
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ی علوم ریاضی

گروه ریاضی

گرایش محض

نیم گروه های معکوس توپولوژیکی وگسترش های برانت

از

رحمان حسن زاده

استاد راهنما

دکتر عباس سهله

بهمن ماه ۱۳۹۲

تقدیم به:

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

خدای را بسی شاکرم که از روی کرم پدر و مادری فداکار نصیبم ساخته تا در سایه درخت پر بار وجودشان بیاسایم و از ریشه آنها شاخ و برگ گیرم و از سایه وجودشان در راه کسب علم ودانش تلاش نمایم .

تقدیم به همسرم

به پاس قدر دانی از قلبی آکنده از عشق و معرفت که محیطی سرشار از سلامت و امنیت و آرامش و آسایش برای من فراهم آورده است.

همچنین از فرزند دلبندم **یاسمن** تشکر می نمایم که صبورانه و صادقانه من را همراهی نموده است تا بتوانم در کمال آرامش و آسایش به تهیه و تنظیم پایان نامه بپردازم.

تقدیر و تشکر:

با سپاس به درگاه خداوند متعال که به من توفیق انجام این پایان نامه را عنایت فرمود.

بدین وسیله، از استاد راهنمای گرامی ، **دکتر عباس سهله** ، به خاطر زحمات فراوان و راهنمایی های به جا در طول انجام این پایان نامه قدر دانی می کنم . همچنین برای ایشان و سایر اساتید محترم ، که در طول این دوره از محضرشان بهره بردم ،آرزوی سلامت و توفیقات بیش از پیش را دارم.

چکیده:

نیم گروه های معکوس توپولوژیکی اولیه و گسترش های برانت

رحمان حسن زاده

در این پایان نامه ، ما نشان می دهیم اگر S یک نیم گروه معکوس توپولوژیکی و I_λ یک مجموعه با عدد اصلی λ که $\lambda \geq 1$، آنگاه $B_\lambda(S)$ را $\lambda-$ گسترش برانت نیم گروه توپولوژیکی می گویند. و ما نیم گروه های توپولوژیکی (مطلقا) H بسته را بیان می کنیم . همچنین ما نشان می دهیم اگر S یک نیم گروه توپولوژیکی و e یک خود توان از S باشد آنگاه eSe یک نیم گروه توپولوژیکی H بسته است.

کلمات کلیدی:

نیم گروه معکوس،نیم گروه توپولوژیکی ،نیم گروه معکوس توپولوژیکی، λ^0-گسترش نیم گروه معکوس توپولوژیکی، ، نیم گروه توپولوژیکی مطلقا H بسته و H بسته

فهرست

عنوان .... **صفحه**

مقدمه:

در این پایان نامه تمام فضاها فضای هاسدورف است.اگر S یک نیم گروه معکوس توپولوژیکی و I_λ یک مجموعه با عدد اصلی λ که $\lambda \geq 1$ باشد.عمل نیم گروهی را روی مجموعه $B_\lambda(S) = (I_\lambda \times S \times I_\lambda) \cup \{0\}$ تعریف می شود و $B_\lambda(S)$ را $\lambda-$ گسترش برانت توپولوژیکی گویند.هدف این پایان نامه بررسی نیم گروه های معکوس و $\lambda-$ گسترش نیم گروه های معکوس توپولوژیکی ونیم گروه های توپولوژیکی مطلقا H بسته و H بسته می باشد.

در فصل اول تعاریف و قضایای مورد نیاز توپولوژیکی ارایه می گردد.

در فصل دوم روابط گرین و نیم گروه های معکوس تعریف وسپس به بیان قضایا و مثال ها ارایه می گردد.

در فصل سوم ابتدا λ^0- گسترش نیم گروه های توپولوژیکی با صفر و خواص آنها بررسی می گردد وسپس نیم گروه توپولوژیکی مطلقا H بسته و H بسته را بررسی قرار می گیرد.

و در آخر λ^0- گسترش برانت توپولوژیکی H بسته را بررسی کردیم.

این پایان نامه بر مبنای مقاله ی [1] است.

نحوه شماره گذاری به صورت زیر است:

ابتدا شماره ی فصل و شماره ی بخش و در نهایت شماره ی زیر بخش ذکر می شود.مانند تعریف (۳-۲-۵) نوشته شده که بیان کننده زیر بخش ۵ از بخش ۲ از فصل ۳ می باشد.

فصل اول

تعاریف

و

قضایای مقدماتی

در این فصل تعاریف و قضایای راکه در فصل های بعد مورد استفاده قرار می گیرند را بیان می‌کنیم.

تعاریف ، مثال ها و قضایای این فصل از منابع [2]و[9] و[10] است .

تعریف (۱-۱-۱) :

مجموعه غیر تهی S با عمل دوتایی (.)را یک نیم گروه گویند هرگاه نسبت به این عمل بسته و شرکت پذیر باشد. یعنی بازای هر $x,y,z\in S$ داشته باشیم :

$$x.y\in S \quad \text{و} \quad x.(y.z)=(x.y).z$$

تعریف (۱-۱-۲) :

نیم گروه Sرا تعویض پذیر گویند. هرگاه به ازای هر $x,y\in S$ داشته باشیم :

$$x.y=y.x$$

تعریف (۱-۱-۳) :

اگر یک نیم گروه S شامل عنصر 1 باشد با این خاصیت که به ازای هر $x.1=1.x=x,(x\in S)$ در این صورت 1 را عنصر همانی S می گوییم در این حالت S یک نیم گروه با همانی 1، یا یک تکوار نامیده می شود.

تعریف (۱-۱-۴) :

عنصر $\mathrm{e}\in \mathrm{S}$ را یک عنصر خود توان گویند هرگاه $\mathrm{e}^2=\mathrm{e}$. مجموعه تمام خود توان های یک نیم گروه S را با E(S) یا E نشان می دهند.

تعریف (۱-۱-۵) :

فرض کنید S یک نیم گروه باشد و S عنصر همانی نداشته باشد با اضافه کردن عنصر 1 به S با این ویژگی که بازای هر $x\in S$

$$1.x=x.1=x \ , \ 1.1=1$$

آنرا S^1را می نامیم در واقع: $\mathrm{S}^1=\mathrm{S}\bigcup\{1\}$ ولذا $\mathrm{E}(\mathrm{S}^1)=\mathrm{E}(\mathrm{S})\bigcup\{1\}$

و اگر S عنصر صفر نداشته باشد آنگاه عنصری که آنرا 0 با ویژگی زیر را به S اضافه می کنیم و آنرا S^0 می نامیم.

$$0.x=x.0=0 \ , \ 0.0=0$$

در واقع:

$$S^0=S\bigcup\{0\}\ ,\ E(S^0)=E(S)\bigcup\{0\}$$

تعریف (۱-۱-۶) :

فرض کنید S یک نیم گروه باشد عنصر $x\in S$ را صفر چپ گویند هرگاه به ازای هر $\mathrm{y}\in \mathrm{S}$ داشته باشیم :

$$xy = x$$

و مشابها عنصر $x \in S$ را صفر راست گویند هرگاه به ازای هر $y \in S$ داشته باشیم :

$$yx = x$$

اگر $x \in S$ هم صفر راست و هم صفر چپ باشد آن را عنصر صفر گویند.

تعریف (۱-۱-۷) :

برای دو مجموعه B , A از زیر مجموعه های نیم گروه S ، ضرب آنها را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$AB = \{ab \mid a \in A , b \in B\}$$

تعریف (۱-۱-۸) :

نیم گروه S را یک گروه گویند در صورتی که شرایط ذیل بر قرار باشند.

الف- وجود دارد $e \in S$ به ازای هر $a \in S$ ، $ea = a$

ب- به ازای هر $a \in S$ وجود دارد $a^{-1} \in S$ ، $a^{-1}a = e$

حکم(۱-۱-۹):

S یک گروه است اگر و تنها اگربه ازای هر $a \in S$ داشته باشیم : $Sa = S, aS = S$

تعریف (۱-۱-۱۰) :

اگر G یک گروه باشد آنگاه $G^0 = G \bigcup \{0\}$ یک نیم گروه است و G^0 را 0- گروه یا گروه با صفر گویند..

قضیه (۱-۱-۱۱) :

اگر S نیم گروه با صفر باشد آنگاه S یک 0- گروه است اگر و تنها اگر

به ازای هر $a \in S \setminus \{0\}$ داشته باشیم :

$$aS = S \ , \ Sa = S$$

تعریف (۱-۱-۱۲) :

فرض کنید S یک نیم گروه باشد و T یک زیر مجموعه ناتهی از S باشد T را یک زیر نیم گروه S گویند هرگاه

به ازای هر $x, y \in T$ داشته باشیم : $x . y \in T$

تعریف (۱-۱-۱۳) :

فرض کنید S یک نیم گروه باشد. یک زیر مجموعه غیر تهی A از S یک ایده آل چپ نامیده می شود

اگر $SA \subseteq A$ باشد. A ایده آل راست نامیده می شود اگر $AS \subseteq A$ باشد.

A ایده آل (دوطرفه) نامیده می شود اگر هم ایده آل راست و هم ایده آل چپ باشد. بدیهی است که هر ایده آل (چپ یا راست) از یک نیم گروه یک زیر نیم گروه است ولی عکس این مطلب بر قرار نیست. یعنی $T \subseteq S$ می تواند زیر نیم گروه S باشد ولی در S ایده آل نباشد. اگر S یک نیم گروه باشد آنگاه خود S یک ایده آل از S است.

و اگر S شامل 0 باشد آنگاه $\{0\}$ نیز یک ایده آل از S است. که در این حالت $\{0\}$ کوچکترین و S بزرگترین ایده آل S است.

تعریف (۱-۱-۱۴) :

ایده آل I را یک ایده آل سره گویند هرگاه $I \neq S, I \subseteq S$ باشد. در صورتی که S شامل صفر باشد باید

$$I \neq S, \{0\} \ , \{0\} \subseteq I \subseteq S$$

تعریف (۱-۱-۱۵) :

اگر a یک عنصر از نیم گروه S باشد. کوچکترین ایده آل چپ S شامل a را ایده آل چپ تولید شده توسط a گویند.

و به سادگی می توان نشان داد که برابر $Sa \bigcup \{a\}$ است. و لذا برابر S^1a می باشد.

کوچکترین ایده آل راست S شامل a، را ایده آل راست تولید شده توسط a گویند. و به سادگی می توان نشان داد که برابر $aS \bigcup \{a\}$ است. و لذا برابر aS^1 می باشد.

وایده آل (اصلی) دو طرفه تولید شده توسط a عبارت از S^1aS^1 است.

تعریف (۱-۱-۱۶) :

اگر $E(S) = S$ آنگاه S را یک باند گویند.

تعریف (۱-۱-۱۷) :

اگر S یک باند تعویض پذیر باشد آنگاه S نیم شبکه نامیده می شود بنابراین اگر S یک نیم شبکه باشد.

به ازای هر $x, y \in S$ داریم :

$$x^2 = x \quad , \ xy = yx$$

مثال (۱-۱-۱۸) :

اگر S_2, S_1 دو مجموعه ناتهی باشند آنگاه $S_1 \times S_2$ با ضربی که به صورت $(s_1, s_2)(t_1, t_2) = (s_1, t_2)$ تعریف می شود یک نیم گروه خود توان است. یک مثال از نیم شبکه مجموعه $\{0,1\}$ است که 0 عنصر صفر و یک عنصر همانی می باشد.

هر مجموعه مرتب کلی با ضرب $xy = \min\{x, y\}$ مثال دیگری از نیم شبکه می باشد.

تعریف (۱-۱-۱۹) :

یک نیم گروه S یک باند مستطیلی است هرگاه به ازای هر $a, b \in S$ داشته باشیم :

$$aba = a$$

قضیه (۱-۱-۲۰) :

فرض کنید S یک نیم گروه باشد شرطهای زیر هم ارزند.

(1) S یک باند مستطیلی است.

(2) هر عنصر غیر صفر S خود توان است و برای هر $abc = ac \ , \ a,b,c \in S$

(3) وجود دارد یک نیم گروه صفر چپ L و یک نیم گروه صفر راست R به طوری که $\mathrm{S} \cong \mathrm{L} \times \mathrm{R}$

(4) S یکریخت با نیم گروه A × B است که A , B مجموعه های غیر تهی هستند و ضرب آنها به صورت زیر تعریف می شود.

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1, b_2)$$

اثبات (۱ $\Leftarrow$ ۲) :

فرض کنید $a \in S$ بنابراین از (1) داریم $a^4 = a^2 \ , \ a^3 = a$ دوباره از (1) داریم $a = a(a^2)a = a^4$

بنابراین $a^2 = a$ ، حال فرض کنید $a,b,c \in S$ از(1) داریم $c = cbc \ , \ a = aba$ و $b = b(ac)b$ بنابراین

$$ac = (aba)(cbc) = a(bacb)c = abc$$

اثبات (۲ $\Leftarrow$ ۳) :

یک عنصر ثابت $\mathrm{c} \in \mathrm{S}$ انتخاب می کنیم فرض کنید $\mathrm{R} = \mathrm{cS} \ , \mathrm{L} = \mathrm{Sc}$ بنابراین (2) ما دیدیم که

برای هر $y = tc \ , x = zc$ در L داریم :

$$xy = zctc = zc^2 = zc = x$$

و بنابراین L یک نیم گروه صفر چپ است و مشابهاً ثابت می شود که R یک نیم گروه صفر راست است.

تعریف می کنیم. $\varphi : \mathrm{S} \to \mathrm{L} \times \mathrm{R}$ را به صورت $\varphi(x) = (xc, cx)$ بنابراین φ یک به یک است زیرا :

$$\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow (xc, cx) = (yc, cy)$$

بنابراین از (۲) داریم :

$$x = x^2xvx = ycx = ycy = y^2 = y$$

همچنین φ پوشاست زیرا برای هر $(ac,cb)\in L\times R$ ما با استفاده از شرط (2) می توانیم ببینیم که :

$$(ac,cb)=(abc,cab)=\varphi(ab)$$

نهایتاً ثابت می کنیم که φ یک همومورفیسم است زیرا برای هر $x,y\in S$

$$\varphi(xy)=(xyc,cxy)=(xc,cy)=(xcyc,cxcy)=$$
$$(xc,cx)(yc,cy)=\varphi(x)\varphi(y)$$

اثبات (۳ $\Leftarrow$ ۴):

فرض کنید که $\mathrm{S}=\mathrm{L}\times\mathrm{R}$ که L یک نیم گروه صفر چپ و R یک نیم گروه صفر راست است.

بنابراین چون ضرب دو عنصر $(c,d),(a,b)$ در S به صورت زیر تعریف می شود.

$$(a,b)(c,d)=(ac,bd)=(a,d)$$

کافیست در نظر بگیریم $\mathrm{B}=\mathrm{R},\mathrm{A}=\mathrm{L}$

اثبات (۴ $\Leftarrow$ ۱) :

فرض کنید $\mathrm{S}=\mathrm{A}\times\mathrm{B}$ با ضرب داده شده برای هر $b=(z,t),a=(x,y)\in S$

$$aba=(x,y)(z,t)(x,y)=(x,t)(x,y)=(x,y)=a$$

واژه مستطیل از خاصیت (4) می آید اگر ما فرض کنیم (a,b) , (c,d) نقاطی از صفحه مختصات دکارتی باشند.

ضرب $(c,d)(a,b),(a,b)(c,d)$ در رأس مستطیل قرار می گیرند.

تعریف (۱-۱-۲۱) :

رابطه دوتایی ω روی یک مجموعه X (یعنی ω یک زیر مجموعه از $X\times X$) را مرتب جزیی گوییم

در صورتی که شرایط ذیل برقرار باشند.

۱) به ازای هر x در X ، $(x,x)\in\omega$ (بازتابی)

۲) به ازای هر y,x در X اگر $(y,x)\in\omega,(x,y)\in\omega$ آنگاه $x=y$ (یا متقارن)

۳) به ازای هر z,y,x در X اگر $(y,z)\in\omega$, $(x,y)\in\omega$ آنگاه $(x,z)\in\omega$ (تعدی)

یک مجموعه مرتب جزئی (X,ω) را مجموعه مرتب کلی گویند در صورتی که در شرط ذیل صدق کند.

به ازای هر y,x در X ، $(x,y)\in\omega$ یا $(y,x)\in\omega$

علامت $x\le y$ را به جای $(x,y)\in\omega$ به کار می بریم.

تعریف (۱-۱-۲۲) :

اگر S یک نیم گروه باشد به ازای هر $e,f \in E(S)$ رابطه ی $\leq$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$e \leq f$ اگر و تنها اگر $ef = fe = e$

لم (۱-۱-۲۳) :

رابطه ی $\leq$ روی $E(s)$ مرتب جزئی می باشد.

اثبات :

برای هر $e \in E(S)$ داریم $e^2 = e$ و بنابراین $e \leq e$ (بازتابی) اگر $f \leq e, e \leq f$ بنابراین $e = ef = f$ (پاد متقارن)

اگر $f \leq h, e \leq f$ بنابراین

$e = fe = hfe = he \quad , \quad e = ef = efh = eh$ و بنابراین $e \leq h$ (تعدی)

تعریف (۱-۱-۲۴) :

فرض کنید Y یک زیر مجموعه ناتهی از مجموعه مرتب جزئی $(X, \leq)$ باشد یک عضر a از Y را مینیمال گویند اگر برای هر $y \in Y$ ، $y \leq a$ ایجاب کند $y = a$ یک عضو b از Y را مینیمم گویند اگر به ازای هر $y \in Y$ ، $b \leq y$

تبصره (۱-۱-۲۵) :

فرض کنید Y یک زیر مجموعه ناتهی از یک مجموعه مرتب جزیی X باشد. آنگاه :

(۱) Y حداکثر یک عضو مینیمم دارد.

(۲) اگر Y مرتب کلی باشد آنگاه عبارتها مینیمال و مینیمم یکی می باشند.

تعریف (۱-۱-۲۶) :

فرض کنید Y یک زیر مجموعه ناتهی از $(X, \leq)$ باشد. عضو c از X را کران پایین از Yگویند اگر برای هر $y \in Y$، $c \leq y$

تعریف (۱-۱-۲۷) :

اگر مجموعه کران های پایین Y ناتهی باشد و d عضو ماکزیمم آن باشد آنگاه d را بزرگترین کران پایین Y می نامیم و واضح است که d در صورت وجود منحصر به فرد است. بزرگترین کران پایین Y را در صورت وجود با $d = \wedge\{y; y \in Y\}$ نشان می دهیم در صورتی که $Y = \{a,b\}$ آنگاه به جای $\wedge\{y; y \in Y\}$ می نویسیم

$$a \wedge b$$

اگر در مجموعه مرتب جزیی $(X, \leq)$ به ازای هر b,a در X ، $a \wedge b$ وجود داشته باشد. در این صورت $(X, \leq)$را

یک نیم شبکه پایینی گویند. اگر خاصیت قوی تر اینکه $\wedge\{y, y \in Y\}$ برای هر زیر مجموعه ناتهی Y از X وجود داشته باشد. در این صورت $(X, \leq)$ را یک نیم شبکه پایینی کامل گویند. در نیم شبکه های پایینی

برای هر a , b در X $a \wedge b = a$ اگر و تنها اگر $a \leq b$

تعریف (۱-۱-۲۸) :

فرض کنید Y یک زیر مجموعه ناتهی از $(X, \leq)$ باشد. عضو c از X را کران بالای از Y گویند.

اگر برای هر $(y \in Y)$، $(y \leq c)$

تعریف (۱-۱-۲۹) :

اگر مجموعه کران های بالا Y ناتهی باشد و d عضو مینیمم آن باشد. آنگاه d را کوچکترین کران بالا Y می نامیم ، واضح است که d در صورت وجود منحصر به فرد است. کوچکترین کران بالا Y را در صورت وجود با $d = \vee\{y, y \in Y\}$ نشان می دهیم در صورتی که $Y = \{a, b\}$ آنگاه به جای $\vee\{y, y \in Y\}$ می نویسیم $a \vee b$

اگر در مجموعه مرتب جزیی $(X, \leq)$ به ازای هر b, a در X ، $a \vee b$ وجود داشته باشد. در این صورت $(X, \leq)$ یک نیم شبکه بالایی گویند.

اگر خاصیت قوی تر اینکه $\vee\{y, y \in Y\}$ برای هر زیر مجموعه ناتهی Y از X وجود داشته باشد. در این صورت $(X, \leq)$ یک نیم شبکه بالایی کامل گویند.

هر گاه $(X, \leq)$ یک نیم شبکه بالایی کامل و یک نیم شبکه پایینی کامل باشد. آنگاه $(X, \leq, \wedge, \vee)$را یک شبکه کامل گویند.

تعریف (۱-۱-۳۰) :

فرض کنید $X = (X, \leq, \wedge, \vee)$ یک شبکه باشد یک زیر مجموعه ناتهی Y از X را یک زیر شبکه گویند.

اگر به ازای هر b, a در Y آنگاه $a \vee b$, $a \wedge b$ در Yباشد.

تعریف (۱-۱-۳۱) :

فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. خانواده τ از زیر مجموعه‌های X را یک توپولوژی بر روی X می‌نامند اگر

(i) τ شامل مجموعه $X, \varnothing$ باشد،

(ii) τ شامل اجتماع هر تعداد (متناهی یا نامتناهی) از مجموعه‌های موجود در آن باشد، و

(iii) اشتراک هر دو عضو τ به τ تعلق داشته باشد.

زوج (X,τ) را یک فضای توپولوژیک می‌نامند.و هر عضو τ را یک مجموعه باز در X می نامند. یک مجموعه را بسته می نامیم هرگاه متمم آن باز باشد.

مثال (۱-۱-۳۲) :

فرض کنید $X=\{a,b,c,d,e,f\}$ و $\tau_1=\{X,\varnothing,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e,f\}\}$

در این صورت τ_1 یک توپولوژی بر روی X است چون شرط‌های (i)، (ii)، (iii) از تعریف (۱-۱-۳۱) برقرارند.

مثال (۱-۱-۳۳):

فرض کنید $X=\{a,b,c,d,e\}$ و $\tau_2=\{X,\varnothing,\{a\},\{c,d\},\{a,c,e\},\{b,c,d\}\}$

در این صورت τ_2 یک توپولوژی بر روی X نیست. چون اجتماع

$$\{c,d\}\bigcup\{a,c,e\}=\{a,c,d,e\}$$

از دو عضو τ_2 متعلق به τ_2 نیست؛ یعنی ، τ_2 در شرط (ii) از تعریف (۱-۱-۳۱) صدق نمی‌کند.

مثال (۱-۱-۳۴) :

فرض کنید $X=\{a,b,c,d,e,f\}$ و $\tau_3=\{X,\varnothing,\{a\},\{f\},\{a,f\},\{a,c,f\},\{b,c,d,e,f\}$

در این صورت τ_3 یک توپولوژی بر روی X نیست . چون اشتراک دو عضو τ_3

$$\{a,c,f\}\bigcap\{b,c,d,e,f\}=\{c,f\}$$

متعلق به τ_3 نیست، یعنی ، τ_3 در شرط (iii) از تعریف (۱-۱-۳۱) صدق نمی‌کند.

مثال (۱-۱-۳۵):

فرض کنید $\mathbb{N}$ مجموعه اعداد طبیعی (یعنی مجموعه اعداد صحیح مثبت) و τ_4 شامل $\varnothing,\mathbb{N}$ و تمام زیر مجموعه‌های متناهی $\mathbb{N}$ باشد. در این صورت τ_4 یک توپولوژی بر روی $\mathbb{N}$ نیست. چون اجتماع نامتناهی

$$\{2\}\bigcup\{3\}\bigcup\ldots\bigcup\{n\}\bigcup\ldots=\{2,3,\ldots,n,\ldots\}$$

از اعضای τ_4 متعلق به τ_4 نیست، یعنی ، τ_4 در شرط (ii) از تعریف (۱-۱-۳۱) صدق نمی‌کند.

تعریف (۱-۱-۳۶) :

فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و τ خانواده تمام زیر مجموعه‌های X باشد. در این صورت τ را توپولوژی گسسته بر روی X می‌نامند. فضای توپولوژیک (X,τ) را یک فضای گسسته می‌نامند.

تعریف(۱-۱-۳۷):

فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد و $\tau=\{X,\varnothing\}$ در این صورت τ را توپولوژی ناگسسته و (X,τ) را فضای ناگسسته می‌نامند.

تعریف (۱-۱-۳۸) :

فرض کنید (X,τ) یک فضای توپولوژیک باشد. اعضای τ را مجموعه‌های باز می‌نامند.

تبصره (۱-۱-۳۹):

اگر (X,τ) یک فضای توپولوژیک باشد، آنگاه اجتماع مجموعه های باز، بازاست واشتراک هر تعداد متناهی مجموعه باز، باز است

تعریف (۱-۱-۴۰):

فرض کنید (X,τ) یک فضای توپولوژیک باشد. به زیر مجموعه S از X یک مجموعه بسته در (X,τ) گفته می‌شود . اگر مکمل آن در X یعنی X\S ، یک مجموعه باز در (X,τ) باشد.

اگر مثال (۱-۱-۳۲) را در نظر بگیریم، خواهیم دید

(i) مجموعه $\{a\}$ هم باز است و هم بسته ؛

(ii) مجموعه $\{b,c\}$ نه باز است و نه بسته؛

(iii) مجموعه $\{c,d\}$ باز است ولی بسته نیست؛

(iv) مجموعه $\{a,b,e,f\}$ بسته است ولی باز نیست.

در یک فضای گسسته هر مجموعه هم باز است و هم بسته؛ در حالیکه در فضای ناگسسته (X,τ) همه زیر مجموعه‌های X بجز $\varnothing, X$ نه باز هستند و نه بسته.

تعریف (۱-۱-۴۱):

زیر مجموعه S از فضای توپولوژیک (X,τ) مجموعه باز- بسته گفته می‌شود اگر در این فضا، همزمان باز و بسته باشد.

در هر فضای توپولوژیک (X,τ) مجموعه‌های $\varnothing, X$ باز- بسته هستند.

در فضای گسسته همه زیر مجموعه‌های X باز- بسته هستند.

در فضای ناگسسته فقط مجموعه‌های $\varnothing, X$ باز بسته هستند.

تعریف(۱-۱-۴۲):

فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. توپولوژی τ روی X را توپولوژی بسته- متناهی می‌نامند اگر زیر مجموعه های بسته X شامل X و تمام زیر مجموعه های متناهی X باشد.

مثال (۱-۱-۴۳):

اگر $\mathbb{N}$ مجموعه تمام اعداد صحیح مثبت باشد؛ آنگاه مجموعه‌های $\{1\},\{5,6,7\}$ و $\{2,4,6,8\}$ متناهی و لذا در توپولوژی بسته– متناهی بسته هستند. بنابراین مکمل آنها

$$\{2,3,4,5,\ldots\},\{1,2,3,4,8,9,10,\ldots\},\{1,3,5,7,9,10,11,\ldots\}$$

در توپولوژی بسته – متناهی مجموعه‌های باز هستند. از طرف دیگر، مجموعه اعداد صحیح مثبت زوج بسته نیست چون متناهی نیست، و بنابراین مکمل آن- مجموعه اعداد صحیح مثبت فرد- در توپولوژی بسته – متناهی باز نیست.

بنابراین تمام مجموعه‌های متناهی بسته هستند، ولی همه مجموعه‌های نامتناهی باز نیستند.

تعریف (۱-۱-۴۴):

فرض کنید f تابعی از مجموعه X به توی مجموعه Y باشد. اگر S زیر مجموعه‌ای از Y باشد، مجموعه $f^{-1}(S)$ بصورت زیر تعریف می‌شود :

$$f^{-1}(S)=\{x:x\in X, f(x)\in S\}$$

زیر مجموعه $f^{-1}(S)$ از X تصویر معکوس S نامیده می‌شود.

تعریف(۱-۱-۴۵):

فرض کنیم X مجموعه ای باشد، یک پایه توپولوژی در X خانواده ای چون B است از زیر مجموعه های X به طوریکه :

به ازای هر $x\in X$ دست کم یک عضو $x\in B$ موجود باشد که $x\in B$.

اگر x متعلق به اشتراک دو عضو پایه مانند B_2,B_1 باشد آنگاه عضوی از پایه مانند B_3 وجود دارد به طوری که

$$B_3\subset B_1\cap B_2 \ \ , \ \ x\in B_3$$

تعریف (۱-۱-۴۶):

اگر B پایه توپولوژی ای در X باشد. آنگاه τ ، توپولوژی تولید شده به وسیلهٔ B ، چنین تعریف می‌شود: زیر مجموعهٔ U از X را در X بازگوییم (یعنی عضوی از τ است) اگر به ازای هر $x\in U$ ، عضوی از پایه مانند $\mathrm{B}\in B$ وجود داشته باشد به طوری که $x\in B$ و $B\subset U$.

مثال (۱-۱-۴۷):

فرض کنید (X,τ) یک فضای گسسته و B خانواده همه زیر مجموعه‌های تک عضوی X باشد؛ یعنی ، $B=\{\{x\}:x\in X\}$ در این صورت B پایه‌ای برای τ است.

تعریف (۱-۱-۴۸):

فرض کنیم Y,X دو فضای توپولوژیک باشند. توپولوژی حاصل ضربی در $X\times Y$ توپولوژی‌ای است که پایهٔ آن خانواده B متشکل از همهٔ مجموعه‌هایی به صورت $U\times V$ است که در آن U زیر مجموعهٔ بازی از V,X زیر مجموعهٔ بازی از Y است.

قضیه (۱-۱-۴۹):

اگر $\mathbb{B}$ پایه‌ای برای توپولوژی $\mathcal{C},X$ پایه‌ای برای توپولوژی Y باشد. آنگاه خانواده $\mathbb{D}=\{\mathrm{B}\times C \mid \mathrm{B}\in\mathbb{B}, C\in\mathcal{C}\}$ پایه‌ای برای توپولوژی $X\times Y$ است.

تعریف (۱-۱-۵۰):

فرض کنید A زیر مجموعه‌ای از فضای توپولوژیک (X,τ) باشد. نقطه $x\in X$ نقطه حدی (یا نقطه انباشتگی) A نامیده می‌شود اگر هر مجموعه باز U شامل x، یک نقطه دیگر از A بغیر از x را در برداشته باشد.

مثال (۱-۱-۵۱):

فرض کنید (X,τ) با فرض مجموعه $X=\{a,b,c,d,e\}$ و $\tau=\{X,\varnothing,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$ در این صورت (X,τ) یک فضای توپولوژیک است . اگر $A=\{a,b,c\}$، پس e,d,b نقاط حدی مجموعه A هستند.

قضیه (۱-۱-۵۲):

فرض کنید A یک زیر مجموعه از فضای توپولوژیک (X,τ) ، A' مجموعه تمامی نقاط حدی A باشد در این صورت $A\bigcup A'$ یک مجموعه بسته در X است.

تعریف (۱-۱-۵۳):

فرض کنید A زیر مجموعه‌ای از فضای توپولوژیک (X,τ) باشد. مجموعه $A\bigcup A'$ که شامل اعضای A و تمامی نقاط حدی آن است بستار A نامیده می‌شود و با $\bar{A}$ نشان داده می‌شود.

تعریف (۱-۱-۵۴):

فرض کنید A یک زیر مجموعه فضای توپولوژیک (X,τ) باشد. گوییم A در X چگال هست اگر $\bar{A}=X$.

مثال (۱-۱-۵۵):

فرض کنید X یک فضای گسسته باشد، پس هر زیر مجموعه X بسته است (چون مکمل آن باز است). بنابراین تنها زیر مجموعه چگال X خود X است چون هر زیر مجموعه X بستار خودش است.

قضیه (۱-۱-۵۶):

فرض کنید A زیر مجموعه فضای توپولوژیک (X,τ) باشد، A در X چگال است اگر و تنها اگر اشتراک A با هر زیر مجموعه باز و ناتهی X ناتهی باشد (یعنی ، اگر $U\in\tau$ و $U\neq\varnothing$ آنگاه $A\bigcap U\neq\varnothing$).

تعریف (۱-۱-۵۷):

فرض کنید (X,τ) یک فضای توپولوژیک و N زیر مجموعه‌ای از p,X نقطه‌ای در N باشد. در این صورت N را یک همسایگی از نقطه p می‌گویند اگر یک مجموعه‌ی باز U وجود داشته باشد که $p\in U\subseteq N$.

مثال (۱-۱-۵۸):

فرض کنید (X,τ) یک فضای توپولوژیک و N یک همسایگی نقطه p باشد. اگر S زیر مجموعه‌ی دلخواهی از X باشد بطوریکه $N\subseteq S$ آنگاه S نیز یک همسایگی نقطه P خواهد بود.

تعریف (۱-۱-۵۹):

فرض کنید Y زیر مجموعه ناتهی از فضای توپولوژیک (X,τ) باشد. خانواده $\tau_Y=\{U\bigcap Y:U\in\tau\}$ از زیر مجموعه‌های Y، یک توپولوژی بر روی Y است و آن را توپولوژی زیر فضایی (یا توپولوژی القا شده بر روی Y توسط τ) است و آن را توپولوژی زیر فضایی (یا توپولوژی القا شده بر روی Y توسط τ) می‌نامند. فضای توپولوژیک (Y,τ_Y) را زیر فضای (X,τ) می‌گویند.

مثال (۱-۱-۶۰):

فرض کنید $X=\{a,b,c,d,e,f\}$ و $\tau=\{X,\varnothing,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e,f\}\}$ و $Y=\{b,c,e\}$ در این صورت $\tau_Y=\{Y,\varnothing,\{c\}\}$ یک توپولوژی زیر فضا بر روی Y است.

مثال (۱-۱-۶۱):

فرض کنید $X=\{a,b,c,d,e\}$ ، $\tau=\{X,\varnothing,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$ و $Y=\{a,d,e\}$ در این صورت $\tau_Y=\{Y,\varnothing,\{a\},\{d\},\{a,d\},\{d,e\}\}$ یک توپولوژی زیر فضا بر روی Y است.

تعریف (۱-۱-۶۲):

فرض کنید (X,τ) و (Y,τ_1) فضاهای توپولوژیک باشند. این دو فضا را همریخت می‌نامند.

اگر تابع $f:X\to Y$ با ویژگی‌های زیر وجود داشته باشد:

(i) f یک به یک باشد