرض می‌کنیم R حلقه جابجائی و یکدار و M یک مدول یکانی باشد.مدول M را یک مدول ضربی می‌نامیم هرگاه برای هر زیر مدول آن مثل N یک ایده‌آل I از R باشد که $N = IM$ و به عبارت دیگر M ضربی است اگر و تنها اگر $N = [N : M]N$. Rـمدول M را حذفی گوئیم هرگاه از $IM \subseteq JM$ بتوان نتیجه گرفت که $I \subseteq J$ برای هر ایده‌آل I, J از R و حذفی ضعیف گویند هرگاه بتوان نتیجه گرفت که $I \subseteq J + annM$. با توجه به مرجع [۳] و [٦] خواهیم داشت که مدولهای ضربی مدولهای حذفی ضعیف می‌باشند منظور از $\theta(M)$ دراین رساله عبارتست از $\theta(M) = \sum_{m \in M}[Rm : M]$، که نقش مهمی در مطالعه مدولهای ضربی دارد.
منظور از $T(M)$ در این رساله عبارتست از $T(M) = \sum_{f \in Hom(M,R)} f(M)$، که نقش مهمی در مطالعه مدولهای تصویری دارد. اگر M تصویری باشد آنگاه $M = MT(M)$ و $annM = annT(M)$ و $T(M)$ یک ایده‌آل محض R می‌باشد. در فصل سوم ثابت می‌شود که اگر M تصویری باشد آنگاه $R = T(M) + ann(m)$ برای هر $m \in M$، و معادلا $Rm = T(M)$. عکس قضیه درست نیست .ما همچنین نشان می‌دهیم که اگر M تصویری باشد $T(M) = \sum_{m \in M} ann(ann(m))$. دراین رساله خواص $\theta(M)$ و $T(M)$ و شرایط تساوی این دو مورد بررسی قرار می‌گیرد، و نیز نشان می‌دهیم که اگر M ضربی و تصویری باشد، $\theta(M) = T(M)$ می‌باشد.و همچنین $\theta(M)$ کاری را انجام می‌دهد که مدولهای متناهی تولید شده انجام می‌دهند که شرطی ضعیف تر می‌باشد.

فصل ۱

مقدمات و مفاهیم اولیه

این فصل به بیان پیش نیازها می‌پردازد و در تنظیم آن سعی بر آن بوده که تمام تعاریف و قضایای ابتدایی لازم به همراه مثال‌هایی ذکر شوند و در سراسر این مقاله فرض شود R یک حلقه جابجایی و یکدار با عضو همانی باشد.

تعریف ۱.۱.

فرض کنید R حلقه یکدار باشد و M را همراه با عمل جمع $+ : M \times M \longrightarrow M$ و ضرب اسکالر $. : R \times M \longrightarrow M$، R—مدول چپ می‌نامیم اگر

(۱) $(M, +)$ گروهی آبلی باشد.

(۲) به ازای هر دو عضو از M مثل x, y و هر عضو از R مثل r داشته باشیم: $r(x+y) = rx + ry$.

(۳) به ازای هر عضو از M مثل x و هر دو عضو از R مثل r و s داشته باشیم: $(r+s)x = rx + rs$.

(۴) به ازای هر عضو از M مثل x و هر عضو از R مثل r, s داشته باشیم: $(rs)x = r(sx)$.

(۵) به ازای هر عضو از M مانند x، داشته باشیم: $1x = x$

مانند تعریف R—مدول چپ، R—مدول راست براحتی تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۱.

فرض کنیم M، یک R—مدول و N زیر مجموعه‌ای ناتهی از M باشد. می‌گوییم N زیر مدول M است و می‌نویسیم $N \leq M$، اگر تحدید عمل جمع M به $N \times N$ و تحدید ضرب

در اسکالر M به $R\times N$ به ترتیب عمل جمع روی N و ضرب در اسکالر روی N به وجود آورد و به‌علاوه N، با این عمل جمع و ضرب در اسکالر، R—مدول باشد.

تعریف ۳.۱.

فرض کنید M، R—مدول باشد و N زیرمجموعه‌ای ناتهی از M. اگر به ازای هر دو عضو از N مثل x,y و هر عضو از R مثل r، $x+y\in N$ و $rx\in N$، آنگاه N زیر مدولی از M خواهد بود.

مثال ۴.۱.

فرض کنید $(G;+)$ گروهی آبلی باشد. گروه G به طور طبیعی به ضرب در اسکالر مجهز است. در اینجا اسکالرها، اعداد صحیح هستند. در واقع $\circ : Z\times G \longrightarrow G$ با تعریف $n.g := ng$ ضرب در اسکالر ذکر شده است که در آن ng معنی متداول خود در نظریه گروه‌ها دارد. براحتی می‌توان بررسی کرد که G به عنوان Z—مدول تبدیل می‌شود و در نتیجه، هر گروه آبلی به طور طبیعی ساختار Z—مدولی دارد.

قضیه ۵.۱.

اگر R یک حلقه و I یک ایده‌آل از R و M یک Rـمدول متناهی تولید شده باشد آنگاه اگر

$$IM = M$$

برای بعضی $y\in I$ داریم:

$$(۱+y)M=\circ$$

برهان :

به قضیه ۷۶ از مرجع [۱۴] مراجعه شود.

تعریف ۱.۶.

فرض کنیم M به عنوان R—مدول باشد. M را ضربی می‌نامند هر گاه هر زیر مدول از آن را بتوان به صورت IM نوشت که در آن I ایده‌آلی از R است.

مثال ۱.۷.

اگر Z را به عنوان Z—مدول در نظر گرفته شود، آنگاه چون زیر مدول‌های Z به صورت kZ ها هستند، پس Z به عنوان Z—مدول ضربی است.

تعریف ۱.۸.

اگر N و P دو زیر مدول از R—مدول M باشند، آنگاه $[N : P]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[N : P] = \{x \in R \mid xP \subseteq N\}$$

براحتی می‌توان نشان داد که $[N : P]$ یک ایده‌آل حلقه R است. در حالت خاص اگر $N = ۰$ باشد، $[۰ : P]$ را با $Ann(P)$ نشان می‌دهند، لذا

$$Ann(M) = [۰ : M] \quad .$$

تعریف ۱.۹.

فرض کنیم M یک R—مدول باشد، آنگاه M را باوفا گویند هر گاه $Ann(M) = ۰$ باشد.

لم ۱.۱۰.

اگر M یک Rـمدول باشد،آنگاه M ضربی است اگر و تنها اگر برای هر زیر مدول N از M داشته باشیم:

$$N = [N : M]M$$

برهان :

فرض کنیم که R—مدول M ضربی باشد، پس برای هر زیر مدول از M مانند N، ایده‌آلی از R مانند I وجود دارد به طوری که $N = IM$ است. چون $I \subseteq [N : M]$ است و

$$N = IM \subseteq [N : M]M \subseteq N$$

بنابراین

$$N = [N : M]M$$

عکس قضیه واضح است.

تعریف ۱.۱۱.

فرض کنیم که P، R—مدول باشد. P را تصویری گوییم هر گاه به ازای هر دنباله دقیق کوتاه از R—همریختی‌ها مثل

$$\circ \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} K \longrightarrow \circ$$

دنباله

$$\circ \longrightarrow Hom(P, M) \xrightarrow{\overline{\varphi}} Hom(P, N) \xrightarrow{\overline{\psi}} Hom(P, K) \longrightarrow \circ$$

یک دنباله دقیق کوتاه از Z—همریختی‌ها باشد.

قضیه ۱.۱۲.

فرض کنید R یک حلقه بوده و A, B, C سه R—مدول باشند. اگر

$$\circ \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \circ$$

یک دنباله دقیق کوتاه باشد، در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

(۱) R—همریختی $h : C \longrightarrow B$ وجود دارد به طوری که $gh = ۱_C$.

(۲) R—همریختی $k : B \longrightarrow A$ وجود دارد به طوری که $kf = ۱_A$.

برهان :

به قضیه ۳.۲ ، از مرجع [۱۱] مراجعه شود.

تعریف ۱.۱۳.

گوییم دقیق کوتاه $\circ \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \circ$ شکافته شده است یا شکافته می‌شود، هر گاه یکی از شرایط قضیه قبل برقرار باشد.

قضیه ۱.۱۴.

فرض کنیم $M, M_۱, M_۲$، R—مدول باشند. در این صورت دنباله دقیق کوتاه

$$\circ \longrightarrow M_۱ \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M_۲ \longrightarrow \circ$$

شکافته می‌شود، اگر وتنها اگر زیر مدولی مثل N از M موجود باشد به طوری که

$$M = \varphi(M_{۱}) \oplus N$$

برهان :

به قضیه ۴.۵ ، مرجع [۱۱] مراجعه شود.

قضیه ۱.۱۵.

شرایط زیر معادلند:

(۱) P، R—مدولی تصویری است.

(۲) هر دنباله دقیق کوتاه مثل $۰ \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} P \longrightarrow ۰$ شکافته می‌شود.

برهان :

به قضیه ۱۰.۵ ، از مرجع [۱۱] مراجعه شود .

تعریف ۱.۱۶.

مجموعه S را بسته ضربی گویند هر گاه:

(۱) $\quad ۱ \in S$

(۲) $\quad ۰ \notin S$

(۳) $\forall x, y \in S \Longrightarrow x, y \in S$

مثال ۱۷.۱.

(۱) اعداد طبیعی N زیر مجموعه‌های بسته ضربی اعداد صحیح Z است.

(۲) مجموعه یکه‌های حلقه R یک زیر مجموعه بسته ضربی است .

(۳) اگر I یک ایده‌آل حلقه R باشد، آنگاه مجموعه $S = 1 + I$ یک زیر مجموعه بسته ضربی حلقه R است.

تعریف ۱۸.۱.
اگر S یک زیر مجموعه بسته ضربی باشد و M یک R–مدول باشد و P یک ایده‌آل اول از R باشد و $S = R - P$، آنگاه:

$$S^{-1}M = \{\frac{m}{s} \mid m \in M \quad , \quad s \in S\}$$

اگر در $S^{-1}M$ عمل جمع را با

$$\frac{m_1}{s_1} + \frac{m_2}{s_2} = \frac{m_1 s_2 + m_2 s_1}{s_1 s_2}$$

و ضرب را با

$$\frac{r}{s} . \frac{m}{s'} = \frac{rm}{ss'}$$

تعریف می‌کنیم، آنگاه $S^{-1}M$ تبدیل به $S^{-1}R$– مدول خواهد شد.

تعریف ۱.۱۹.

اگر P یک ایده‌آل اول باشد و $S = R - P$، آنگاه $S^{-1}M$ را با M_P نشان می‌دهند.

تعریف ۱.۲۰.

فرض کنیم M، R—مدول باشد. آنگاه M را موضعا دوری گویند هر گاه M_P دوری باشد.

قضیه ۱.۲۱.

فرض کنید M یک R—مدول باشد. در این صورت گزاره‌های زیر با هم معادلند:

(۱) $M = 0$.

(۲) برای هر ایده‌آل اول P از R، $M_P = 0$ است.

(۳) برای هر ایده‌آل ماکسیمال m از R، M_m است.

برهان :

(۱)$\Longleftarrow$ (۲) $\Longleftarrow$ (۳)، بدیهی است.

حال (۳) $\Longleftarrow$ (۱)، فرض کنید $M \neq 0$، دراینصورت وجود دارد $0 \neq x \in M$ به طوریکه $ann(x) \subseteq R$. در نتیجه ایده‌آل ماکسیمالی مانند m هست به طوری که $ann(x) \subseteq m$. پس در M_m داریم $\frac{x}{1}$، زیرا در غیر اینصورت $t \in S = R - m$ وجود داردبه قسمی که $tx = 0$، بنابراین $t \in ann(x)$ که این تناقض با $ann(x) \subseteq m$ لذا $M_m \neq 0$.

قضیه ۱.۲۲.

فرض کنیم M یک R—مدول باشد. M ضربی است اگر و تنها اگر برای هر ایده‌آل ماکسیمال P از R، $M_P = 0$ یا M موضعا دوری باشد و $[N : M]_P = [N_P : M_P]$.

برهان :

به قضیه ۴.۱ از مرجع [٦] مراجعه شود.

قضیه ۲۳.۱.

اگر R یک حلقه و M یک Rـمدول باشد آنگاه اگر M دوری باشد، ضربی است.

برهان:

فرض شود M دوری باشد، در اینصورت $M = Rm$. اگر N یک زیر مدول M باشد آنگاه برای هر $x \in N \subseteq M$، $r \in R$ موجود است به طوریکه:

$$x = rm$$

اما چون M دوری است پس $r \in [N : M]$ (زیرا برای هر $sm \in M$ که در آن $s \in R$، $r(sm) = s(rm) = sx \in N$).

بنابراین

$$N \subseteq [N : M]M$$

از طرفی واضح است که

$$[N : M]M \subseteq N$$

در نتیجه

$$[N : M]M = N$$

بنابراین M ضربی است.

قضیه ۱.۲۴.

اگر M یک Rـمدول ضربی متناهی تولید شده و با وفا باشد آنگاه برای هر زیرمدول N از M و یک ایده‌آل I از R داریم

$$I[N:M]=[IN:M]$$

برهان :

فرض کنید $x\in I[N:M]$ در نتیجه

$$x=\sum_{i=1}^{\infty} r_i s_i$$

جائیکه $s_i\in[N:M] \quad \& \quad r_i\in I$ اکنون اگر $m\in M$ آنگاه:

$$xm=\sum_{i=1}^{\infty} r_i s_i m$$

که $S_i m\in N \quad \& \quad r_i\in I$ بنابراین $xm\subseteq IN$ و در نتیجه

$$x\in[IN:M]$$

پس

$$I[N:M]\subseteq[IN:M]$$

بالعکس، چون M ضربی است بنابراین M_P دوری است، اگر

$$\frac{s}{1}\in[IN:M]_P=[I_PN_P:M_P]$$

آنگاه:

$$\frac{s}{1}\frac{m}{t}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{r_i}{1}\frac{s_i}{1}\frac{m}{t}$$

در نتیجه

$$(\frac{s}{1} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{r_i}{1}\frac{s_i}{1})\frac{m}{t} = 0$$

بنابراین $\frac{s}{1} \in I_P[N:M]_P$ در نتیجه $s \in I[N:M]$ یعنی $[IN:M] \subseteq I[N:M]$ پس

$$I[N:M] = [IN:M]$$

و برهان تمام می شود.

تعریف ۲۵.۱.

اگر M یک Rـمدول باشد منظور از $\theta(M)$ یک ایده‌آل از R می باشد که به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$\theta(M) = \sum_{m\in M}[Rm:M]$$

قضیه ۲۶.۱.

اگر M یک Rـمدول ضربی باشد داریم :

$$M = \theta(M)M$$

برهان :

باتوجه به ضربی بودن M برای $x \in M$ داریم:

$$Rx = M[Rx:M]$$

در نتیجه داریم :

$$M = \sum_{x\in M} Rx = \sum_{x\in M} M[Rx:M] = M\sum_{x\in M}[Rx:M] = M\theta(M)$$