بسم الله الرحمن الرحيم

مرکز تحقیقات ساختمان و مسکن

پژوهشکده ساختمان و مسکن

پایان نامه کارشناسی ارشد

مهندسی عمران – زلزله

تقارن و سیستم های دینامیکی

استاد راهنما:

دکتر علی کاوه

دانشجو:

محمد آقاخانی

زمستان ۱۳۸۲

بسمه تعالی

مرکز تحقیقات ساختمان و مسکن
پژوهشکده ساختمان و مسکن

تاییدیه هیات داوران

آقای محمد آقاخانی پایان‌نامه کارشناسی ارشد ۶ واحدی خود را با عنوان « تقارن و سیستم‌های دینامیکی » که در تاریخ ۱۳۸۲/۱۱/۲۸ ارایه کردند. اعضای هیات داوران نسخه نهایی این پایان‌نامه را از نظر فرم و محتوی تایید و پذیرش آنرا برای تکمیل درجه کارشناسی ارشد رشته مهندسی عمران با گرایش مهندسی زلزله پیشنهاد می‌کنند.

اعضای هیات داوران	نام و نام خانوادگی	امضا
۱- استاد راهنما	آقای دکتر علی کاوه	
۲- استاد مشاور ________	آقای دکتر	
۳- استادان ممتحن خارجی	آقای دکتر غلامرضا قدرتی امیری	
	آقای دکتر ..طارق مهدی..	
۴- مدیر گروه (یا نماینده گروه تخصصی):	آقای دکتر سید کمال چهارطاقی	

۱۳۸۷ /۵/ ۲۵

تقدیم به

پدرم که هرچه دارم از اوست

و

مادرم که هرچه آموختم از اوست

قدردانی:

در ابتدا وظیفه خود می دانم که از تمام کسانیَ که مرا در انجام این پروژه و سایر مراحـل تحصـیل یاری کرده اند ، خصوصاً از زحمات آقای دکتر کاوه که بی کمک ایشان هرگـز قـادر بـه انجـام ایـن پروژه نبودم ، نهایتّ قدردانی و تشکر را بعمل آورم .

چکیده

تقارن در سازه ها از اهمیت ویژه ای برخوردار است، و در بسیاری از موارد استفاده از تقارن در تحلیل سازه ها سبب کاهش حجم عملیات و صرفه جویی در زمان می گردد.

یکی از مهمترین حالات تقارن در سازه ها ، تقارن ماتریسهای سازه ها می باشد. ماتریسهای متقارن خواص جالب و کاربردهای موثری در بهینه یابی ترکیبات سازه ها دارند. از این خواص سودمند در ماتریسهای متقارن می توان به خواص مقادیر ویژه و بردارهای ویژه آنها اشاره داشت. این مقادیر و بردارها کاربردهای مختلفی در مکانیک سازه ها از جمله در ترتیب و افراز مدلها دارند.

در این پایان نامه ابتدا به مقادیر ویژه فرم های مختلف ماتریسهای متقارن و کاربردهای دینامیکی این فرم ها پرداخته شده است و سپس با بررسی پروداکتهای گرافهای خطی و حلقه ای (Cartesian,Strong Cartesian ,Direct Products) و روابط ویژه آنها یک فرم جدید متقارن که با استفاده از پروداکتها بدست آمده ، معرفی شده است .

فهرست مطالب

مقدمه

تقارن یکی از ابزاری است که کاربردهای فراوانی در علوم مختلف از جمله آنالیز سازه‌ها دارد . با بکار بردن این ابزار توانمند و تجزیهٔ سازه‌های بزرگ به اجزای کوچک‌تر و حل آنها به صورت موازی صرفه‌جویی زیادی در حجم و زمان عملیات حاصل خواهد شد.

تقارن را می‌توان به طور کلی به دو صورت مورد بررسی قرار داد :

الف : تقارن هندسی

ب : تقارن در ماتریسهای مربوط به مدل هندسی

تقارن هندسی عمدتاً بر روی شکل هندسی سازه‌ها و نحوهٔ بارگذاری مربوطه تکیه دارد و با بهره جستن از آن عملیات محاسباتی مربوط به سازه مورد نظر به طور قابل توجهی کاهش خواهد یافت . تقارن در ماتریسهای یک مدل به صورت تقارن ریاضی مطرح می‌شود و در ماتریسهای خاص یک مدل مانند لاپلاسین و ماتریسهای خاص یک سازه مانند ماتریس سختی مطرح می‌شود . در این پایان‌نامه با بحث در این مورد ابتدا به بررسی فرمهای مختلف ماتریسهای متقارن ، تطابق با مدلهای تئوری گرافها ، کاربردهای تقارن در مسائل دینامیکی پرداخته شده است و سپس با مطرح کردن Product های گرافهای خاص و مسائل مربوط به مقادیر و بردارهای ویژه آنها ، یک فرم تقارن جدید به نام P-Form که تلفیقی از تقارن و Product های گرافها می‌باشد معرفی شده است .

فصل اول

فرم های مختلف ماتریسهای متقارن

حالت عمومی تقارن ماتریسها و طرز یافتن ساده‌تر مقادیر ویژه آنها :

در حالت کلی سه فرم برای ماتریسهای متقارن مطرح می‌گردد که فرم اول حالتی از فرم دوم بوده و فرم سوم حالت عمومی‌تری نسبت به دو فرم قبلی دارد . البتــه فرمهـای دیگـری نیـز بـرای تقـارن ماتریسها مطرح می‌شود که در این پایان‌نامه تنها به یکی از این موارد پرداخته شده است.

فرم I :

فرم اول به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$M = \begin{bmatrix} [A]_{n\times n} & [O]_{n\times n} \\ [O]_{n\times n} & [A]_{n\times n} \end{bmatrix}_{N\times N}$$

که N=2n می‌باشد .

در این حالت مقادیر ویژه ماتریس M حاصل اجتماع مقادیر ویژه زیر ماتریس A می‌باشد یعنی

$$\{\lambda M\} = \{\lambda A\} \cup \{\lambda A\}$$

که رابطه فوق با توجه به اینکه دترمینـان مـاتریس M برابـر حاصلضـرب دترمینـان مـاتریس A در خودش می‌باشد . ($\det[M] = \det[A] \times \det[A]$) قابل اثبات است .

با تعمیم دادن فرم I به رابطه زیر برای ماتریسهای روی قطر اصلی ماتریس اصلی (M) می‌رسیم :

$$\{\lambda M\} = \{\lambda A_1\} U \{\lambda A_2\} U \ldots U \{\lambda A_m\}$$

که در آنها $\det[M] = \det[A_1] \times \det[A_2] \times \ldots\ldots \times \det[A_m]$ خواهد بود .

فرم II :

فرم دوم تقارن به صورت

$$M = \begin{bmatrix} [A]_{n\times n} & [B]_{n\times n} \\ [B]_{n\times n} & [A]_{n\times n} \end{bmatrix}_{N\times N}$$

مطرح می‌شود که در آن N=2n بوده و ماتریس فوق حالت کلی فرم I می‌باشد که در آن ماتریس $[B]$ جایگزین ماتریس صفر شده است .

در این حالت دو ماتریس به صورت زیر تعریف می‌گردد :

$$[C]=[A]+[B] \qquad \text{و} \qquad [D]=[A]-[B]$$

که با انجام عملیات زیر بر روی سطرها و ستونهای ماتریس اصلی خواهیم داشت :

$$M=\begin{bmatrix}[A] & [B]\\ [B] & [A]\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}[A+B] & [B]\\ [A+B] & [A]\end{bmatrix}$$

ستون دوم به ستون اول اضافه می‌شود.

$$\begin{bmatrix}[A+B] & [B]\\ [o] & [A-B]\end{bmatrix}$$

سطر اول از سطر دوم کسر می‌شود .

$$\begin{bmatrix}[C] & [B]\\ [o] & [D]\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Det[M]=Det[C]\times Det[D]$$

و در نتیجه :

$$\{\lambda M\}=\{\lambda C\}\cup\{\lambda D\}$$

به عنوان مثال ماتریس ۴×۴ زیر بررسی می‌شود :

$$\left[\begin{array}{cc|cc}10 & 15 & 8 & 2\\ 16 & 20 & 4 & -3\\ \hline 8 & 2 & 10 & 15\\ 4 & -3 & 16 & 20\end{array}\right]$$

که در آن :

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 16 & 20 \end{bmatrix}$$

و

$$B = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

در نتیجه :

$(18-\lambda)(17-\lambda) = 20 \times 17$

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 18 & 17 \\ 20 & 17 \end{bmatrix} \rightarrow \{\lambda C\} = \{35.9459 \quad , \quad -0.9459\}$$

$$D = A - B = \begin{bmatrix} 18 & 17 \\ 20 & 17 \end{bmatrix} \rightarrow \{\lambda D\} = \{-3.8172 \quad , \quad 28.8172\}$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$\{\lambda M\} = \{-3.8172 \quad , \quad 28.8172 \quad , \quad -0.9459 \quad , \quad 35.9459\}$$

که به جای پیدا کردن مقادیر ویژه یک ماتریس ۴×۴ که دشوارتر است ، مقادیر ویژه دو ماتریس کوچکتر ۲×۲ را پیدا کرده و به نتیجه مشابهی در زمان کوتاهتر و با عملیات کمتر می‌رسیم .

فرم III :

فرم سوم حالت عمومی‌تری نسبت به فرمهای قبلی دارد و به صورت زیر مطرح می‌شود و در آن $[M]$ یک ماتریس $(2n+N)\times(2n+N)$ با یک زیر ماتریس متقارن $2n \times 2n$ فرم II می‌باشد.

$$M=\left[\begin{array}{ccc|cccc} [A]_{n\times n} & & [B]_{n\times n} & L_1 & \cdots & & L_{2n+N} \\ & & & L_1 & \cdots & & L_{2n+N} \\ & & & \vdots & & & \vdots \\ [B]_{n\times n} & & [B]_{n\times n} & & & & \\ & & & L_1 & \cdots & & L_{2n+N} \\ \hline C_{(2n+1,1)} & \cdot & C_{(2n+1,2n)} & C_{(2n+1,2n+1)} & \cdots & & C_{(2n+1,2n+N)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{(2n+N,1)} & \cdot & Z_{(2n+N,2n)} & Z_{(2n+N,2n+1)} & \cdot & & Z_{(2n+N,2n+N)} \end{array}\right]$$

در این حالت با انجام عملیات زیر بر روی سطرها و ستونهای ماتریس M خواهیم داشت :

$$\begin{bmatrix} [A] & [B] & * & * \\ [B] & [A] & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} [A] & * & * & [B] \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ [B] & * & * & [A] \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} [A]+[B] & * & * & [B] \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ [B]+[A] & * & * & [A] \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} [A]+[B] & * & * & [B] \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \hline o & o & o & [A]-[B] \end{array}\right] \Rightarrow M=\left[\begin{array}{c|c} [E] & [K] \\ \hline [o] & [D] \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \det[M]=\det[D]\times\det[E]$$

$$\Rightarrow \{\lambda M\}=\{\lambda D\}\cup\{\lambda E\}$$

که D همانند فرم II به صورت $[D]=[A]-[B]$ بوده و ماتریس $[E]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E=\left[\begin{array}{cccc|cccc}
\multicolumn{4}{c|}{[A]_{n\times n}+[B]_{n\times n}} & L_1 & \cdots & \cdots & L_{2n+N}\\
 & & & & L_1 & \cdots & \cdots & L_{2n+N}\\
 & & & & \vdots & & & \vdots\\
\hline
 & & & & L_1 & \cdots & \cdots & L_{2n+N}\\
C_{(2n+1,1)}+C_{(2n+1,2n)} & \cdot & \cdots & & C_{(2n+1,2n+1)} & \cdots & \cdots & C_{(2n+1,2n+N)}\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots\\
Z_{(2n+N,1)} & \cdot & Z_{(2n+N,2n)} & & Z_{(2n+N,2n+1)} & & \cdot & Z_{(2n+N,2n+N)}
\end{array}\right]$$

بنابراین مشاهده می‌شود که ماتریس M به دو زیر ماتریس کوچکتر D,E تقسیم می‌شود که سبب کاهش حجم عملیات می‌گردد ، به عنوان مثال عددی می‌توان به مثال زیر توجه کرد :

$$M=\left[\begin{array}{cc|cc|c}
-1 & 0.5 & -0.7 & -0.7 & -10.3\\
3 & 4 & 0.8 & 0.9 & -10.3\\
\hline
-0.7 & -0.7 & -1 & 0.5 & -10.3\\
0.8 & 0.9 & 3 & 4 & -10.3\\
\hline
-11.3 & -12.3 & -13.3 & 1.3 & -5.7
\end{array}\right]$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0.5\\ 3 & 4\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}-0.7 & -0.7\\ 0.8 & 0.9\end{bmatrix}$$

در نتیجه :

$$D=\begin{bmatrix}-1 & 0.5\\ 3 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-0.7 & -0.7\\ 0.8 & 0.9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.3 & 1.2\\ 2.2 & 3.1\end{bmatrix}$$

$$\{\lambda D\}=\{-0.9516 \quad , \quad 3.7516\}$$

$$E=\left[\begin{array}{cc:c} -1-0.7 & 0.5-0.7 & -10.3\\ 3+0.8 & 4+0.9 & -10.3\\ \hdashline -13.3-11.3 & -12.3+1.3 & -5.7\end{array}\right]=\begin{bmatrix}-1.7 & -0.2 & -10.3\\ 3.8 & 4.9 & -10.3\\ -24.6 & -11 & -5.7\end{bmatrix}$$

$$\{\lambda E\}=\{1.6224 \quad , \quad 17.6885 \quad , \quad -21.8109\}$$

لذا مقادیر ویژه ماتریس M برابر خواهد بود با :

$$\{\lambda M\}=\{-0.9516 \quad , \quad 3.7516 \quad , \quad 1.6224 \quad , \quad 17.6885 \quad , \quad -21.8109\}$$

ماتریس لاپلاسین گرافها و نحوه پیدا کردن مقادیر ویژه آنها :

حالت خاصی از ماتریسهای متقارن که سه فرم تقارن آنها در بالا آمد ، ماتریسهای لاپلاسین یک گراف می‌باشد که در این زمینه از تئوری‌گرافها و همچنین تئوری جبری گرافها استفاده می‌شود. تئوری‌گرافها از مدتها پیش مورد استفاده قرار گرفته است و کاربردهای فراوانی در مکانیک سازه‌ها و در ترتیب (Ordering) برای مسائل بهینه‌سازی دارد .

در تئوری جبری‌گرافها به عنوان شاخه‌ای از تئوری‌گرافها به بررسی مقادیر و بردارهای ویژه ماتریسهای مربوط به گرافها برای پی بردن به خواص ویژه و جالب آنها پرداخته شده است . این مقادیر ویژه در واقع ارتباط زیادی با تئوری‌گرافها دارند و در حقیقت نقش بسیار مهمی را درک پایه‌ای گرافها ایفا می‌کنند که در این زمینه به کتب فراوانی که افراد زیادی از جمله Biggs ، Cvetkovic ، Seidel ، Chung ، در زمینه تئوری جبری گرافها نوشته‌اند می‌توان مراجعه کرد .

استفاده اولیه از تئوری جبری گرافها در ترتیب توسط Grime و دیگران برای بدست آوردن یک الگوی مناسب برای آغاز شماره‌گذاری گره‌ها و Kaveh در ترتیب گره‌ها برای کاهش عرض نوار در ماتریسهای سختی بوده است که در این روشها بزرگترین بردار ویژه ماتریس همسایگی گراف بکار رفته است .

یکی از مهمترین ویژگیهایی مورد استفاده در تئوری جبری گرافها که توسط Fiedler تحت عنوان اتصال جبری گرافها مطرح شد، خواص مقادیر و بردارهای ویژه دوم لاپلاسین یک گراف می‌باشد . خواص بردار ویژه دوم که به بردار Fiedler معروف است در تقسیم کردن گرافها و ترتیب گره‌ها کاربرد فراوانی دارد .

تعریف لاپلاسین ، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه :

فرض کنیم G (N,M) یک گراف با N گره و M عضو باشد .

ماتریس همسایگی (Adjacency matrix) یک گراف به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$A = [a_{i,j}]_{n\times n} \Rightarrow a_{i,j} \begin{cases} 1 & \text{اگر گره } n_i \text{ همجوار و متصل به گره } n_j \text{ باشد :} \\ 0 & \text{سایر موارد :} \end{cases}$$

ماتریس قطری D که ماتریس درجه (degree matrix) نامیده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$D = [d_{i,j}]_{n\times n} \Rightarrow d_{i,j} \begin{cases} 0 & : i \neq j \\ i & \text{تعداد گره‌های مرتبط با } i \quad : i = j \end{cases}$$

و در نهایت ماتریس لاپلاسین یک گراف به صورت زیر تعریف می‌گردد :

$$L=D-A$$

که رابطه فوق را می‌توان به صورت زیر مطرح کرد :

$$L=\left[l_{i,j}\right]_{n\times n} \Rightarrow l_{i,j}=\begin{cases} -1 & \text{اگر گره } n_i \text{ همجوار و متصل به گره } n_j \text{ باشد :} \\ i \text{ تعداد گره‌های مرتبط با } & : i=j \\ 0 & \text{سایر موارد :} \end{cases}$$

که در آن A ماتریس مورد نظر ، μ_i مقدار ویژه iام و ϕ_i بردار ویژه متناظر با آن می‌باشد . هنگامیکه $An\times n$ یک ماتریس حقیقی متقارن باشد تمام مقادیر ویژه آن نیز حقیقی و به صورت $\mu_1 \le \mu_2 \le .... \le \mu_{n-1} \le \mu_n$ خواهد بود .

که بزرگترین مقدار ویژه (μ_n) ریشهٔ منفرد معادله مشخصه ماتریس A است و بردار ویژه متناظر با آن (ϕ_n) تنها بردار ویژه‌ای است که همهٔ درایه‌های آن حتماً مثبت می‌باشند . این بردار خواص جالبی دارد که در مکانیک سازه‌ها کاربرد فراوان دارد و از خواص ϕ_n در موارد زیادی از جمله روش ۴ مرحله‌ای Kaveh برای بهینه‌سازی پهنای باند ماتریسهای سازه‌ای استفاده می‌شود .

به دلیل اینکه ماتریس لاپلاسین یک ماتریس حقیقی و متقارن است لذا تمام مقادیر ویژه آن نیز حقیقی می‌باشند . علاوه بر آن کلیه مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین مثبت نیز هستند یعنی :

$$0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le .... \le \lambda_{n-1} \le \lambda_n$$

که در آن λ_i مقدار ویژه iام ماتریس لاپلاسین است .

همانطور که گفته شد . مقادیر ویژه دوم (λ_2) و بردارهای دوم (V_2) متناظر با آن خواص جالبی دارند که توسط Fiedler مطرح گردید . Mohar مقادیر λ_2, V_2 را در مسائل مختلفی از جمله پارتیشن بندی گرافها و ترتیب گرافها بکار برده است . همچنین بردار (V_2) برای شماره‌گذاری گره‌ها

و ترتیب اعضای یک گراف مورد استفاده واقع می‌شود . Pothen و دیگران ، Simon ، Seale ، Topping و Kaveh خواص بردار (V_2) را در پارتشین بندیهای ویژه گراف‌ها بکار برده‌اند .

سه فرم لاپلاسین یک گراف و مقادیر ویژه آنها :

برای لاپلاسین گرافها و نیز مقادیر ویژه آنها سه فرم تعریف شده قابل بررسی می‌باشد که در زیر آمده است :

فرم I:

فرم اول به صورت دو گراف مجزا از یکدیگر می‌باشند که در این حالت لاپلاسین هر یک از این گرافها به طور مجزا بر روی قطر اصلی لاپلاسین گراف اصلی قرار می‌گیرند و بقیه درایه‌ها صفر خواهند بود .

فرم II :

برای نشان دادن این حالت به بررسی مثال زیر می‌پردازیم :