بسم الله الرّحمن الرّحيم

دانشکده فنی و مهندسی

بخش مهندسی برق

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته مهندسی برق گرایش مخابرات

کدهای زمان-مکان با گیرنده‌های خطی

استاد راهنما :

دکتر سیامک طالبی

مؤلف :

مصطفی شهابی نژاد

تیر ماه ۱۳۹۰

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط درجه کارشناسی ارشد به

بخش مهندسی برق

دانشکده فنی و مهندسی

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی‌شود.

دانشجو : مصطفی شهابی نژاد

استاد راهنما : دکتر سیامک طالبی

استاد مشاور :

داور ۱ : دکتر احمد حکیمی

داور ۲ : دکتر عظیم ریواز

نماینده‌ی تحصیلات تکمیلی در جلسه دفاع: دکتر مهدی افتخاری

معاونت پژوهشی و تحصیلات تکمیلی دانشکده:

حق چاپ محفوظ و مخصوص به دانشگاه شهید باهنر کرمان است.

تقدیم به:

پدرم، که جانِ پاکشان روشنی بخشِ وجودم است.

و مادرم، که قلبِ مهربانشان آرامش بخشِ وجودم است.

تشکر و قدردانی:

سپاس بی‌کران خدایی را که لحظه لحظه شور و زندگی می بخشد و این گرانبهاترین هدیه‌اش را با عشق و بی منت ارزانی می‌دارد.

با سپاس فراوان از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر طالبی که همواره مشوقِ من و هموار کننده‌ی راهم بودند. بی‌شک، بدون زحماتِ بی‌دریغ و ایده‌های علمیِ ارزنده‌ی ایشان انجام این تحقیق غیرممکن می‌بود.

همچنین از خانواده‌ام که مهربانترین یاورانِ من بوده و هستند، نهایت سپاسگزاری را دارم. بالاخص مادر بی‌نظیرم که مسئولیت همه ی آنچه وظیفه‌ی من بود را صبورانه به دوش کشیدند.

از همه‌ی اساتید گرامیم در دوره‌ی کارشناسی ارشد، به ویژه جناب آقای دکتر حکیمی و جناب آقای دکتر ریواز که توصیه‌های گرانبهایشان در ویرایش نهایی این پایان نامه بسیار مؤثر بود، کمال تشکر را دارم.

و در نهایت از همه‌ی دوستانِ عزیزم، سید صالح حسینی، عادل احمدی، علیرضا مرسلی، محمد عسکری‌زاده، صادق توفیق، هژیر قاسم نژاد و... که در انجام این پروژه یاری کننده‌ی من بودند؛ صبورانه به مشکلاتم گوش می‌سپردند و با تمام وجود در صدد حل آن‌ها بر می‌آمدند، نهایت قدردانی را دارم.

چکیده :

استفاده‌ی روز افزون از سیستم‌های مخابرات بیسیم، نیاز به افزایش نرخ ارسال اطلاعات و کاهش پیچیدگی گیرنده‌ها را روز به روز مهم‌تر می‌سازد. در سال‌های اخیر گیرنده‌هایی موسوم به گیرنده‌های خطی برای کدگشایی کدهای زمان-مکان پیشنهاد شده‌اند که پیچیدگی آن‌ها به مراتب کمتر از پیچیدگی گیرنده‌های بهینه می‌باشد. در این پایان‌نامه، به شرح این گیرنده‌ها و چگونگی به کارگیری آن‌ها در کدگشایی کدهای زمان–مکان می‌پردازیم و روش‌هایی را برای کاهش پیچیدگی این گیرنده‌ها در بعضی از کدهای خاص ارائه می‌دهیم. همانگونه که در فصل دوم بحث خواهیم کرد، مقدار بیشینه‌ی نرخ ارسالِ کدهایی که براساس این نوع گیرنده‌ها طراحی شده‌اند برابر با یک است.

برای افزایش نرخ ارسالِ کدهای زمان-مکان، مجبور به استفاده از گیرنده‌ی بهینه با پیچیدگی محاسباتی زیاد می‌شویم. در فصل سوم این پایان‌نامه، کدی با نرخ ارسالی برابر با دو طراحی می‌کنیم که پیچیدگی خطی را در گیرنده‌ی بهینه‌ی ML[1] پیشنهاد می‌دهد.

همچنین در فصل چهارم، به کمک کد پیشنهادی فصل سوم، برای سیستم‌های MIMO-OFDM[2]، دو کد مختلف با پیچیدگی خطی در گیرنده‌ی بهینه‌ی ML پیشنهاد می‌دهیم.

کلید واژه: کدگذاری زمان-مکان،گیرنده‌های خطی، کدگذاری زمان-مکان-فرکانس، کانال‌های شبه ایستا، OFDM.

[1] Maximum Likelihood

[2] Multi-Input Multi-Output Orthogonal Frequency Division Multiplexing

فهرست مطالب:

فصل ۱: مفاهیم پایه ۱

۱-۱ نمادها..... ۱

۱-۲ تعاریف و مقدمات ۲

فصل ۲: معیارهای کدهای فضا-زمان با گیرنده‌های خطی و روش پیشنهادی جهت کاهش پیچیدگی گیرنده‌ی کدهای OAC ۱۳

۲-۱ مرور ۱۳

۲-۲ مدل سیستم و بیان معیار برای کدهای فضا-زمان با گیرنده‌های خطی ۱۵

۲-۲-۱ مدل سیستم و مدل کانال معادل ۱۵

۲-۲-۲ معیار طراحی کدهای فضا-زمان برای حصول دایورسیتی کامل با گیرنده‌های خطی ۱۸

۲-۳ کدهای OAC و کانال معادل‌های متناظر با آن‌ها ۲۰

۲-۳-۱ کدهای OAC برای تعداد آنتن‌های فرد ۲۰

۲-۳-۲ کدهای OAC برای تعداد آنتن‌های زوج ۲۲

۲-۴ روش پیشنهادی جهت کاهش پیچیدگی گیرنده‌ی کدهای OAC ۲۴

۲-۵ نتایج شبیه سازی ۲۵

۲-۶ نتیجه گیری ۲۷

فصل ۳: پیشنهاد یک کد ۲×۲ دایورسیتی-کامل و نرخ-کامل با پیچیدگی خطی در گیرنده‌ی بهینه ی ML ۲۸

۳-۱ مرور ۲۸

۳-۲ معرفی کد FRLR ۲۹

۳-۳ خصوصیات کد FRLR ۳۰

۳-۴ نتایج شبیه سازی ۳۳

۳-۵ نتیجه گیری ۳۴

فصل ٤: معرفی کدهای فضا-زمان-فرکانس با نرخ ارسال بالا و پیچیدگی خطی برای گیرنده‌ی بهینه‌ی ML ۳۵

۴-۱ مرور ۳۶

۴-۲ مقدمات ۳۹

۴-۲-۱ مدل سیستم ۴۰

۴-۲-۲ بهره‌ی دایورسیتی و بهره‌ی کد ۴۳

۴-۳ کدهای فضا-زمان-فرکانس پیشنهادی ۴۵

۴-۳-۱ کدهای FRLR ۴۵

۴-۳-۲ کدهای FRLR STF-I با DPP معلوم در فرستنده ۴۶

۴-۳-۳ کدهای FRLR STF-I با DPP نامعلوم در فرستنده ۵۰

۴-۴ پیچیدگی خطی کدهای STF پیشنهادی برای گیرنده‌ی بهینه ۵۲

۴-۵ نتایج شبیه‌سازی و آنالیز عددی آن‌ها ۵۵

۴-۵-۱ نتایج شبیه‌سازی ۵۵

۴-۵-۲ تحلیل عددی نتایج شبیه‌سازی ۵۹

۴-۵-۳ نتایج شبیه‌سازی برای مدل‌های کانال COST207 ..... ۶۰

۴-۶ نتیجه‌گیری ۶۳

ضمیمه فصل ۴ ..... ۶۴

الف) بهره‌ی دایورسیتی کدهای FRLR STFBC ۶۴

ب) بهره‌ی دایورسیتی کدهای FRLR STFBC-I ۶۵

فهرست اَشکال:

شکل ۱-۱ ساختار ۵ چینش مختلف ۳

شکل ۲-۱ نتایج شبیه‌سازی برای سه آنتن فرستنده و یک آنتن گیرنده؛ چینش 4-QAM ۲۶

شکل ۲-۲ نتایج شبیه‌سازی برای چهار آنتن فرستنده و یک آنتن گیرنده؛ چینش 4-QAM ۲۷

شکل ۳-۱ مقایسه‌ی عملکرد و پیچیدگی گیرنده‌ی کد پیشنهادی با کد طلایی و کدهای مراجع [۱۲] و [۵۶] ۳۴

شکل ٤-۱ کدگذاری فضا-زمان-فرکانس ۳۸

شکل ٤-۲ طرح بلوکی فرستنده‌ی یک سیستم فضا-زمان-فرکانس ۴۰

شکل ٤-۳ طرح یک بلوک OFDM ۴۰

شکل ٤-٤ مدل‌های کانال COST207 و تابع پیشنهادی برای تولید پوشه‌ی توان خودساخته ۵۱

شکل ٤-۵ نتایج شبیه‌سازی برای کانال دو تأخیری؛ ۱ bit/s/Hz ۵۶

شکل ۴-۶ نتایج شبیه‌سازی برای کانال دو تأخیری؛ ۲ bits/s/Hz ۵۷

شکل ۴-۷ نتایج شبیه‌سازی برای کانال چهار تأخیری؛ ۱ bit/s/Hz ۵۷

شکل ۴-۸ نتایج شبیه‌سازی برای کانال چهار تأخیری؛ ۲ bits/s/Hz ۵۸

شکل ۴-۹ نتایج شبیه‌سازی برای کد FRLR STFBC-I برای کانال‌های RBU و RA؛ ۱ bit/s/Hz ۶۲

شکل ۴-۱۰ نتایج شبیه‌سازی برای کد FRLR STFBC-I برای کانال‌های RTU و RHT؛ ۱ bit/s/Hz ۶۲

شکل ۴-۱۱ نتایج شبیه‌سازی برای کد FRLR STFBC-I برای کانال‌های TU، BU و HT؛ ۱ bit/s/Hz ۶۳

فهرست جداول

جدول ۲-۱ حالت‌های مختلفِ استفاده شده در شبیه‌سازی ۳۶

جدول ۳-۱ پارامترهای بهینه‌ی مربوط به کد FRLR ۳۳

جدول ٤-۱ مقایسه‌ی عددی بین پارامترهای مختلف کدهای پیشنهادی و کدهای QOSTFBC ۶۱

جدول ٤-۲ پارامتر q برای مدل کانال‌های COST207 ..... ۶۱

مقدمه:

شاید در روزهای اولیه‌ی ابداعِ فناوریِ MIMO[1] پیش بینی نمی‌شد که این فناوری مانند امروز قدرتمند باشد و مورد اهمیت قرار گیرد. امروزه تعداد بیشماری از شبکه های مخابراتی در سراسر دنیا از MIMO به عنوان یک فناوریِ موثر و مطمئن در ارتباطاتشان بهره‌گیری می‌کنند. از سوی دیگر، تحقیقاتِ گسترده‌ای در زمینه‌های تئوریِ مربوط به MIMO در اکثریت مراکز علمی و تحقیقاتی مخابرات در سرتاسر جهان انجام می‌شود. جهت‌گیری عمده‌ی این تحقیقات، بهبود عملکرد و یا کاهش پیچیدگیِ سیستم‌هایی می‌باشد که مبتنی بر ساختار MIMO کار می‌کنند. هر دوی این زمینه‌های تحقیقاتی اهمیت به سزایی دارند: با بهبود عملکرد سیستم‌های MIMO، در واقع می‌توان با صرف توان کمتر به نتیجه‌ی مطلوب رسید. و این به معنی کاهش چشمگیر هزینه ها در فرستنده می‌باشد. از سوی دیگر، با کاهش پیچیدگی در گیرنده‌ی این سیستم ها، می‌توان از صرفِ توان اضافی در گیرنده جلوگیری نمود. بنابراین، می‌توان علاوه بر کاهش هزینه‌ها در گیرنده، از تخلیه‌ی سریع باتریِ ادوات بیسیم تا حد قابل توجهی جلوگیری نمود.

ما در فصل های پیش روی این پایان نامه، روی هر دو موضوع، یعنی کاهش پیچیدگی سیستم های MIMO و همچنین بهبود عملکرد آن ها تمرکز می‌نماییم.

[1] Multi-Input Multi-Output

فصل اول
مفاهیم پایه

۱-۱ نمادها:

تعداد آنتن های ارسالی: M_t

تعداد آنتن های دریافتی: M_r

تعداد اسلات های زمانی: T

تعداد سمبل های متمایز به کاررفته در هر کلمه کد زمان-مکان: L

تعداد نقاط چینش: M

$\mathrm{j} = \sqrt{-1}$

تعداد کریرهای هر بلوک OFDM: N_c

ترانهاده : $(\cdot)'$

مزدوج : $(\cdot)^*$

ترانهاده و مزدوج : $(\cdot)^\dagger$

رتبه‌ی یک ماتریس: $rank(\cdot)$

دترمینان یک ماتریس: $det(\cdot)$

نُرم فروبینیوسی ماتریس: $||\cdot||_F$

مجموعه ی اعداد مختلط: $\mathbb{C}$

مجموعه ی اعداد حقیقی: $\mathbb{Z}$

* $w_{ij} \sim \mathcal{CN}(0, \sigma^2)$ نشان می‌دهد که w_{ij}-ها متغیرهای مختلط تصادفی گوسی با میانگین صفر و واریانس σ^2 هستند، که مستقل از هم می باشند.

* ماتریس‌ها را با حروف بزرگ تیره و بردارها را با حروف کوچکِ تیره نمایش می‌دهیم.
* نماد $\text{diag}(a_0, a_1, ..., a_N)$ بیانگر یک ماتریس قطری $N \times N$ می‌باشد که مؤلفه‌های روی قطرش عبارتند از: $a_0, a_1, \ldots, a_N$.

۱-۲ تعاریف و مقدمات:

۱- منبعِ اطلاعات:

همانطور که می‌دانیم، هدف نهایی از طراحی یک سیستم مخابراتی، ارسال اطلاعاتی است که به صورت بیت های تصادفی در منبع اطلاعات تولید می‌شوند. این اطلاعات می‌توانند اطلاعاتِ مربوط به تصویر، صدا، ویدئو و... باشند.

دستور MATLAB برای تولید دنباله‌ی رندم با ۱،۰۰۰،۰۰۰ بیت:

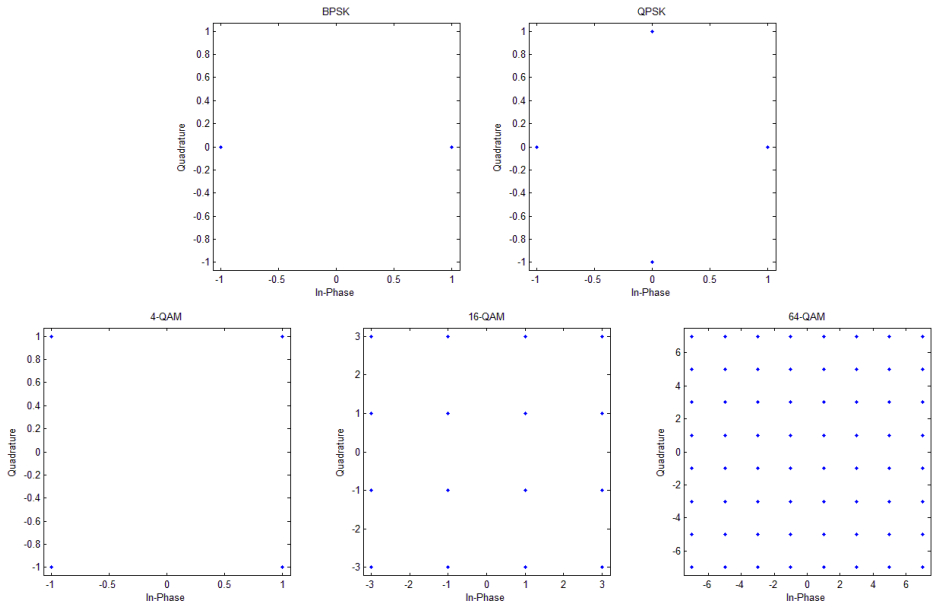
```
%Random Bits Generation:
Bits = randi([0,1],[1e6,1]);
```

۲- چینش[1]:

قبل از انجام هر کاری اطلاعاتِ بیتی را به کمک یک چینش به سمبل تبدیل می‌کنیم. اگر بخواهیم هر L بیت را به یک سمبل تبدیل کنیم، به چینشی با سایز 2^L نیاز داریم. چینش‌ها انواع مختلفی دارند. برای مثال، چینش‌های BPSK، QPSK، 4-QAM، 16-QAM و 64-QAM. شکل ۱-۱ این چینش‌ها را نمایش می‌دهد.

مثال۱-۱: فرض کنید می‌خواهیم دنباله‌ی بیت ۱۰۱۱۰۰۰۱۱۱ را به کمک چینش 4-QAM به دنباله‌ی سمبل تبدیل کنیم. از آنجایی که چینش 4-QAM سایزی برابر با ۴=$۲^۲$ دارد، باید هر دو بیت را به یک سمبل اختصاص دهیم. با فرض اینکه چینش 4-QAM به بیت‌های ۰۰، عدد (1+j)؛ به بیت‌های ۰۱، عدد (1-j)؛ به بیت‌های ۱۰، عدد (1+j)؛ و به بیت‌های ۱۱، عدد (1-j) را نسبت دهد. آن‌گاه دنباله‌ی بیت ۱۰۱۱۰۰۰۱۱۱ به دنباله‌ی سمبل (1-j)(1-j)(1+j)(1-j)(1-j) تبدیل می‌شود.

[1] Constellation



شکل ۱-۱ ساختار ۵ چینش مختلف

دستور MATLAB برای تولید چینش های مختلف و تبدیل بیت ها به دنباله‌ی سمبل:

```
% Random Bits Generation:
Bits = randi([0 1],[1e6,1]);
% Constellation size:
M = 4;
%Constellation Type(QAM):
Modulator=modem.qammod('M',M,'InputType','bit');
%Constellation Type(PSK):
%Modulator = modem.pskmod('M',M,'InputType','bit');
% Bits to Symbols Transformation:
Symbols = modulate(Modulator,Bits);
```

۳- *پدیده‌ی محوشدگی[1] در کانال‌های مخابراتی بیسیم:*

محوشدگی، یا محوشدگی مقیاس-کوچک، به خاطر تداخل بین دو یا تعداد بیشتری از نسخه‌های سیگنال‌های ارسالی، که در زمان‌های خیلی کوتاه به گیرنده می‌رسند، رخ می دهد.

[1] Fading

این سیگنال‌ها، که به آنها امواج چند مسیری گفته می‌شود، در آنتن گیرنده و فیلتر تطبیق متناظرشان ترکیب می‌شوند و می‌توانند منجر به تغییر شدید دامنه و یا فاز شوند. در سیستم‌های مخابراتی بیسیم به این پدیده محوشدگی گفته می شود[۵۳-ص۷].

۴- کدگذاری زمان-مکان:

کدگذاری زمان-مکان یکی از روش‌های بسیار مؤثر برای مقابله با پدیده‌ی محوشدگی سیگنال‌ها در کانال‌های مخابراتی بیسیم به شمار می‌آید. در این روشِ کدگذاری، سیگنال‌های ارسالی به کمک دو یا چند آنتن ارسالی(فضا) و در زمان‌های مختلف(زمان) ارسال می‌شوند. اگر آنتن‌های ارسالی(دریافتی) با فاصله‌ی مناسب از یکدیگر قرار داده شده باشند، هر نسخه از سیگنال ارسالی با یک کانال مجزا مواجه می‌شود. از آنجایی که احتمال مواجهه با محوشدگی شدید در همه‌ی مسیرها بسیار کم می‌باشد، می‌توان سیگنال‌های دریافتی را با خطای کمتری آشکار کرد[۵۳-ص۱۵].

نکته۱-۱: سؤال اساسی پیش رو در سیستم‌های کدگذار زمان-مکان این است که نسخه‌های گوناگونِ سیگنال‌ها چگونه ارسال شوند که:

الف) نرخ ارسال داده بالا باشد.

ب) پیچیدگی کدگشایی در گیرنده کم باشد.

ت) ازهمه‌ی کانال‌های به وجود آمده در یک سیستم کدگذاری استفاده‌ی مطلوب شود(شرط دایورسیتی[1]).

ث) عملکرد کلی سیستم قابل قبول باشد. به عبارت دیگر، نرخ بیت‌های خطا زیاد نباشد(شرط بهره‌ی کد).

* بعداً به طور مفصل راجع به شروط دایورسیتی و بهره‌ی کد بحث خواهیم نمود.

۵- کد زمان-مکان:

فرض کنید می‌خواهیم با تکنیکِ کدگذاری زمان-مکان، از طریقِ M_t آنتن ارسالی و در T اسلاتِ زمانی مخابره‌ی اطلاعات را انجام دهیم. آنگاه می‌توان هر کد زمان-مکان را با یک ماتریس $\boldsymbol{C} = (c_{i,j}) \epsilon\, \mathbb{C}^{T\times M_t}$ نمایش داد، که $c_{i,j}$ها اطلاعاتی می‌باشند که قرار است در زمان i-ام و از آنتن ارسالی j-ام فرستاده شوند.

[1] Diversity

مثال۱-۲: الموتی یک کد زمان-مکان به شکل زیر را برای ارسال سمبل‌ها پیشنهاد کرد($T = M_t = 2$)[۶]:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ -s_2^* & s_1^* \end{pmatrix} \quad (۱-۱)$$

بنابراین، در اسلات زمانی اول و از آنتن اول، سمبلs_1؛در اسلات زمانی اول و از آنتن دوم، سمبلs_2؛در اسلات زمانی دوم و از آنتن اول، سمبل$-s_2^*$؛ و در اسلات زمانی دوم و از آنتن دوم، سمبلs_1^* ارسال می شوند.

۶- کلمه ی کد و کتاب کد برای کدهای زمان-مکان:

به هر کدام از حالاتی که یک کد زمان-مکان می تواند بگیرد، کلمه ی کد گفته می شود، و به مجموعه‌ای که همه ی کلمه‌های کد را شامل می شود، کتاب کد گفته می شود. به عنوان مثال زمانی که از چینشی با سایز M برای کد الموتی استفاده کنیم، M^2 کلمه ی کد متفاوت خواهیم داشت. در این حالت، کتاب کد مجموعه‌ای می باشد که همه ی این M^2 کلمه ی کد را شامل می شود.

۷- نرخ کدهای زمان-مکان و نرخ-کامل بودن[1] آن ها:

نرخ یک کد زمان-مکان (R)، به صورت نسبت تعداد سمبل های متمایز ارسالی به کاررفته در هر کلمه ی کد، L، به تعداد اسلات های زمانی آن، T، تعریف می شود، یعنی $R = L/T$. در صورتی که برای یک کدِ زمان-مکان، تساوی $L = M_r T$ برقرار باشد، به آن کد، نرخ-کامل گفته می شود (M_r تعداد آنتن های دریافتی می باشد).

۸- دایورسیتی:

ایده ی اصلی پشت "دایورسیتی"، تهیه ی نسخه های مختلف سیگنال های ارسالی برای گیرنده می باشد. یک تعریف عملی برای دایورسیتی، یا بهره ی دایورسیتی (A_d)، به صورت زیر است:

$$A_d = -\lim_{\gamma \to \infty} \frac{\log(P_e)}{\log(\gamma)} \quad (۲-۱)$$

[1] Full-rate

که در آن، P_e احتمالِ خطا در $SNR = \gamma$ می‌باشد. به عبارت دیگر، دایورسیتی شیب نمودار احتمال خطا بر حسب SNR دریافتی در مقیاس log-log می‌باشد.

۹- احتمال خطای جفتی[1] برای کدهای زمان-مکان:

فرض کنید، $\boldsymbol{C}^i$ و $\boldsymbol{C}^j$ دو کلمه‌ی کد متفاوت از یک کتاب کد زمان-مکان باشند. آنگاه، احتمال خطای جفتی را به صورت احتمال اینکه $\boldsymbol{C}^i$ ارسال شود و در گیرنده به اشتباه $\boldsymbol{C}^j$ آشکار شود، تعریف کرده و با $P(\boldsymbol{C}^i \to \boldsymbol{C}^j)$ نشان می‌دهیم. در فصل سوم مرجع [۵۳] اثبات شده است که این مقدار برابر است با:

$$P_e = P\left(\boldsymbol{C}^i \to \boldsymbol{C}^j\right) \le \frac{4^{rM_t}}{\left(\prod_{n=1}^{r}\lambda_n\right)^{M_t}\ \gamma^{rM_t}} = \left(\frac{\left(\prod_{n=1}^{r}\lambda_n\right)^{\frac{1}{r}}}{4}\gamma\right)^{-rM_t} = (A_c\gamma)^{-A_d} \qquad (۳-۱)$$

که در آن λ_nها مقادیر ویژه غیر صفر ماتریس $\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{C}^i, \boldsymbol{C}^j\right) = (\boldsymbol{C}^i - \boldsymbol{C}^j)^{\dagger}(\boldsymbol{C}^i - \boldsymbol{C}^j)$ و A_d و A_c به ترتیب بهره‌ی دایورسیتی و بهره‌ی کد می‌باشند که بعداً در مورد آن‌ها مفصلاً بحث خواهیم نمود. همانطور که می‌دانیم در صورتی که $\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{C}^i, \boldsymbol{C}^j\right)$ رتبه-کامل باشد، همه مقادیر ویژه آن مخالف صفر می‌باشند و در غیر اینصورت داریم:

$$\lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_{M_t} = 0 \text{ و } \lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_r > 0$$

۱۰-معیار رتبه برای طراحی کدهای زمان-مکان و دایورسیتی-کامل[2] بودن کدها:

با توجه به رابطه‌ی (۱-۳) می‌توان بهره‌ی دایورسیتی را به صورت زیر تعریف نمود:

$$A_d = rank\left(\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{C}^i, \boldsymbol{C}^j\right)\right) M_t = rM_t \qquad (۴-۱)$$

که r تعداد مقادیر ویژه مخالف صفر ماتریس $\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{C}^i, \boldsymbol{C}^j\right)$ می‌باشد. در صورتی که $\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{C}^i, \boldsymbol{C}^j\right)$ رتبه-کامل باشد، می گوییم کد زمان-مکان متناظر با آن *دایورسیتی-کامل* است.

> یادآوری ۱-۱:
>
> رتبه‌ی ماتریس $\boldsymbol{A}$، یا $rank(\boldsymbol{A})$، برابر است با ماکزیممِ تعداد سطرها یا ستون‌های مستقل ازهم ماتریس $\boldsymbol{A}$ [٥٤-ص٥٨].

[1] Pairwise Error Probability
[2] Full-diversity

نکته۱-۲: با توجه به رابطه ی(۱-۳) و تعریف(۱-۴)، مشخصاً هر چه بهره ی دایورسیتی یک کد بیشتر باشد، احتمال رخداد خطای آشکارسازی در گیرنده کاهش می یابد.

نکته۱-۳: می توان درستی تعریف دایورسیتی که در رابطه ی(۱-۲) آورده شده است را به کمک رابطه ی(۱-۳) به شکل زیر تحقیق کرد:

$$A_d = -\lim_{\gamma\to\infty}\frac{\log(P_e)}{\log(\gamma)} = -\lim_{\gamma\to\infty}\frac{\log(\frac{4^{rM_t}}{(\prod_{n=1}^{r}\lambda_n)^{M_t}\ \gamma^{rM_t}})}{\log(\gamma)} = rM_t\lim_{\gamma\to\infty}\frac{\log\left(\frac{\gamma}{\mathcal{C}}\right)}{\log(\gamma)} = rM_t$$

که در آن $\mathcal{C}$ یک عدد ثابت مخالف صفر می باشد.

نکته۱-۴: برای بررسی دایورسیتی-کامل بودن یک کد، باید رتبه-کامل بودن ماتریس مربعی $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}^i,\boldsymbol{C}^j)$ را بررسی نمود. برای این کار باید نشان دهیم که $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}^i,\boldsymbol{C}^j)$ هیچ مقدار ویژه مخالف صفری ندارد. بنابراین، کافیست نشان دهیم که حاصلضرب همه ی مقادیر ویژه $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}^i,\boldsymbol{C}^j)$، مخالف صفر می باشد. از آنجایی که حاصلضرب همه ی مقادیر ویژه $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}^i,\boldsymbol{C}^j)$ برابر است با دترمینان $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}^i,\boldsymbol{C}^j)$، داریم:

$$\det\left(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}^i,\boldsymbol{C}^j)\right) = \prod_{n=1}^{r}\lambda_n = \det\left((\boldsymbol{C}^i-\boldsymbol{C}^j)^{\dagger}(\boldsymbol{C}^i-\boldsymbol{C}^j)\right) = |\det(\boldsymbol{C}^i-\boldsymbol{C}^j)|^2 \quad (۵-۱)$$

بنابراین برای بررسی دایورسیتی-کامل بودن یک کد، کافیست مخالف صفر بودن عبارت $\det(\boldsymbol{C}^i-\boldsymbol{C}^j)$ را به ازای همه ی کلمه های کد $\boldsymbol{C}^i$ و $\boldsymbol{C}^j$ بررسی کنیم.

۱۱-معیار دترمینان برای طراحی کدهای زمان-مکان:

با توجه به معادله ی (۱-۳) می توان رابطه ی زیر را برای بهره ی کد ارائه نمود:

$$A_c = \frac{(\prod_{n=1}^{r}\lambda_n)^{\frac{1}{r}}}{4} \quad (۶-۱)$$

نکته۱-۵: با توجه به رابطه ی (۱-۳) و تعریف (۱-۶)، مشخصاً هر چه بهره ی کد مربوط به یک کد زمان-مکان بیشتر باشد، احتمال رخداد خطای آشکارسازی در گیرنده کاهش می یابد.

نکته۱-۶: واضح است که برای بالا بردن بهره ی کد، باید مقدار $\prod_{n=1}^{r}\lambda_n$ متناظر با آن را افزایش دهیم. به طور مشخص، برای یک کد دایورسیتی-کامل، با توجه به نکته ی۱-۵، باید مینیمم مقدار $\delta_{min} = |\det(\boldsymbol{C}^i-\boldsymbol{C}^j)|$ را به ازای همه ی کلمه های کد متمایز $\boldsymbol{C}^i$ و $\boldsymbol{C}^j$ بیشینه نمود.