بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه ارومیه

مضروب های جبر $L^p(I,X)$ با پیچش مرتب

مهدی شهبازی

دانشکده‌ی علوم
گروه ریاضی

دی ۱۳۸۷

پایان نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

استاد راهنما:

دکتر علی عبادیان

پایان نامه مهدیا سهبا زری به تاریخ ۸۷/۱/۲ شماره مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه
و نمره هجده قرار گرفت.

۱۸/-

۱- استاد راهنما و رئیس هیئت داوران: دکتر علی ابادیان

۲- استاد مشاور: ـــــ

۳- داور خارجی: دکتر نسرین استادباشی

۴- داور داخلی: دکتر نسرین شمس

۵- نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر حمید ابراهیم حسینی

تقدیم به

پدر و مادرم

سپاس و تقدیر

منّت خدای را، عزّوجل که طاعتش موجبِ قربت است و به شکر اندرش مزید نعمت. هر نفسی که فرو می رود، مُمدّ حیات است و چون بر می آید، مُفرّحِ ذات. پس در هر نفسی دو نعمت موجود است و بر هر نعمتی شکری واجب .

از دست و زبان که برآید   کز عهده‌ی شکرش به در آید؟[1]

با حمد و ثنای خدای منان که مرا راهنمایی و کمک نمود که به این مرحله برسم و امیدوارم که در آینده طبق فرمایش

رسول اکرم (ص)

زگواره تاگور دانش بجوی

عمل نموده و همیشه به کسب علم بپردازم .

از پدر و مادر عزیزم تشکر و قدر دانی می کنم و دستان پر مهرشان را می بوسم و امیدوارم که از من راضی و خشنود باشند.

از استاد راهنمایم دکتر علی عبادیان تشکر و قدر دانی می نماییم که در مدت اجرای پایان نامه مرا راهنمایی نمود تا کاری کم نقص را به پایان برسانم . همچنین از آقای دکتر سعید استاد باشی که در تمام دوره تحصیلم در دانشگاه ارومیه همیشه مرا مورد عنایت خویش قرار داده ، کمال تشکر را دارم . همچنین از آقای دکتر سعید شمس و آقای دکتر مجید اسم حسینی تشکر و قدر دانی می نمایم .

از تمامی دوستان که هر کدام به نحوی مرا یاری کردند نیز تشکر می کنم.

[1]متن از گلستان سعدی انتخاب شده است .

چکیده

نظریه مضروب ها (multipliers) در جبر های باناخ یکی از مباحث مهم و پر طرفدار برای علاقمندان و محققین در شاخه جبرهای باناخ است از این رو در این پایان نامه ابتدا جبر باناخ $L^p(I, X)$ که $I = [0, 1]$ و X یک جبر باناخ تعویض پذیر است ، مورد بررسی قرار می گیرد و نهایتاً مسئله مضروبها در مورد این ساختار به طور کامل با اثبات قضایا تجزیه و تحلیل می شوند .

Key Words: Banach Algebra; Gelfand Transform; Radon - Nikodym Property; Maximal Ideal Space; Multiplier; Supremum Norm Algebra.

پیشگفتار

خلاصه ای از کاری که در این پایان نامه انجام داده ایم را بیان می کنم .

ابتدا در فصل اول ، مفاهیمی از آنالیز حقیقی آورده شده است . با توجه به اینکه در فصل های آتی به این مطالب نیاز مبرم داریم لذا ، خواننده باید به حد کافی به بحث های آن مسلط باشد.

در فصل دوم ، مبحث جبر های باناخ را آورده ایم که قسمت مهمی از پایان نامه است . در این فصل فضاهای برداری توپولوژیک به طور کامل تعریف شده است و با ارائه بحث توپولوژی ضعیف و ضعیف$-*$ ، راه برای تعریف توپولوژی گلفاند باز می شود .

در فصل سوم مبحث اندازه های برداری ارائه می شود و سپس توابع انتگرال پذیر بوخنر معرفی می شوند . مطالبی که در این فصل ارائه می شود کمک شایانی به تعریف فضای $L^p(I, X)$ می نماید .

در فصل چهارم با چشم اندازی به مطالب گذشته فضای $L^p(I, X)$ را تعریف می نماییم و سپس ثابت می کنیم که این فضا با ضرب تعریف شده در آن ، یک جبر باناخ تعویض پذیر است .

در فصل پنجم ، مبحث مضروب ها در جبر های باناخ آورده شده است که مطالب پایه‌ای برای فصل آخر است . در این فصل با استفاده از توپولوژی گلفاند تعریف شده در

فصل دوم ، قضیه بسیار مهمی را اثبات می کنیم .

در فصل آخر ، نگاشت مضروب از $L^p(I,X)$ به $L^p(I,X)$ را تعین می کنیم که مهم ترین کار در این پایان نامه است .

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل به ذکر تعاریف و قضایای مورد نیاز در بقیّهٔ فصول می‌پردازیم . ابتدا فضای توپولوژیک مطرح شده و در ادامه به بحث در مورد نظریه اندازه ها می پردازیم و در پایان به بحث انتگرال لبگ و ارتباط آن با انتگرال ریمان می پردازیم . در این فصل از مراجع [۱], [۸], [۱۷], [۲۰] استفاده شده است .

۱.۱ فضاهای توپولوژیک

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم X مجموعه ای ناتهی باشد . یک توپولوژی [۱] روی X خانواده‌ای مانند τ از زیر مجموعه های X است که شامل X و $\emptyset$ است و تحت اجتماع های دلخواه و اشتراک های متناهی بسته است . اعضای τ را مجموعه های باز و متمم هایشان مجموعه های بسته نامیده می شود .

تعریف ۲.۱.۱ اگر τ یک توپولوژی روی X باشد و $E \subset \tau$ ، در این صورت E یک پایه برای τ است اگر و تنها اگر هرمجموعه ناتهی مانند $U \in \tau$ اجتماعی از اعضای E باشد .

---
[۱] Topology

توپولوژی ترتیبی

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنیم $(X,\prec)$ یک مجموعه مرتب باشد ، یعنی $\prec$ در X تابع اصل تثلیث و متعدی باشد . (یعنی به ازای هر x و y از X همواره یکی و تنها یکی از روابط $x=y$ و $x \prec y$ و $y \prec x$ برقرار باشد) هرگاه a و b دو عضو متمایز X باشند به طوری که $a \prec b$ ، زیر مجموعه های زیر از X را که به بازه موسوم اند چنین

$$(a,b)=\{x|a\prec x\prec b\},\qquad (a,b]=\{x|a\prec x\preceq b\}$$

$$[a,b)=\{x|a\preceq x\prec b\},\qquad [a,b]=\{x|a\preceq x\preceq b\}$$

در نظر می گیریم . در حالتی که $X=\mathbb{R}$ و $\prec=<$ آن گاه بازه های فوق همان بازه های معمولی در $\mathbb{R}$ هستند .

تعریف و قضیه ۴.۱.۱ فرض کنیم $(X,\prec)$ یک مجموعه مرتب باشد. $\mathcal{B}$ را گردایه همه بازه های در X می گیریم که به یکی از سه صورت زیر باشند :

۱) (a,b) ؛

۲) $[a_\circ,b)$ ، که در آن $a_\circ$ ابتدای X (در صورت وجود) است ؛

۳) $(a,b_\circ]$ ، که در آن $b_\circ$ انتهای X (در صورت وجود) است ؛

در این صورت ، $\mathcal{B}$ یک پایه است . توپولوژی را که این پایه تولید می کند توپولوژی ترتیبی در Xمی نامیم.

اثبات : به قضیه ۲ .۱۴ مرجع [۱۷] مراجعه شود. □

نکته ۵.۱.۱ توپولوژی ترتیبی در $\mathbb{R}$ در صورتی که ترتیب همان $<$ (کوچکتری) فرض شود ، بر توپولوژی معمولی $\mathbb{R}$ منطبق می شود.

تعریف ۶.۱.۱ فرض کنیم X و Y فضاهای توپولوژیک و $f : X \to Y$ یک نگاشت باشد . در این صورت f پیوسته نامیده می شود هرگاه به ازای هر مجموعه باز $V \subset Y$ ، $f^{-1}(V)$ در X باز باشد.

تعریف ۷.۱.۱ می گوییم زیر مجموعه K از فضای توپولوژیک (X, τ) فشرده است هرگاه بتوان از هر پوشش باز برای K زیر پوششی متناهی بدست آورد .

تعریف ۸.۱.۱ مجموعه E در در یک فضای توپولوژیک را $\sigma -$ فشرده می نامیم هرگاه E اجتماع شمارش پذیری ار مجموعه های فشرده باشد .

تعریف ۹.۱.۱ نگاشت $f : X \to Y$ بین دو فضای توپولوژیک یک همانریختی [۲] نامیده می شود هرگاه f دوسویی و پیوسته و $f^{-1} : Y \to X$ پیوسته باشد . اگر همانریختی $f : X \to Y$ بین فضاهای توپولوژیک X و Y وجود داشته باشد آن گاه می گوییم X و Y همانریخت هستند .

تعریف ۱۰.۱.۱ فضای توپولوژیک X یک فضای هاسدورف [۳] است در صورتی که شرط زیر برقرار باشد .

هر گاه $p \in X$ و $q \in X$ و $p \neq q$ ، آنگاه p همسایگی مانند U و q همسایگی مانند V داشته باشد به طوری که $U \cap V = \emptyset$.

گزاره ۱۱.۱.۱ هر زیر مجموعه فشرده از یک فضای هاسدورف بسته است .

گزاره ۱۲.۱.۱ اگر X فشرده و Y هاسدورف باشد آن گاه هر نگاشت دو سویی پیوسته مانند $f : X \to Y$ یک همانریختی است .

---

[۲] Homeomorphism
[۳] Hausdorff

تعریف ۱۳.۱.۱ تکیه گاه[۴] تابع مختلط f بر فضای توپولوژیک X بستار مجموعه

$$\{x : f(x) \neq \circ\}$$

می باشد و آن را با $supp(f)$ نشان می دهیم .

تعریف ۱۴.۱.۱ گردایه تمام توابع مختلط پیوسته بر فضای توپولوژیک X را که تکیه گاه فشرده دارند ، با $C_c(X)$ نشان می دهیم .

لم ۱۵.۱.۱ $C_c(X)$ یک فضای برداری است .

اثبات : فرض کنیم $f, g \in C_c(X)$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ باشد.

هرگاه $\alpha \neq \circ$ باشد . آن گاه

$$supp(\alpha f) = \overline{\{x | \alpha f \neq \circ\}} = \overline{\{x | f \neq \circ\}} = supp(f)$$

هرگاه $\alpha = \circ$ باشد . آن گاه

$$supp(\alpha f) = \emptyset$$

همچنین می دانیم که هرگاه f, g پیوسته باشند ،آنگاه $f + g$ پیوسته است و لذا داریم

$$supp\ (f + g) \subseteq (supp\ f) \cup (supp\ g)$$

□

نتیجه ۱۶.۱.۱ برد هر $f \in C_c(X)$ زیر مجموعه ای فشرده از صفحه اعداد مختلط است . به عبارت دیگر هرگاه $K = supp\ f$ ،آنگاه K فشرده است.

تعریف ۱۷.۱.۱ یک فضای توپولوژیک موضعاً فشرده نامیده می شود هرگاه هر نقطه دارای همسایگی با بستار فشرده فشرده باشد.

---

[۴] Suppurt

نماد گزاری ۱۸.۱.۱ نماد $K \prec f$ یعنی K زیر مجموعه ای فشرده از X است و $f \in C_c(X)$ و همچنین به ازای هر $x \in X$ ، $0 \leq f(x) \leq 1$ و به ازای هر $x \in K$ ، $f(x) = 1$.

نماد گزاری ۱۹.۱.۱ نماد $f \prec V$ یعنی V زیر مجموعه ای باز از X و $f \in C_c(X)$ ، $0 \leq f(x) \leq 1$ و همچنین تکیه گاه f در V قرار دارد.

لم ۲۰.۱.۱ (لم اوریسون [5]) فرض کنیم X یک فضای هاسدورف به طور موضعی فشرده ، V در X باز ، $K \subset V$ و K فشرده باشد. در این صورت $f \in C_c(X)$ ای هست به طوری که

$$K \prec f \prec V$$

اثبات : به قضیه ۱۲.۲ مرجع [۲۰] مراجعه شود. □

۲.۱ اندازه

تعریف ۱.۲.۱ گردایهٔ $\mathcal{M}$ از زیرمجموعه‌های X را یک σ– جبر[6] می نامیم اگر $\mathcal{M}$ خواص زیر را داشته باشد :

۱) $X \in \mathcal{M}$ ،

۲) هرگاه $A \in \mathcal{M}$ ، آن‌گاه $A^c \in \mathcal{M}$ که در آن A^c متمم A نسبت به X است ،

۳) اگر $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ و به ازای هر i ، که $i \in \mathbb{N}$ ، $A_i \in \mathcal{M}$ آن‌گاه $A \in \mathcal{M}$.

تعریف ۲.۲.۱ فرض می کنیم X یک مجموعه و $\mathcal{M}$ یک σ–جبر باشد . اعضای $\mathcal{M}$ را مجموعه‌های اندازه‌پذیر در X می‌نامیم و $(X, \mathcal{M})$ را فضای اندازه پذیر[7] می نامیم .

---

[5] Urysohn's lemma
[6] σ – Algebra
[7] Measurable space

قضیه ۳.۲.۱ اگر $\mathcal{F}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد آن گاه کوچکترین σ−جبر در X مانند $\mathcal{M}^*$ موجود است به طوری که $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}^*$.

اثبات : به قضیه۱.۱۰ مرجع [۲۰] مراجعه شود. □

تعریف ۴.۲.۱ فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. بنا به قضیهٔ قبل، کوچکترین σ−جبر مانند $\mathcal{B}$ در X هست چنان که هر مجموعهٔ باز در X، متعلق به $\mathcal{B}$ است. این σ−جبر را σ− جبر بورل [۸] و اعضای $\mathcal{B}$ را مجموعه‌های بورل X می‌نامیم.

تعریف ۵.۲.۱ فرض کنیم $(X, \mathcal{M})$ یک فضای اندازه پذیر و (Y, τ) یک فضای توپولوژیک باشد . تابع $f : (X, \mathcal{M}) \to (Y, \tau)$ را اندازه پذیر است در صورتی که به ازای هر $E \in \mathcal{M}$ داشته باشیم : $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$.

قضیه ۶.۲.۱ فرض کنیم Y و Z فضاهای توپولوژیک بوده و $g : Y \to Z$ پیوسته باشد .

۱)هرگاه X یک فضای توپولوژیک و $f : X \to Y$ پیوسته بوده و $h = gof$. آن گاه $h : X \to Z$ نیز پیوسته است.

۲) هرگاه X یک فضای اندازه پذیر و $f : X \to Y$ اندازه پذیر بوده و $h = gof$. آنگاه $h : X \to Z$ نیز اندازه پذیر است.

اثبات : به قضیه۱۴.۹ مرجع [۲۰] مراجعه شود. □

نتیجه ۷.۲.۱ فرض کنیم X یک فضای اندازه پذیر باشد .

۱) هرگاه $f = u + iv$ که در آن u و v توابعی اندازه پذیر و حقیقی بر X هستند . در این صورت f یک تابع اندازه پذیر مختلط بر X می باشد .

---

[۸] Borel

۲) هرگاه $f = u + iv$ یک تابع اندازه پذیر مختلط بر X باشد . در این صورت u و v و $|f|$ توابعی اندازه پذیر و حقیقی بر X می باشند .

۳) هرگاه fو g توابعی اندازه پذیر مختلط بر X باشند .در این صورت $f + g$ و fg نیز توابعی اندازه پذیر مختلط بر X می باشند.

۴) اگر E یک مجموعه اندازه پذیر از X باشد و

$$\chi_E(x) := \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

آنگاه χ_E یک تابع اندازه پذیر است .(χ_E را تابع مشخصه مجموعه E می نامیم .)

۵)اگر f یک تابع اندازه پذیر مختلط بر X باشد ، یک عدد مختلط مانند α بر X هست به طوری که $|\alpha| = 1$ و $f = \alpha.|f|$

اثبات : به قضیه ۹.۱ مرجع [۲۰] مراجعه‌شود. □

لم ۸.۲.۱ هرگاه E یک مجموعه اندازه پذیر از X باشد ، تابع χ_E خواص زیر را دارا می باشد :

۱) $\chi_\emptyset = 0$ و $\chi_X = 1$

۲) $A \subseteq B$ اگر و فقط اگر $\chi_A \leq \chi_B$

۳) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$

۴) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$

۵) $\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_{A\cap B}$

۶)اگر $\{A_n\}$ دنباله ای از زیر مجموعه های دو به دو جدا از هم X باشد و $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_n$ آن گاه

$$\chi_A = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_n}$$

اثبات : با محاسبه بسیار ساده حکم بدست می آید. □

تعریف **۹.۲.۱** فرض کنیم $(X,\mathcal{B})$ فضای اندازه پذیر بورل و (Y,τ) فضای توپولوژیک باشند . $f:(X,\mathcal{B}) \to (\mathcal{Y},\tau)$ نگاشت اندازه پذیر بورل نامیده می شود هرگاه به ازی هر $V\in\tau$ داشته باشیم $f^{-1}(V)\in\mathcal{B}$.

تعریف **۱۰.۲.۱** فضای اندازه پذیر $(X,\mathcal{B})$ را در نظر می گیریم . اگر $f:X\to Y$ یک نگاشت پیوسته از X به فضای توپولوژیک Y باشد .آن گاه به ازای هر مجموعه باز V در Y ، $f^{-1}(V)\in\mathcal{B}$. به عبارت دیگر ، هر نگاشت پیوسته از X اندازه پذیر بورل می باشد .

قضیه **۱۱.۲.۱** فرض کنیم $\mathcal{M}$ یک $\sigma-$ جبر در X و Y یک فضای توپولوژیک باشد . همچنین f مجموعه X را به توی Y بنگارد .

۱) هرگاه Ω گردایه تمام مجموعه های $E\subset Y$ که $f^{-1}(E)\in\mathcal{M}$ ، آن گاه Ω یک $\sigma-$ جبر در Y است .

۲) هرگاه f اندازه پذیر و E یک مجموعه بورل در Y باشد ، آن گاه $f^{-1}(E)\in\mathcal{M}$.

۳)هرگاه $Y=[-\infty,+\infty]$ و به ازای هر αی حقیقی ، $f^{-1}((\alpha,\infty])\in\mathcal{M}$ ، آن گاه f اندازه پذیر است .

۴) هرگاه f اندازه پذیرو Z یک فضای توپولوژیک و $g:Y\to Z$ یک نگاشت بورل بوده و $h=gof$ ، آن گاه $h:X\to Z$ اندازه پذیر است .

اثبات : به قضیه۱۲.۱ مرجع [۲۰] مراجعه شود. □

تعریف **۱۲.۲.۱** تابع مختلط s بر X که بردش فقط از تعدادی متناهی نقطه تشکیل شده باشد، یک تابع ساده [۹] نام دارد. از جملهٔ این توابع عبارتند از توابع سادهٔ نامنفی که بردشان

[۹] Simple function

زیرمجموعه‌ای متناهی از $[0,\infty)$ است.(توجه‌می کنیم که ما ∞ را صریحاً از مقدار یک تابع ساده خارج کرده‌ایم.) با فرض اینکه $\alpha_1,...,\alpha_n$ مقادیر متمایز تابع ساده s است داریم

$$s=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{A_i}$$

که در آن $A_i=\{x:s(x)=\alpha_i\}$.

قضیه ۱۳.۲.۱ فرض کنیم تابع $f:X\to[0,\infty]$ اندازه‌پذیر باشد. در این صورت، توابع اندازه‌پذیر ساده‌ای چون s_n بر X وجود دارند که:

۱) $0\leq s_1\leq s_2\leq...\leq f$

۲) به ازای هر $x\in X$ ، وقتی $n\to\infty$ ، $s_n(x)\to f(x)$.

اثبات : به قضیه ۱۷.۱ مرجع [۲۰] مراجعه شود. □

تعریف ۱۴.۲.۱ فرض کنیم $(X,\mathcal{M})$ یک فضای اندازه باشد .

۱) یک اندازهٔ مثبت [۱۰] بر $\mathcal{M}$ تابعی مانند μ که بردش در $[0,\infty]$ است با شرایط ذیل می باشد :

i) $A\in\mathcal{M}$ وجود داشته باشد بطوریکه $\mu(A)<\infty$.

ii) جمعی‌شمارشپذیر می‌باشد؛ یعنی، هرگاه $\{A_i\}$ گردایه‌ای شمارشپذیر و از هم جدا از اعضای $\mathcal{M}$ باشد آن‌گاه

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i).$$

۲) هرفضای اندازه، یک فضای اندازه‌پذیر است که یک اندازهٔ مثبت تعریف شده بر σ-جبر مجموعه‌های اندازه‌پذیر خود داشته باشد.

[۱۰] Positive measure