بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه شیخ بهایی

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی مالی

پوشش زمان گسسته اختیارمعامله آمریکایی

پژوهشگر

مهسا حبیبی

استاد راهنما

دکتر افشین پرورده

دی ۱۳۹۱

باسمه تعالی

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم تحقیقات و فناوری

دانشگـــــــاه شیـــــخ بهائی

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی مالی خانم مهسا حبیبی

تحت عنوان

پوشش زمان گسسته اختیار معامله آمریکایی

در تاریخ ...۹۱/۱۰/۶...... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ..بسیار خوب.. به تصویب نهائی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر افشین پرورده	با مرتبه علمی استادیار	امضاء
۳- استاد داور داخل گروه	دکتر مریم هاشمی	با مرتبه علمی استادیار	امضاء
٤- استاد داور خارج گروه	دکتر محمد تقی جهاندیده	با مرتبه علمی استادیار	امضاء

دکتر سید محمدحسن فیض

مدیر تحصیلات تکمیلی

باسمه تعالی

اقرارنامه

اینجانب **مهسا حبیبی** به شماره دانشجویی **۸۸۱۵۱۰۸** دانشجوی رشته **ریاضی مالی** که پایان‌نامه خود تحت عنوان:

پوشش زمان گسسته ی اختیار معامله آمریکایی

را نوشته و برای دفاع آماده کرده‌ام اعلام می‌نمایم که محتوا و نوشته‌های این پایان‌نامه متعلق به خودم بوده و هیچ قسمت از آن به طور مستقیم یا غیرمستقیم کپی و یا برگرفته از کار دیگران خارج از ضوابط متعارف نگارش پایان‌نامه نمی‌باشد. اینجانب نیز آگاهم که در صورتی که خلاف موضوع فوق‌الذکر در هر زمان و به هر طریق اثبات گردد از کلیه امتیازات مکتسبه از این پایان‌نامه محروم و ملزم به پذیرش عواقب و مجازات حقوقی ناشی از آن می‌باشم.

نام و نام‌خانوادگی مهسا حبیبی

امضا

تقدیم به

ارواح پاک و آسمانی دایی‌های شهیدم،

سید مهدی حجازی ، سید کاظم حجازی ، سید جعفر حجازی و تمامی آنانی‌که با قطره‌های سرخ خونشان غیرت و آزادگی را به معنا نشستند.

سپاسگزاری

پس از حمد و سپاس خداوندگار حکیم که با لطف بی کران خود آدمی را به زیور عقل آراست، بر خود واجب می‌دانم که مراتب سپاس و امتنان خود را به پیشگاه پدر و مادر عزیزم که تمامی داشته هایم حاصل لطف و ایثار ایشان است و استاد فاضل و دانشمند،

دکتر افشین پرورده

که صبورانه همراهیم نمودند و خردمندانه رهنمودم کردند تا در آنچه می نگارم از اشتباهاتم بکاهم، اعلام دارم، چراکه به‌راستی طبق فرمایش حضرت امام سجّاد علیه السّلام: «هرکه در زندگی راهنمای خردمند نداشته باشد به هلاکت می‌رسد.»

چکیده

امروزه در بازارهای دنیا استفاده از ابزار مشتقه، شامل قراردادهای اختیارمعامله و موارد مشابه، شتاب روزافزونی یافته است. یکی از مهمترین موارد استفاده از قراردادهای اختیارمعامله، پوشش ریسک است، به این مفهوم که بسیاری از سرمایه‌گذاران از طریق این بازارها ریسک خود را پوشش می‌دهند. در این پایان‌نامه به‌طور خاص به پوشش اختیارمعامله‌ی آمریکایی در حالت زمان گسسته پرداخته می‌شود و نشان داده شده می‌شود که از این پوشش می‌توان برای تقریب، در حالت زمان پیوسته استفاده کرد و با محاسبه‌ی خطای حاصل از این تقریب، درستی این ادّعا را تأیید کرد. در میان قیمت‌گذاری قرارداد اختیارمعامله و استفاده از این ابزار برای پوشش ریسک مالی، آن‌چه که مهم به نظر می‌رسد، اثر تلاطم تصادفی ارزش سهام بر اختیارمعامله است. تلاطم سهام با ارزش سهام رابطه‌ی مستقیم دارد، بنابراین با تغییرات تلاطم بلافاصله ارزش سهام تغییر می‌کند و به تبع آن ارزش اختیارمعامله نیز دستخوش تغییر می‌شود. در این پایان‌نامه نشان داده شده است که اگر معامله‌گر در استراتژی‌ای که تعیین کرده است، تلاطم را بیش از مقدار واقعی آن در نظر بگیرد، آن‌گاه ارزش اختیارمعامله نیز بیش از مقدار واقعی آن خواهد شد. این استراتژی معروف به استراتژی ابربازسازی است، که در آن سرمایه‌ی نهایی که تولید می‌شود بیش از جبرانی اختیارمعامله خواهد بود.

واژگان کلیدی: اختیارمعامله آمریکایی، پوشش زمان گسسته، خطای پوشش، تلاطم، ابربازسازی، کاپلینگ، انتشار

فهرست مندرجات

مقدمه

دگرگونی اقتصاد جهانی طیّ دهه‌های اخیر و توسعه اقتصادی، موجب ابداع یا تکامل ابزارهای مالی متعدد گردیده است. علاوه بر گسترش معاملات سنّتی دارایی‌های فیزیکی و مالی، مبادلات ابزار مشتقه شامل قراردادهای آتی[1]، قراردادهای اختیارمعامله[2] و قراردادهای معاوضه‌ای[3] شتاب روز افزونی یافته است. در ادبیات مالی منظور از مشتق، یک ابزار مالی (یا به‌طورساده‌تر، یک توافقی بین دو طرف) است که ارزش آن از ارزش یک دارایی متمایز مانند سهام، ارزهای خارجی و سایر دارایی‌های مالی که دارایی‌های بنیادین یا پایه‌ای گفته می‌شود، گرفته شده است (یا به‌عبارتی مشتق شده است) و تغییرات قیمت هر یک از آن‌ها تابعی از تغییرات قیمت دارایی پایه است. علم مالی به طرّاحی ابزارهای مالی مورد نیاز به کمک ترکیب ابزارهای موجود یا خلق ابزار جدید پاسخگوی نیازهای فعّالان اقتصادی در پوشش خطر و آربیتراژ بوده است و در این راستا کارشناسان مالی حد و مرزی برای توسعه و تنوّع مدل‌ها و الگوهای خود قائل نیستند. یکی از مسائل مهم علوم مالی، قیمت‌گذاری اختیارهای‌معامله است، که در این پایان‌نامه حلّ مسأله‌ی ارزش‌گذاری اختیارمعامله‌ی آمریکایی در بازارهای کامل و همچنین پوشش این اختیارمعامله در بازار کامل مطرح می‌شود. مفهوم اساسی که در قیمت‌گذاری اختیارهای‌معامله پدیدار می‌گردد، حرکت براونی[4] است. این حرکت نقش اساسی در نظریه‌ی احتمال، نظریه‌ی فرآیندهای تصادفی، علوم مالی و غیره دارد.

حرکت براونی نامی است که به فرآیند حرکت نامنظّم گرده‌ی گیاهان که در آب معلّق هستند داده شده است. رابرت براون گیاه‌شناس اسکاتلندی اوّلین بار در سال ۱۸۲۸ با مشاهده‌ی این حرکت، متوجّه اهمیّت آن در مطالعه‌ی ذرّات معلّق میکروسکوپی شد. پس از آن، دامنه‌ی کاربرد حرکت براونی از مطالعه‌ی ذرّات معلّق میکروسکوپی بسیار فراتر رفت و اکنون شامل قیمت‌های سهام، احتمالات تصادفی در سیستم‌های اقتصادی و مدیریّت و غیره شده‌است. حرکت براونی یک فرآیند تصادفی است، یعنی خانواده‌ای از متغیّرهای تصادفی که با مجموعه‌ی اعداد حقیقی نامنفی اندیس‌گذاری شده است و همگی روی یک فضای احتمال مشترک تعریف شده‌اند.

[1] Futures
[2] Options
[3] Swaps
[4] Brownian

به زبان دیگر می‌توان فرآیند تصادفی را یک تابع دو متغیّره انگاشت به‌طوری که به‌ازای هر زمان ثابت نسبت به متغیّر دیگر که از فضای احتمال انتخاب می‌شود، اندازه‌پذیر است. با ثابت نگه داشتن نقطه‌ی نمونه‌ای، مسیرهای فرآیند به عنوان تابعی از زمان به‌دست می‌آیند.این فرآیند دارای خاصیّت مارکف، گاوسی، مارتینگلی، با نموهای ایستا و مستقل است. همچنین دارای مسیرهای پیوسته‌ای است که در هیچ نقطه‌ای مشتق ندارد. [۲]

بشیله[۵] (۱۹۰۰) حرکت براونی را برای مدل ارزش سهام معرّفی کرد. امّا آبزورن[۶] (۱۹۵۹) مدل بشیله را با در نظر گرفتن حرکت براونی نمایی[۷]، به عنوان مدل ارزش سهام[۸]، تصحیح کرد. البتّه در روشی پایه‌ای‌تر، حرکت براونی نمایی (هندسی)، به عنوان ارزش سهام توسّط ساموئلسون[۹] در سال ۱۹٦۵ نیز پیشنهاد شد. [۲]

اعمال قرارداد اختیارمعامله روی دارایی تعهّد شده که در این پایان‌نامه مورد بحث قرار خواهد گرفت، اختیاری است و به عنوان ابزاری کامل در اختیار متخصّصین مالی می‌باشد. البتّه استفاده از آن در مقایسه با بعضی ابزارهای مالی دیگر هزینه‌ی بیشتری دارد. عامل اختیار، در برخی از ابزارهای مالی وجود دارد، از جمله اوراق قرضه‌ی قابل تبدیل، که دارنده‌ی آن‌ها می‌تواند در صورت تمایل قرضه‌ی خود را به سهام تبدیل کند. همچنین سهام قابل بازخرید و اوراق قرضه‌ی قابل بازخرید، به منتشر کننده این اختیار را می‌دهند تا در صورت تمایل نسبت به بازخرید سهام یا اوراق قرضه‌ی منتشر شده اقدام کند. اختیارمعامله نیز به دارنده، اختیار انجام معامله را در تاریخ سررسید یا تا تاریخ سررسید می‌دهد. بنابراین این گونه ابزارها برای دارنده‌ی اختیار، حق ایجاد می‌کند و تعهّد انجام معامله‌ای را برای او ایجاد نمی‌کند.

تاریخچه‌ی استفاده از این ابزار به دهه‌ی ۱۹۷۰ و اوایل دهه‌ی ۱۹۸۰ برمی‌گردد. امروزه قرارداد اختیارمعامله برای سهام، اوراق قرضه، ارز، کالا و حتّی شاخص‌های سهام مورد معامله، به‌کار می‌رود. این ابزار در بسیاری از بورس‌های نظام یافته و بازارهای خارج از بورس در سطح جهان معامله می‌شوند و حتی در بسیاری از بورس‌ها،

[5] Bachelier
[6] Obsorne
[7] Exponential Brownian motion
[8] Option Pricing Model
[9] Samuelson

حجم معاملات اختیارمعامله از حجم معاملات سهام نیز بیشتر می‌شود. [٤] در فصل اوّل تعریف کاملی از اختیارمعامله و انواع آن بیان می‌شود.

اوّلین معاملات اختیار خرید و اختیار فروش، در اروپا و آمریکا در اوایل قرن ۱۸ صورت گرفت. بعد از مدتی، یعنی سال‌های ۲۰۱۱ و ۲۰۱۲، به علّت رواج فساد و رشوه‌خواری، این بازارها شهرت خوب خود را ازدست دادند. برای مثال، یک شرکت، ((اوراق اختیارمعامله)) سهام خود را به عنوان هدیه (رشوه) به کارگزاران می‌داد، تا در قبال آن کارگزاران به مشتریان خود، خرید آن سهم را پیشنهاد دهند. در اوایل دهه‌ی ۱۹۹۰، گروهی از شرکت‌ها که خود را ((انجمن کارگزاران و معامله‌گران اختیار خرید و اختیار فروش)) معرّفی می‌کردند، برای ایجاد یک بازار اختیارمعامله اقدام نمودند. هدف این انجمن گردهم آوردن خریداران و فروشندگان در کنار یکدیگر بود. اگر سرمایه‌گذاری قصد خرید یک اختیارمعامله را داشت، بایستی با یکی از اعضای انجمن تماس می‌گرفت تا او یک فروشنده را که قصد فروش اختیار مذکور را دارد، پیدا کند. اگر عضو مذکور نمی‌توانست یک فروشنده پیدا کند، خود شرکت برای فروش اختیارمعامله مذکور اقدام می‌کرد. اگرچه این بازار اختیارمعامله‌ی فرابورس (otc)[10]به حیات خود ادامه می‌داد، ولی چند نقص و ناکارایی در آن وجود داشت: اوّل این‌که بازار فوق به دارنده‌ی اختیارمعامله این امکان را نمی‌داد که آن را قبل از انقضای مهلت اختیارمعامله به شخص دیگری واگذار نماید، به عبارت دیگر از بازار ثانویه‌ی فعّالی برخوردار نبود. دوّمین اشکال این بود که سازوکاری برای تضمین اجرای تعهّد فروشنده‌ی اختیارمعامله وجود نداشت و در صورت عدم انجام تعهّدات از طرف صادر کننده‌ی اختیارمعامله، خریدار هزینه‌های زیادی جهت اقامه‌ی دعوای حقوقی پرداخت می‌کرد.

معاملات اختیار در بازارهای مختلف، به گونه‌های متفاوتی انجام می‌شود. برگه‌های اختیارمعاملات مانند سایر ابزارهای مالی در برخی از بازارهای بورس مورد معامله قرار می‌گیرند. این بازارها، بورس معاملات اختیار نامیده می‌شوند. تعدادی از برگه‌های اختیارمعامله در بازارهای خارج از بورس هم معامله می‌شوند. این نوع اختیار تحت عنوان اختیار بازار خارج از بورس نامیده می‌شوند. یکی از معروفترین بازارهای بورس اختیارمعامله، گروه اختیار معامله بورس شیکاگو (CBOE)[11] می‌باشد. این بورس در سال ۱۹۷۳ به عنوان اوّلین بورس اختیارمعامله در بازار

[10] Over The Counter Market
[11] Chicago Board Options Exchange

مالی آمریکا شروع به کار کرد. دارا بودن اختیار خرید یا اختیار فروش، با هر شرایطی دارای ریسک می‌باشد. پرداخت بهای اختیار نیز برای دارنده‌ی اختیار، شرایط همراه با ریسک را به‌وجود می‌آورد. در این حالت ترکیب اختیار خرید و اختیار فروش بر اساس انتظارات از شرایط آتی اقتصاد، می‌تواند ریسک اختیارمعامله را کاهش دهد. در حقیقت خریدار یا فروشنده وضعیت آتی اقتصادی را پیش‌بینی می‌کند و بر اساس آن استراتژی خاصی را برمی‌گزینند. بنابراین در این مسیر کسی موفّق‌تر خواهد بود که بتواند برآورد صحیح‌تری از آینده داشته باشد. بازار اختیارمعامله در سال‌های اخیر رشد زیادی داشته است و سرمایه‌گذاران برای رسیدن به اهداف متفاوت خود، استفاده‌ی زیادی از این ابزار می‌برند. این ابزار به‌راحتی ریسک سرمایه‌گذاری‌ها را بین داوطلبان دریافت ریسک و دارنده‌ی دارایی توزیع می‌کند. بورس‌بازان نیز بر اساس اطّلاعات از قیمت‌های آتی در این بازار مشارکت دارند.

یکی از مهم‌ترین مواردی که از اختیارمعامله استفاده می‌شود، پوشش ریسک است. این ابزار مالی، سال‌ها در بازار کالا مورد توجّه سرمایه‌گذاران قرار گرفته است، به‌طوری‌که بسیاری از سرمایه‌گذاران از طریق این بازارها ریسک خود را پوشش داده‌اند. همچنین از این ابزار در طول دو دهه‌ی اخیر برای پوشش ریسک مالی استفاده شده است. بنابراین به‌طور خلاصه می‌توان گفت که یکی از مهمترین موارد استفاده‌ی اختیارمعامله، پوشش ریسک مالی می‌باشد که این ابزار، ارزش دارایی را در قبال نوسانات مالی بیمه می‌کند. با توجّه به توضیحات فوق می‌توان موارد استفاده‌ی اختیارمعامله را به‌صورت زیر خلاصه کرد:

۱. پوشش ریسک مالی.

۲. استفاده از این ابزار برای حداکثر کردن منافع و بازدهی هنگام تغییر قیمت‌ها.

۳. آربیتراژ، استفاده از اختلاف قیمت‌ها در بازارهای مختلف و استفاده از این ابزار برای ایجاد دارایی‌های بدون ریسک.

٤. ایجاد درآمد از طریق واگذاری اختیارمعامله.

در این میان قیمت‌گذاری اختیارمعامله یکی از مباحث مهم علم مالی می‌باشد که درک مفاهیم آن می‌تواند بخشی از کارکردها و حوزه‌ی فعّالیت علم مالی را نیز تعیین کند. در سال ۱۹۷۳ فیشر بلک و مایرون شولز[۱۲] مدلی برای قیمت‌گذاری اختیارمعامله ارائه دادند که به سرعت مورد پذیرش محافل علمی و حرفه‌ای قرار گرفت، به‌طوری‌که امروزه این روش در کنار سایر روش‌های ارزش‌گذاری، به عنوان متداولترین شیوه مورد استفاده قرار می‌گیرد. علاوه بر آن در اکثر کتبی که در خصوص مالی و خصوصاً مدیریّت ریسک نگاشته شده است، نام مدل بلک شولز و توضیح روش او به چشم می‌خورد. [٤]

در این میان پژوهشگران دیگری نیز دست به فعالیّت‌هایی در زمینه‌ی ارزش‌گذاری اختیارمعامله (آمریکایی، اروپایی) زده‌اند و چندین روش تقریب، برای محاسبه‌ی تابع ارزش اختیارمعامله آمریکایی را مطرح کرده‌اند، به‌خصوص روش‌های تفاضل متناهی که توسط گلوینسکی[۱۳]، لیونز[۱٤] و ترمیولیر[۱۵] در سال ۱۹۸۱، [۲٦] و همچنین ویلموت[۱٦]،دیون[۱۷] و هوزن[۱۸] در سال ۱۹۹۳، [۵۰]، و ژولیت[۱۹]، لامبرتون[۲۰] و لاپیر[۲۱] در سال ۱۹۹۰، [۳۱]، مطرح شده است. روش تقریب یکنواخت هم توسط ژاکوبسن[۲۲] در سال ۲۰۰۳ ارائه شده است.

همچنین پژوهشگرانی چون ال‌کاروی[۲۳] در سال ۱۹۹٦، [۱۸]، و همچنین برگمن[۲٤]، گروندی[۲۵] و وینر[۲٦] در سال ۱۹۹٦، [۱۲]، در خصوص ارزش‌گذاری اختیار معامله با استفاده از کاپلینگ و یکنوایی ارزش‌گذاری اختیارمعامله پژوهش‌های گسترده‌ای انجام داده‌اند، که می‌توان از آن‌ها به عنوان منابع مهمّی در این پژوهش ذکر کرد.

[12] black and schools
[13] Glowinski
[14] Lions
[15] Tremolieres
[16] Wilmott
[17]Dewynne
[18] Howison
[19] Jaiilet
[20] Lamberton
[21] Lapeyre
[22] Jakobsen
[23] El Karoui
[24] Bergman
[25] Grundy
[26] Wiener

به عنوان مثال ال‌کاروی در سال ۱۹۹۶ سهامی که تلاطم آن نامشخّص و تصادفی است را در نظر گرفته است و با علم به این‌که اگر تلاطم این سهام تابعی از زمان و قیمت سهام باشد، می‌تواند موجب تشخیص نادرست تلاطم گردد، فرض را بر این نهاده است که تلاطم این سهام تابعی از زمان و قیمت سهام است. با این وجود، اگر تشخیص نادرست تلاطم بر تلاطم واقعی سهام برتری یابد، ارزشی که بر اساس این تشخیص نادرست به‌دست می‌آید نیز از ارزش واقعی آن پیشی خواهد گرفت. به‌علاوه استراتژی پوششی اختیار معامله که تحت این فرضیه محاسبه می‌شود نیز بر ارزش اختیارمعامله تحت تلاطم واقعی برتری می‌یابد.

در این پایان‌نامه ابتدا در فصل اوّل به‌طور خلاصه برخی از تعاریف و مفاهیم کلّی تصادفی و مالی مورد نیاز، ذکر شده اند. سپس در فصل دوّم به بررسی انتگرال تصادفی و برخی خصوصیّات آن پرداخته می‌شود. در فصل سوّم بر اساس پژوهشی از دیوید هوبسون[27] در سال ۱۹۹۸، [۲۹]، اثر تلاطم تصادفی بر روی ارزش اختیارمعامله بررسی می‌شود. همچنین در این فصل خواننده با ویژگی‌های ابربازسازی و یکنوایی ارزش‌گذاری اختیارمعامله آشنا می‌شود. در ادامه‌ی این فصل با اثبات قضایایی نشان داده می‌شود که ارزش اختیارمعامله (آمریکایی و اروپایی) تابع محدّبی از ارزش دارایی بنیادین می‌باشد.

در انتها و در فصل چهارم که براساس پژوهشی از شاشیاش‌ویلی[28] در سال ۲۰۱۰، [۴۵]، است، پوشش زمان گسسته‌ی اختیارمعامله‌ی آمریکایی مورد بررسی قرار می‌گیرد و با ذکر خواصّی از تابع ارزش اختیارمعامله‌ی آمریکایی، اثبات قضایایی مطرح می‌شود که می‌توان به کمک آن‌ها، خطای پوشش زمان گسسته‌ی این اختیارمعامله را تخمین زد .

[27] Hobson
[28] Shashiashvili

فصل ۱: کلیات و پیش نیازها

۱.۱ مفاهیم آماری و تصادفی

در طول این پایان‌نامه، یک فضای اندازه احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ همراه با پالایه[۲۹]ی $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$، مطرح است. شایان ذکر است که منظور از پالایه، خانواده‌ای از زیرسیگما میدان‌های صعودی $\mathcal{F}$، $(\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, s \leq t)\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ است. بعد از این فضای اندازه احتمال پالایه شده، توسّط $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ نشان داده می‌شود. در واقع $\mathbb{F}$ جریان اطّلاعات، طیّ زمان را نشان می‌دهد و $\mathcal{F}_t$ را می‌توان اطّلاعات پدیده‌ی تصادفی تا زمان t تعبیر کرد.

تعریف ۱.۱.۱: فضای اندازه احتمال پالایه شده‌ی $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ در شرایط معمول[۳۰] صدق می‌کند، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

۱. تمامی اعضای $\mathcal{F}$ که دارای اندازه‌ی صفر هستند، به $\mathcal{F}_0$ متعلّق باشند.

[29] Filtration
[30] Usual Hypotheses

۲. پالایه‌ی $\mathcal{F}$ از راست پیوسته (برای هر $t \geq 0$, $\mathcal{F}_t = \cap_{u>t} \mathcal{F}_u$) باشد. [٤١]

برقراری شرایط معمول برای فضای $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$، بخشی از مفروضات این پایان‌نامه است. $X \in \mathcal{F}_t$ نمادی برای نشان دادن این است که متغیّر تصادفی X، نسبت به سیگما میدان $\mathcal{F}_t$ اندازه‌پذیر است.

تعریف زمان توقف ۱.۱.۲: متغیّر تصادفی $T: \Omega \to [0, \infty]$ زمان توقّف نام دارد، هرگاه به‌ازای هر $t > 0$،

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

باشد. به بیان دیگر از طریق مشاهده‌ی اطّلاعات موجود در $\mathcal{F}_t$، در مورد اتّفاق افتادن پیشامد $\{T \leq t\}$، می‌توان تصمیم‌گیری کرد. [٤١]

فرآیند تصادفی X روی $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ خانواده‌ای از متغیّرهای تصادفی $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ با مقادیری در $\mathbb{R}^d$ روی $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ است. اگر برای تمام مقادیر t، $X_t \in \mathcal{F}_t$ گویند $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ فرآیندی سازگار[31] نسبت به پالایه‌ی $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ است. به پالایه‌ی $\mathbb{F}^X = \{\mathcal{F}_t^X\}_{t \geq 0}$، وقتی که، $\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$، پالایه‌ی طبیعی تولید شده توسّط X گویند. این پالایه کوچک‌ترین پالایه‌ای است که X نسبت به آن سازگار است.

تعریف مسیرنمونه‌ای ۱.۱.۳: برای ω ثابت و متعلّق به Ω، تابع $[0, \infty) \to \mathbb{R}^d: t \mapsto X_t(\omega)$، مسیر نمونه‌ای (برای سادگی مسیر) فرآیند نام دارد. [٤١]

نکته ۱.۱.٤: فرآیند تصادفی X مسیرهای از راست پیوسته و دارای حدّ چپ دارد و به اختصار می‌نویسند فرآیند RCLL[32] است، هرگاه Ω_0، متعلّق به $\mathcal{F}$، به‌گونه‌ای وجود داشته باشد که $P(\Omega_0) = 1$ و برای $\omega \in \Omega$، مسیر $X_t(\omega)$ برای $t \geq 0$ از راست پیوسته و برای $t > 0$ دارای حدّ چپ متناهی باشد.حدّ چپ X در زمان t به‌صورت X_{t^-} نشان داده می‌شود و $\Delta X_t = X_t - X_{t^-}$ نشان دهنده‌ی مقدار پرش فرآیند در زمان t است. از نماد $\mathbb{D}$ برای نمایش فضای تمامی فرآیندهای سازگار و RCLL استفاده می‌شود. فضای فرآیندهای سازگار و RCLL با $\mathbb{L}$ نشان داده می‌شود.

[31] Adapted
[32] Right Continuous With Left Limit

یکی از فرآیندهای تصادفی مهم، فرآیند حرکت براونی و یا وینر است، که از فرآیندهای پیوسته حالت و پیوسته زمان است و در این پایان‌نامه از آن مکرّر نام برده می‌شود. می‌توان گفت که خصوصیّت بارز این حرکت سازگاری آن از لحاظ فیزیکی با دنیای واقعی است. این فرآیند به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف حرکت براونی ۱.۱.۵: اگر $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال باشد و $T = [0, \infty)$، آن‌گاه فرآیند تصادفی $B = \{B_t\}_{t \in T}$ را حرکت براونی یا فرآیند وینر می‌نامند، هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

۱. این فرآیند از صفر شروع شود یعنی $B_0 \equiv 0$.

۲. نموهای آن مانا و مستقل از هم باشند (یعنی برای هر $t \in T$ و هر $h \in \mathbb{R}$، $B_t - B_s \triangleq B_{t+h} - B_{s+h}$ و برای هر انتخاب $\{t_i\}_{i=1}^{n}$ از T با $n \geq 1$، $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$، متغیّرهای تصادفی $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ مستقل از یکدیگر باشند.)

۳. برای هر $t \in T$، B_t دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $\sigma^2 t$ باشد، یعنی $B_t \sim N(0, \sigma^2 t)$

٤. برای هر $\omega \in \Omega$، $B_t(\omega)$ در سراسر T پیوسته باشد.

این شرایط نشان می‌دهد که:

الف) برای هر $t, s \in T$ با $t > s$، $B_t - B_s \sim N\big(0, \sigma^2(t-s)\big)$

ب) برای هر $t, s \in T$، $\mathbb{E}(B_t) = 0, \operatorname{cov}(B_t, B_s) = \sigma^2 \min(s,t)$.

اگر $\sigma = 1$، آن‌گاه $\{B_t\}_{t \geq 0}$ حرکت براونی استاندارد نامیده می‌شود. [۳۲]

مثال ۱.۱.٦: اگر $B = \{B_t\}_{t \in T}$ یک حرکت براونی و $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ پالایه‌ی طبیعی مربوط به آن باشد، آن‌گاه تمام فرآیندهای تصادفی به شکل

$$X_t = f(t, B_t), \qquad t \geq 0$$

که در آن f تابعی دو متغیّره است، نسبت به پالایه‌ی $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ سازگار هستند. به‌عنوان مثال فرآیندهای $X_t = B_t$ و $Y_t = {B_t}^2 - t$، نسبت به پالایه‌ی $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ سازگار هستند. امّا مثلاً $K_t = B_{t+1}$ این‌طور نیست. چون در حقیقت به‌ازای هر t، $\{K_t\}$ به اطّلاعاتی از حرکت براونی در بعد از لحظه‌ی t نیاز دارد و بنابراین $\{K_t\}$ نمی‌تواند نسبت به پالایه‌ی $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ سازگار باشد.

برای تعریف خاصیّت مارتینگلی فرآیندهای تصادفی، مفهوم امید ریاضی شرطی باید مطرح شود. تعریف آن در ذیل آمده است:

تعریف امید ریاضی شرطی ۱.۱.۷: اگر $(\Omega, \mathcal{F}. \mathbb{P})$ یک فضای احتمال و $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$، سیگما میدان باشد. امید شرطی یک متغیّر تصادفی X به شرط سیگما میدان $\mathcal{G}$ ، یک متغیّر تصادفی Z با دو شرط زیر است:

۱. Z یک متغیّر تصادفی $\mathcal{G}$ -اندازه پذیر $(\sigma(Z) \subseteq \mathcal{G})$ و انتگرال‌پذیر باشد.

۲. برای هر $G \in \mathcal{G}$، $\int_G XdP = \int_G ZdP$.

نکته ۱.۱.۸: اگر Y یک متغیّر تصادفی تعریف شده برروی Ω و $\mathcal{G} = \sigma(Y)$، که در آن $\sigma(Y)$ پالایه‌ی طبیعی تولید شده توسّط Y است، آن‌گاه

$$\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$$

و در حالت کلّی، اگر $\{Y_t\}_{t\in T}$ خانواده‌ای از متغیّرهای تصادفی تعریف شده برروی Ω باشد و

$\mathcal{G} = \sigma(Y_t, t \in T)$، در این‌صورت

$$\mathbb{E}(X|Y_t, t \in T) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$$

تعریف متغیّرهای تصادفی وتوزیع به‌طور نامتناهی بخش‌پذیر[۳۳] ۱.۱.۹: متغیّر تصادفی حقیقی مقدار X با تابع توزیع $\mathbb{F}$ را به‌طور نامتناهی بخش‌پذیر گویند، اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ متغیّرهای تصادفی هم‌توزیع و مستقل $X_{n_1}, X_{n_2}, \dots, X_{n_{n-1}}, X_{n_n}$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که

$$X \triangleq X_{n_1} + X_{n_2} + \cdots + X_{n_n}.$$

توزیع‌های گوسین، گاما، α-پایدار و پواسون، نمونه‌هایی از توزیع‌های به‌طور نامتناهی بخش‌پذیر هستند، یعنی متغیّر تصادفی‌ای که یکی از این توزیع‌ها را دارا باشد، می‌تواند به جمع n متغیّر تصادفی هم توزیع مستقل تجزیه شود. برای مثال اگر X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد، آن‌گاه برای هر $n \in \mathbb{N}$، می‌تواند به‌صورت $X = \sum_{k=0}^{n-1} Y_k$ نوشته شود، که Y_kها متغیّرهای تصادفی هم توزیع مستقل هستند،که توزیع نرمال با میانگین $\frac{\mu}{n}$ و واریانس $\frac{\sigma^2}{n}$ دارند. [۱۴]

قضیه (نامساوی جنسن[۳۴] شرطی) ۱.۱.۱۰: اگر $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$، تابع محدّب و X، یک متغیّر تصادفی انتگرال‌پذیر، روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$، طوری باشد که $\varphi(X)$ انتگرال‌پذیر شود، آن‌گاه، برای هر زیرسیگما میدان $\mathcal{G}$ در $\mathcal{F}$، با احتمال یک:

$$\varphi(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})) \leq \mathbb{E}(\varphi(X)|\mathcal{G}).$$ [۴۱]

حال می‌توان با توجّه به تعاریف بالا خاصیّت مارتینگلی فرآیندهای تصادفی را تعریف کرد:

۱.۱.۱ مارتینگل‌ها:

در این‌جا فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$، مجهّز به پالایه‌ی (جریان اطّلاعات) $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ که $T = \mathbb{N}_0$ یا $T = \mathbb{R}_+$ است، مورد توجّه قرار می‌گیرد.

تعریف مارتینگل[۳۵] ۱.۱.۱۱:

33 Infinitely Divisible
34 Jensen
35 Martingale