وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

نظریه پایان‌های اول
و کاربرد آن در سیستم‌های دینامیکی

پایان نامه کارشناسی ارشد

مهدیه پور حسینی روشن

استاد راهنما: دکتر میثم نصیری

شهریور ۱۳۸۸

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به مادرم

قدردانی و تشکر

خداوند بزرگ را شاکرم که به من توانایی عطا فرمود تا بتوانم این مرحله‌از زندگی ام را با موفقیت پشت سربگذارم از پدر ومادرفداکارم وخواهرعزیزم به خاطرزحمات فراوانشان تشکر می کنم .از استاد ارجمند جناب اقای دکتر نصیری به خاطر زحمات فراوانشان تشکر می کنم. همچنین از اساتید محترم بخش ریاضی سپاسگزاری می کنم .

چکیده

نظریهٔ پایان‌های اول که توسط کاراتئودوری ابداع شد، یک فشرده سازی توپولوژیکی از سطوح است. این نظریه علاوه بر کاربردهای طبیعی در توپولوژی و آنالیز چندین نتیجه عمیق در نظریهٔ سراسری دستگاه‌های دینامیکی از همئمورفیسم‌های سطوح دارد. در این پایان نامه ابتدا پایان‌های اول را با اثباتی از قضیهٔ کاراتئودوری که یک فشرده سازی از مجموعه‌های باز همبند ساده‌در صفحه را با اضافه کردن یک دایره با یک توپولوژی مناسب به ما می‌دهد، معرفی می‌کنیم.

در این پایان نامه چندین مثال از مفهوم پایان‌های اول، بوضوح شرح داده شده است.

سپس چند کاربرد مهم از پایان‌های اول در دستگاه‌های دینامیکی معرفی شده است:

قضیهٔ نقطهٔ ثابت کارترایت— لیتلوود (Cartwright-Littlewood)، قضیهٔ ج . متر(J. Mather) دربارهٔ عدد چرخشی مجموعه‌های باز همبند ساده و ناوردا (یا تناوبی) از وابرریختی‌های سطوح ، خواص سراسری خمینه‌های پایدار و ناپایدار نقاط تناوبی هذلولوی از وابرریختی‌های حافظ سطح رویه‌ها.

فهرست

مقدمه

این پایان نامه از دو بخش اصلی تشکیل شده است، یکی قضایایی در سیستم‌های دینامیکی است که در فصل یک و سه آن را شرح می‌دهیم و دیگری نظریه فشرده سازی پایان‌های اول می‌باشد که در فصل دو به آن می‌پردازیم.

فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و $f:X\to X$ یک نگاشت یک به یک و پوشا باشد. با در نظر گرفتن f به عنوان یک **دستگاه دینامیکی** هدف آن است که رفتار مدار نقاط X را مورد مطالعه قرار دهیم. (تعاریف اولیه در این زمینه در فصل اول ارائه می‌شود). منظور از مدار یک نقطه $x\in X$ دنباله $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ می‌باشد (در اینجا $f^n = f\circ f\circ\cdots\circ f$). یک نقطه را ثابت گوییم اگر $f(x)=x$ و تناوبی گوییم هرگاه $f^k(x)=x$ $(k\geq 1)$.

در نظریه دستگاه‌های دینامیکی یکی از مهم‌ترین مسائل اثبات وجود نقاط ثابت یا تناوبی است. البته قضایای نقطه ثابت در بسیاری از شاخه‌های ریاضی اهمیت فوق‌العاده‌ای دارند. در فصل سوم،اثبات قضیهٔ جالبی درباره نقطه تناوبی از کارت رایت[۱] و لیتل وود[۲] ارائه می‌گردد که در زیر آمده است:

فرض کنید $f:\overline{U}\to\overline{U}$ یک همان‌ریختی است که U یک مجموعهٔ باز و همبند ساده می‌باشد. این قضیه یک شرط کافی برای وجود نقطه تناوبی در مرز U را ارائه می‌دهد. در ادامه به مطالعهٔ مجموعه‌های پایدار و ناپایدار نقاط تناوبی می‌پردازیم. منظور از مجموعه پایدار برای نقطه تناوبی p عبارت است از

$$W^s(p)=\{x|\quad d\big(f^n(x),f^n(p)\big)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\}$$

و مجموعهٔ ناپایدار عبارت است از مجموعهٔ پایدار تحت نگاشت f^{-1}. مجموعهٔ ناپایدار را با $W^u(p)$ نمایش می‌دهیم. در فصل سوم قضیهٔ بسیار مهم زیر از جان‌متر[۳] ارائه و اثبات می‌شود.

قضیه: یک مجموعهٔ چگال $\mathcal{R}$ از وابرریختی‌های یک رویه بسته وجود دارد که برای هر $f\in\mathcal{R}$ و هر نقطهٔ تناوبی p، بستار مجموعه پایدار p با بستار مجموعهٔ ناپایدار p برابر است. به عبارت دیگر $\overline{W^s(p)}=\overline{W^u(p)}$.

---

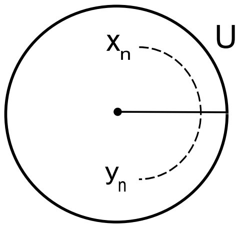
[۱] cartwright

[۲] littlewood

[۳] John Mather

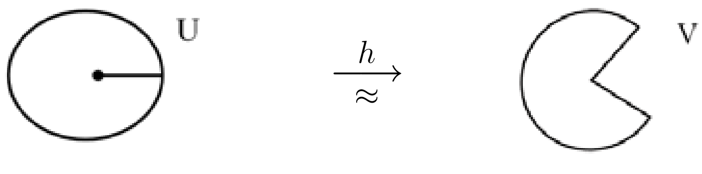
در اثبات هر دو قضیه یاد شده به مفهوم فشرده سازی مجموعه‌های باز به نام فشرده سازی پایان‌های اول احتیاج داریم.

این نظریه به طور کامل در فصل دوم این پایان‌نامه تبیین شده است. ریشه ابداع این نظریه فشرده سازی به مسئلۀ دیگری در آنالیز و توپولوژی باز می‌گردد. یک مسئله کلاسیک در آنالیز و توپولوژی، توسعه پیوسته یک تابع به فضایی بزرگتر می‌باشد. یک مورد پر اهمیت، توسعه پیوسته نگاشت $f : U \to \mathbb{R}^2$ است که U یک ناحیه باز و همبند ساده در $\mathbb{R}^2$ است. این مسئله بر خلاف صورت ساده‌ای که دارد، اما به راحتی می‌توان مثال‌هایی زد که وجود یک توسیع کاملاً غیربدیهی به نظر می‌رسد. مانند مثال زیر



در این مثال ساده نمی‌توان f را به $\overline{U}$ توسعه داد. فقط در صورتی توسعه وجود دارد که اگر هر جفت دنباله $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ (مانند شکل) دارای یک حد باشند، آنگاه $\{f(x_n)\}$ و $\{f(y_n)\}$ دارای حد یکسان هستند. که چنین چیزی در حالت کلی امکان ندارد.

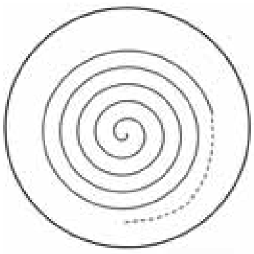
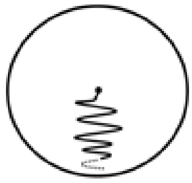
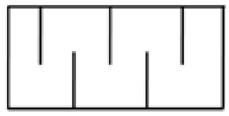
اولین کسی که بطور جدی به این مسئله پرداخت کاراتئودوری بود. او ابتدا در [۲] اثبات کرد هر گاه مرز U یک خم بسته ساده باشد انگاه هر نگاشت همدیس از U به دیسک یکه باز ($\mathbb{D}$) را می‌توان به بستار U بطور پیوسته توسعه داد. (در واقع قضیه نگاشت ریمان را توسعه داد) در ادامه کاراتئودوری به مثال‌هایی مانند مثال قبل مواجه شد که در آن مرز U ساده نبود. ایده کاراتئودوری برای حل همین مثال ساده چنین است:



U با مجموعۀ V هم‌ارز توپولوژیک است (در واقع بطور همدیس هم‌ارز است). در واقع دیاگرام زیر را داریم:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{h} & V \subset \overline{V} \\ f \downarrow & \swarrow & \\ \mathbb{C} & & \end{array}$$

$f\circ h^{-1} : V \to \mathbb{C}$ را به $\overline{V}$ توسعه داد. یعنی $\hat{F} : \overline{V} \to \mathbb{C}$ وجود دارد. از این طریق به نوعی می‌توان به توسعه f از فضای فشرده $\hat{U} := U \cup S^1$ رسید.اما با مجموعه‌های همبند ساده‌ای مانند شکل‌های زیر چه کنیم؟

کاراتئودوری با ابداع مفهوم پایان‌های اول[۴] توانست یک فشرده‌سازی $\hat{U}$ از U را ارائه نماید بطوریکه $\overline{\mathbb{D}} \approx \hat{U} := U \cup S^1$ (دیسک یکه بسته) و هر تابع پیوسته $f : U \to \mathbb{C}$ را بطور طبیعی به $\hat{U}$ توسعه دهد.

[۴] Prime ends

فصل اول

مقدمه

۱.۱ تعاریفی از هندسه، توپولوژی و آنالیز (مختلط)

در این قسمت به یادآوری بعضی مفاهیم اولیه از هندسه، توپولوژی و آنالیز (مختلط) می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱ هر خم بسته ساده را در صفحه خم ژردان گویند.

تعریف ۲.۱ مجموعهٔ U در صفحه را همبند ساده گویند هرگاه درون هر منحنی ژردان در مجموعه قرار گیرد.

تعریف ۳.۱ اگر A یک فضای توپولوژیکی و B یک زیر مجموعه از A باشد، بستار B در A را با $\mathrm{cl}(B;A)$ یا $\mathrm{cl}_A(B)$ نمایش می‌دهیم و مرز B در A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{F}_A B = \mathrm{cl}_A(B) \cap \mathrm{cl}_A(A-B)$$

که $\mathcal{F}_A B$ نقاط حدی B در A است که یک نقطه درونی B نباشد.

تعریف ۴.۱ یک همان ریختی (همئمورفیسم) یا ایزومورفیسم توپولوژیکی یک تابع پیوسته دوسویی بین دو فضای توپولوژیکی است. همان ریختی‌ها در رسته فضاهای توپولوژیکی ایزومورفیسم هستند. در واقع نگاشت‌هایی هستند که خواص توپولوژیکی از یک فضای داده شده را حفظ می‌کنند. دو فضا با یک همان ریختی بین آنها همان ریخت نامیده می‌شوند.

تعریف ۵.۱ یک مجموعهٔ باز، همبند و غیر تهی را در صفحه مختلط $\mathbb{C}$ یک ناحیه گویند.

تعریف ۶.۱ اگر Ω یک ناحیه باشد و $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ و مشتق f در نقطهٔ z_0 عبارت است از $f'(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ هرگاه حد موجود باشد. اگر f' در یک همسایگی z_0 داخل Ω موجود باشد f را در z_0 تحلیلی گوییم و توابع تحلیلی روی Ω را با $H(\Omega)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۷.۱ نگاشت پیوستهٔ f را همدیس گوییم هرگاه حافظ زاویه باشد، یعنی هرگاه برای هر z و هر دو خم هموار γ_1 و γ_2 که بر z رسم می‌شوند و زاویه θ را با یکدیگر می‌سازند. زاویهٔ θ' بین خطوط مماس بر خمهای $f(\gamma_1)$ و $f(\gamma_2)$ مار بر نقطه $f(z)$ که در برد f قرار دارند با زاویه θ برابر باشد. هر نگاشت تحلیلی همدیس است ودو مجموعه باز درصفحه $\mathbb{C}$ را بطور همدیس هم ارز گویند هرگاه یک نگاشت دوسویی تحلیلی بین ان دو وجود داشته باشد.

قضیه ۸.۱ (نگاشت ریمان) هر ناحیه همبند ساده در صفحه (به غیر از خود صفحه) به طور همدیس هم ارز دیسک واحد است.

تعریف ۹.۱ یک کره را کره توپولوژیکی گویند هرگاه همئومورفیک با $\mathbb{S}^2$ باشد به طوری که $\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$.

۲.۱ فضای وابرریختی‌ها

تعریف ۱۰.۱ منظور از یک خمینه m–بعدی زیر مجموعهٔ M از $\mathbb{R}^k$ $(k \geq m)$ است که با توپولوژی القائی از $\mathbb{R}^k$ مجهز شده است. یعنی زیر مجموعه A از M باز است هرگاه مجموعهٔ بازی مانند $\tilde{A}$ در $\mathbb{R}^k$ باشد به طوری که $\tilde{A} \cap M = A$.

همچنین برای هر نقطه p در M همان ریختی $x : U \to \tilde{U}$ از همسایگی باز U از p در M به همسایگی باز $\tilde{U}$ در $\mathbb{R}^m$ موجود است به قسمی که $x^{-1} : \tilde{U} \to U \subset \mathbb{R}^k$ یک ایمرسیون C^∞ باشد یعنی

$$\forall q \in \tilde{U} \qquad dx^{-1}(q) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$$

یک به یک است.

(U, x) را یک نقشه موضعی[۱] حول نقطهٔ p روی M می‌نامند. می‌توان نشان داد که $x : U \to \tilde{U}$ تحدید به یک تابع C^∞ روی بازی در $\mathbb{R}^k$ است. یعنی نگاشت C^∞، $\varphi : \tilde{A} \to \mathbb{R}^m$ برای یک باز $\tilde{A}$ در $\mathbb{R}^k$ موجود است به قسمی که $\varphi|_U = x$.

برهان. برای توضیحات بیشتر به [۱۳] مراجعه کنید. □

تعریف ۱۱.۱ فضای پوششی عام از یک فضای توپولوژیکی همبند X یک فضای همبند ساده Y است با یک نگاشت $f : Y \to X$ به طوری که f یک نگاشت پوششی است.

نگاشت $f : Y \to X$ را یک نگاشت پوششی گوییم هرگاه یک نگاشت پیوسته پوششی باشد یعنی برای هر $x \in X$ یک همسایگی باز U وجود داشته باشد به طوری که هر مؤلفه همبند از $f^{-1}(U)$ همئومورفیک به توی U بوسیله f باشد.

[۱] Local chart

تعریف ۱۲.۱ هرگاه $f : X \to Y$ یک نگاشت پوششی باشد و $f : Z \to Y$ یک نگاشت باشد. اگر نگاشت پیوسته‌ای مانند $\tilde{f} : Z \to X$ وجود داشته باشد به طوری که دیاگرام زیر جابجا شود $\tilde{f}$ را یک ترفیع f گویند.

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \exists \tilde{f} \nearrow & \downarrow p \\ Z & \underset{f}{\rightarrow} & Y \end{array} \qquad p \circ \tilde{f} = f$$

تعریف ۱۳.۱ لبه سطح هموار عبارت است از $\{x | \exists\ v_x ; \quad v_x \simeq \mathbb{R}^2_+\}$. به سطحی که لبهٔ آن ناتهی باشد سطح لبه‌دار گوییم. به سطحی که لبهٔ آن تهی باشد بدون لبه گویند. سطح بسته در واقع سطح بدون لبه و فشرده است.

تعریف ۱۴.۱ اگر M و N دو خمینه باشند و $f : M \to N$ یک نگاشت پیوسته باشد f را نگاشت هموار (دیفرانسیل‌پذیر یا C^∞) گویند هرگاه برای هر دو نقشه (U, x) و (V, y) به ترتیب روی M و N داشته باشیم:

$$y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \cap f^{-1}(V) \to y(V)$$

هموار باشد.

تعریف ۱۵.۱ اگر M و N دو خمینه باشند، نگاشت $f : M \to N$ را یک وابرریختی (دیفئمورفیسم) گویند هرگاه:

۱) f هموار باشد.

۲) f یک به یک و پوشا باشد.

۳) f^{-1} هموار باشد.

اگر f وابرریختی بین M و N باشد، آنگاه M و N دیفئمورف هستند.

قضیه ۱۶.۱ فرض کنید $M \subset \mathbb{R}^k$ یک خمینه m–بعدی باشد. اگر $x : U \to \tilde{U} \subset \mathbb{R}^m$ و $y : V \to \tilde{V} \subset \mathbb{R}^m$ دو نقشه موضعی حول نقطه p در M باشند، آنگاه $y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \to y(U \cap V)$ وابرریختی C^∞ است.

برهان. اثبات در [۱۳] $\square$

تعریف ۱۷.۱ منظور از یک خم هموار روی M، گذرا از نقطهٔ p، نگاشت هموار $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ است به قسمی که $\alpha(0) = p$.

نتیجه ۱۸.۱ اگر $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ هموار باشد آنگاه $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^k$ با $\mathrm{Im}(\alpha) \subset M$ نیز هموار است و بالعکس.

برهان. اثبات در [۱۳] $\square$

تعریف ۱۹.۱ فرض کنید $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ یک خم هموار روی M با $\alpha(0) = p$ باشد چون

$$\begin{array}{rcl} \bar{\alpha}(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) & \to & \mathbb{R}^k \\ t & \to & \alpha(t) \end{array}$$

نیز هموار است پس $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \bar{\alpha} = \bar{\alpha}'(0) \in \mathbb{R}^k$ و $\bar{\alpha}'(0)$ را بردار مماس بر M در نقطه p می‌نامند. مجموعهٔ همه بردارهای $\mathbb{R}^k$ که به این ترتیب به دست می آیند را با TM_p نمایش می‌دهند و آن را فضای مماس بر M در نقطه p می‌نامند.

نتیجه ۲۰.۱ اگر M یک خمینه m–بعدی باشد آنگاه برای هر $p \in M$، TM_p یک فضای برداری حقیقی m–بعدی است.

برهان. اثبات در [۱۳] $\square$

تعریف ۲۱.۱ منظور از یک میدان برداری روی خمینه $M \subseteq \mathbb{R}^k$ نگاشت C^r، $X : M \to \mathbb{R}^k$ می‌باشد به طوری که

$$\forall p \in M, \quad X(p) \in TM_p$$

مجموعه میدان‌های بردای C^r را روی M با $\mathfrak{X}^r(M)$ نمایش می‌دهیم.

در اینجا می‌خواهیم یک توپولوژی طبیعی روی فضای $\mathfrak{X}^r(M)$ از میدان‌های برداری C^r روی یک خمینه فشرده را معرفی کنیم:

در این توپولوژی، دو میدان $x, y \in \mathfrak{X}^r(M)$ نزدیک به هم خواهند بود اگر خود میدان‌های برداری و مشتقات بالای آنها تا مرتبهٔ r نزدیک به هم باشند (در تمام نقاط M). ابتدا مشاهده می‌کنیم که فضای $C^r(M, \mathbb{R}^s)$ از نگاشت‌های C^r، $0 \leq r < \infty$ روی یک خمینه فشردهٔ M تعریف شده است. یک ساختار فضای برداری طبیعی روی $C^r(M, \mathbb{R}^s)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall f, g \in C^r(M, \mathbb{R}^s) \quad , \quad \forall\ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(f+g)(p) = f(p) + g(p)$$

$$(\lambda f)(p) = \lambda f(p)$$

یک پوشش متناهی از M با مجموعه‌های باز $V_1, \cdots, V_k$ را در نظر می‌گیریم به طوری که هر V_i در یک ناحیه از نقشه موضعی (x_i, U_i) با $x_i(U_i) = B(2)$ و $x_i(V_i) = B(1)$ واقع است. که $B(1)$ و $B(2)$ گوی‌هایی به شعاع 1 و 2 به مرکز مبدأ مختصات در $\mathbb{R}^m$ هستند که برای هر $f \in C^r(M, \mathbb{R}^s)$، f^i را به این صورت زیر می‌نویسیم:

$$f^i = f \circ x_i^{-1} : B(2) \longrightarrow \mathbb{R}^s$$

و $\|f\|_r$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_r = \max_i \sup \left\{ \|f^i(u)\| \ , \ \|df^i(u)\| \ , \ , \cdots , \|d^r f^i(u)\| \right\} \quad ; \quad u \in B(1)$$

قضیه ۲۲.۱ $\|.\|_r$ یک نرم کامل روی $C^r(M, \mathbb{R}^s)$ است.

برهان. اثبات در [۱۳] $\square$

با چنین روشی هر گاه M و N دوخمینه‌هموارروی فضای $C^r(M,N)$ باشندتوپولوژی C^r تعریف می‌گردد.

تعریف ۲۳.۱ یک سطح هموار Σ دیفئمورفیک با $\mathbb{S}^2$ و یک فرم حجمی ω روی آن را در نظر می‌گیریم. برای هر عدد صحیح $r \geq 1$، $\mathrm{Diff}^r_\omega(\Sigma)$ مجموعهٔ همه وابرریختی‌های C^r است که ω را حفظ می‌کنند و روی این مجموعه توپولوژی C^r قرار می‌دهیم.

۳.۱ مفاهیم اولیهٔ دینامیک

تعریف ۲۴.۱ فرض کنید $(G,*)$ یک گروه یا نیم گروه است و X یک فضای توپولوژیکی باشد. گردایهٔ $\{f_\alpha,\ \alpha\in G\}$ را یک دستگاه دینامیکی گوییم هرگاه $f_\alpha : X\to X$ و

$$f_e = id \qquad (\text{e عنصر همانی G است})$$

$$f_{\alpha*\beta} = f_\alpha \circ f_\beta.$$

دو نوع دستگاه دینامیکی بیشترین اهمیت را یافته‌اند وقتی $\mathbb{Z}_+$ یا $G=\mathbb{Z}$ باشد در این صورت این دستگاه دینامیکی را گسسته گوییم. در یک دستگاه دینامیکی گسسته برای یک $n\in\mathbb{N}$ منظور از f^n ترکیب n کپی از f است. اگر f معکوس‌پذیر باشد آنگاه $f^{-n} = f^{-1}\circ\cdots\circ f^{-1}$. بدیهی است که $f^{m+n} = f^m\circ f^n$ که $f^\circ = 1$.
در این صورت $\{f^n:\ n\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}\}$ یک نیم گروه و $\{f^n,\ n\in\mathbb{Z}\}$ یک گروه است.
در صورتی که روی X یک ساختار اضافی وجود داشته باشد نگاشت f باید حافظ آن ساختار باشد.
مثلاً اگر X فضای توپولوژیک باشد آنگاه f پیوسته است. یا اگر X خمینه هموار باشد، آنگاه f باید نگاشت دیفرانسیل‌پذیر باشد و یا اگر X فضای متریک باشد آنگاه f ایزومتری است.
و اگر $\mathbb{R}_+$ یا $G=\mathbb{R}$ باشد دستگاه دینامیکی را پیوسته گوییم به طوری که $f^{t+s}=f^t\circ f^s$ و $f^0=\mathrm{id}$ بدیهی است که $\{f^t\}_{t\in\mathbb{R}_0^+}$ $(\mathbb{R}_0^+=\mathbb{R}^+\cup\{0\})$ یک نیم گروه است و $\{f^+\}_{t\in\mathbb{R}}$ یک گروه جابجایی می‌باشد. زیرا برای

هر $t \in \mathbb{R}$، f^t وارون‌پذیر است. در واقع کافی است قرار دهیم $s = -t$، در این صورت

$$id = f^0 = f^{s+t} = f^s \circ f^t = f^t \circ f^s.$$

تعریف ۲۵.۱ دو دستگاه دینامیکی $D_1 = \{f^t : X \to X\}$ و $D_2 = \{g^t : Y \to Y\}$ را نیم‌مزدوج گویند هرگاه نگاشت پوشای $\pi : Y \to X$ موجود باشد به طوری که برای هر t نمودار زیر جابجا شود:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f^t} & X \\ \pi \uparrow & & \uparrow \pi \\ Y & \xrightarrow[g^t]{} & Y \end{array} \qquad\qquad f^t \circ \pi = \pi \circ g^t$$

اگر π وارون‌پذیر باشد آنگاه آن را یک مزدوج از (Y, g) به (X, f) (یا به اختصار از g به f) می‌نامند.

به سهولت دیده می‌شود که رابطه مزدوج بودن یک رابطه هم‌ارزی است. گاهی دو دستگاه دینامیکی مزدوج را یکریخت نیز می‌نامند.

تعریف ۲۶.۱ دستگاه دینامیکی $\{f^t : X \to X\}_t$ را در نظر بگیرید. منظور از نیمه مثبت مدار مربوط به نقطه $x \in X$ که با $O_f^+(x)$ نمایش می‌دهند عبارت است از

$$O_f^+(x) = \{f^t(x), \quad t \geq 0\}$$

نیمه منفی مدار مربوط به نقطهٔ $x \in X$ را با $O_f^-(x)$ نمایش می‌دهند که عبارت است از

$$O_f^-(x) = \{f^t(x), \quad t \leq 0\}$$

مدار x را با $O_f(x)$ نمایش می‌دهند و عبارت است از $O_f(x) = O_f^+(x) \cup O_f^-(x)$

تعریف ۲۷.۱ نقطهٔ x را ثابت گوییم هرگاه $f(x) = x$ و تناوبی گوییم هرگاه $f^k(x) = x$ $(k \geq 1)$.

تعریف ۲۸.۱ زیر مجموعهٔ A از X تحت دستگاه دینامیکی $\{f^t : X \to X\}_t$ را ناوردا گویند هرگاه به ازای هر t، $f^t(A) \subset A$. زیر مجموعهٔ A از X را یک زیر مجموعه رو به جلو ناوردا گویند هرگاه به ازای هر $t \geq 0$، $f^t(A) \subset A$ و زیر مجموعه A از X را یک زیر مجموعه رو به عقب ناوردا گویند هرگاه به ازای هر $t > 0$، $f^{-t}(A) \subset A$ که $f^{-t}(A) = (f^t)^{-1}(A)$.

تعریف ۲۹.۱ در یک دستگاه دینامیکی $\{f^t : X \to X\}_t$ اگر (X, Σ, m) یک فضای اندازه باشد آنگاه برای هر t، f^t حافظ اندازه است. یعنی اگر m اندازه روی X باشد آنگاه برای هر $A \in \Sigma$، داریم

$$\forall t, \quad m\big(f^{-t}(A)\big) = m(A)$$

مثلاً اگر X یک خمینه هموار باشد آنگاه برای هر t، f^t دیفرانسیل‌پذیر است.

تعریف ۳۰.۱ نقطهٔ x را نقطهٔ غیر سرگردان گویند هرگاه

$$\exists\, U_x, \ \ \exists n; \qquad f^n(U_x) \cap U_x \neq \varnothing$$

قضیه ۳۱.۱ اگر f حافظ اندازه و اندازهٔ کل فضا متناهی باشد آنگاه همه نقاط غیر سرگردان هستند.

برهان. مجموعهٔ باز U را در نظر می‌گیریم به طوری که $a = m(U) > 0$ مدار مربوط به U را به صورت زیر داریم:

$$U, f^{-1}(U), f^{-2}(U), \cdots$$

چون f حافظ اندازه است داریم

$$a = m(U) = m(f^{-1}(U)) = m(f^{-2}(U)) = \cdots$$

یعنی $\sum\limits_1^\infty a = \infty$، در حالی که اندازه کراندار است یعنی $\mu(X) < \infty$ پس $f^{-1}(U)$ها مجزا نیستند، یعنی

$$\exists\, m > n; \qquad f^{-m}(U) \cap f^{-n}(U) \neq \varnothing$$

$$f^{m-n}(U) \cap U \neq \varnothing$$