بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

دانشکده علوم

گروه ریاضیات و کاربردها

پایداری معادله‌ی مکعبی در فضاهای نرمدار فازی

اساتید راهنما:

دکتر نسرین اقبالی

دکتر عبداله برهانی‌فر

توسط:

مریم طاهری

دانشگاه محقق اردبیلی

شهریور ۱۳۹۰

نام خانوادگی: طاهری	**نام:** مریم	
عنوان پایان‌نامه: پایداری معادله‌ی تابعی مکعبی در فضاهای نرمدار		
اساتید راهنما: دکتر نسرین اقبالی و دکتر عبداله برهانی‌فر		
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد	**رشته:** ریاضی	**گرایش:** کاربردی
دانشگاه: محقق اردبیلی		
دانشکده: علوم	**تاریخ فارغ‌التحصیلی:** ۱۳۹۰/۰٦/۲۴	**تعداد صفحه:** ۸۴

کلید واژه: فضای نرمدار فازی، فضای نرمدار فازی شهودی، فضای $n-$نرم فازی شهودی، پیوستگی فازی شهودی، پایداری، تخریب، تقریب.

چکیده: در این پایان نامه پایداری معادله تابعی مکعبی در فضای نرمدار فازی شهودی و فضای $n-$نرم فازی شهودی بررسی شده، و با ذکر تعریف پیوستگی فازی شهودی، پیوستگی معادله مکعبی در این فضا تعیین می‌شود. همچنین معادلات تابعی مربعی و مربعی فوق‌العاده معرفی شده و پایداری این معادلات در فضای نرمدار فازی شهودی بررسی می‌شود.

تقدیر و تشکر:

سر ارادت ما و آستان حضرت دوست که هرچه بر سر ما می‌رود ارادت اوست (حافظ)

سپاس بی پایان ایزد منان را که تا این لحظه از زندگی‌ام در سایه سار رحمتش بوده‌ام چرا که همه‌ی این‌ها نبود مگر لطف خدا.

از پدر و مادر مهربانم، که همواره از محبت‌های بی دریغشان سرشار بوده‌ام نهایت تشکر و سپاس را دارم و بر دستان پر مهرشان بوسه می‌زنم.

از خواهر و برادران عزیزم که سهم بزرگی در تکمیل این پایان نامه داشته‌اند و پیوسته مشوق من بوده‌اند، سپاس گزارم.

از عنایات بی‌دریغ استاد گرانقدرم سرکار خانم دکتر نسرین اقبالی خالصانه قدردانی می‌کنم. همچنین از جناب آقای دکتر عبداله برهانی‌فر و جناب آقای دکتر داود خجسته سالکویه کمال تشکر را دارم.

و در پایان در حد بضاعت ناچیز خود از تمامی کسانی که در طی دوران تحصیل مایه‌ی آرامش و دلگرمی من بوده‌اند، صمیمانه تشکر می‌کنم.

مریم طاهری

شهریور ۱۳۹۰

چکیده

در این پایان نامه پایداری معادله‌ی تابعی مکعبی در فضای نرمدار فازی شهودی و فضای n—نرم فازی شهودی بررسی شده، و با ذکر تعریف پیوستگی فازی شهودی، پیوستگی معادله‌ی مکعبی در این فضا تعیین می‌شود. همچنین معادلات تابعی مربعی و مربعی فوق‌العاده معرفی شده و پایداری این معادلات در فضای نرمدار فازی شهودی بررسی می‌شود.

واژه های کلیدی: فضای نرمدار فازی، فضای نرمدار فازی شهودی، فضای n—نرم فازی شهودی، پیوستگی فازی شهودی، پایداری، تخریب، تقریب.

فهرست مندرجات

پیش‌گفتار

افتخار هر ایرانی است که پایه‌ی علوم قرن آینده از نظریات یک ایرانی می‌باشد. باید قدر این فرصت را دانست و در تعمیم نظریه‌ی فازی و استفاده از آن کوشش و تلاش کرد.

گرچه تا دهه‌ی ۱۹۷۰ و اوایل دهه‌ی ۱۹۸۰ مبحث فازی (و بنیان‌گذار آن) با مخالفت آشکار و سخت جمع کثیری از دانشمندان و ریاضیدانان و مهندسین روبرو بود، اما با پیدایش کاربردهای عملی منطق فازی و آشنایی و شناخت بیشتر جهان علم با مفاهیم فازی، به تدریج این مخالفت‌ها به تحسین و تشویق تبدیل گشت. به طوری که در حال حاضر سالانه بیش از صدها کتاب و هزاران مقاله در این زمینه به چاپ می‌رسد.

منطق فازی معتقد است که ابهام در ماهیت علم نهته است. از این‌رو بر خلاف بسیاری که معتقدند باید تقریب‌ها را دقیق‌تر کرد تا بهره‌وری افزایش یابد، زاده[۱] معتقد است که باید به دنبال ساختن مدل‌هایی بود که ابهام را به عنوان بخشی از سیستم مدل کند.

در منطق ارسطویی، یک دسته‌بندی درست یا نادرست وجود دارد یعنی تمام گزاره‌ها یا درست هستند و یا نادرست. بنابراین جمله‌ی «علی باهوش است» در مدل ارسطویی اساساً یک گزاره نمی‌باشد، چون مقدار باهوش بودن برای افراد مختلف متفاوت است و این جمله اساساً همیشه درست یا نادرست نیست. در منطق فازی جملاتی وجود دارند که تا حدودی درست و تا حدودی نادرست هستند. برای مثال جمله‌ی «علی باهوش است» یک گزاره‌ی منطقی فازی است که ارزش درستی آن گاهی کم و گاهی زیاد است. در فلسفه‌ی ارسطویی مرزها کاملا مشخص و تعریف شده است، در حالی که در تفکر فازی مرز مشخصی وجود ندارد و تعلق عناصر مختلف به مفاهیم و موضوعات گوناگون نسبی است. به این ترتیب است که این تفکر با طبیعت و سرشت انسان و محیط جهان ما سازگاری دارد. تا اینجا به نظر می‌رسد که نباید مخالفتی با این نگرش وجود داشته باشد، زیرا که تفکر فازی دیدگاه تازه‌ای را معرفی می‌کند که تعمیم منطق ارسطویی است. اما نکته‌ی مهم آن است که بر اساس این دیدگاه، ریاضیات کلاسیک که بر منطق ارسطویی استوار است زیر سئوال می‌رود و از همین جا مخالفت‌ها آغاز می‌شود.

اگر بخواهیم نظریه‌ی مجموعه‌های فازی را توضیح دهیم، باید بگوییم نظریه‌ای است برای اقدام در شرایط عدم اطمینان؛ این نظریه قادر است بسیاری از مفاهیم، متغیرها و سیستم‌هایی را که نادقیق و مبهم هستند، صورت‌بندی ریاضی بخشد و زمینه را برای استدلال، استنتاج، کنترل

L.A. Zadeh[۱]

و تصمیم‌گیری در شرایط عدم اطمینان فراهم آورد. واضح است که بسیاری از تصمیمات و اقدامات ما در شرایط عدم اطمینان است و حالت‌های واضح غیر مبهم، بسیار نادر و کمیاب می‌باشند.

چرا سیستم‌های فازی؟ دنیای واقعی ما بسیار پیچیده‌تر از آن است که بتوان یک توصیف و تعریف دقیق برای آن به دست آورد، بنابراین باید برای یک مدل، توصیف تقریبی یا همان فازی که قابل قبول و قابل تجزیه و تحلیل باشد معرفی شود. با حرکت به سوی عصر اطلاعات، دانش و معرفت بشری بسیار اهمیت پیدا می‌کند. بنابراین ما به فرضیه‌ای نیاز داریم که بتواند دانش بشری را به شکلی سیستماتیک فرموله کرده و آن را به همراه سایر مدل‌های ریاضی در سیستم‌های مهندسی قرار دهد.

نظریه‌ی فازی به شاخه‌های مختلفی تقسیم شده است که بحث کامل و جامع در مورد هر شاخه به زمان بیشتر و مباحث طولانی‌تری احتیاج دارد که در زیر به پاره‌ای از موارد اشاره شده است:

۱) ریاضیات فازی

ریاضیات فازی، یک فرا مجموعه از منطق بولی است که بر مفهوم درستی نسبی دلالت دارد. منطق کلاسیک، هر چیزی را بر اساس یک سیستم دوتایی نشان می‌دهد (درست یا غلط، یک یا صفر، سفید یا سیاه) ولی منطق فازی درستی هر چیزی را با یک عدد که مقداری در [۰, ۱] دارد، نشان می‌دهد. مثلا اگر به رنگ سیاه عدد صفر و به رنگ سفید عدد یک را اختصاص دهیم، آنگاه رنگ خاکستری عددی نزدیک به صفر خواهد گرفت.

۲) منطق فازی و سیستم‌های فازی

«پروفسور ممدانی[۱]» اولین سیستم فازی را در اوایل سال ۱۹۷۰ برای کنترل یک ماشین بخار ساخت و کمی بعد اولین چراغ‌های راهنمایی فازی را برای رانندگان ساخته است. از سال ۱۹۹۵ حکومت ژاپن و موسسات تجاری، صنعتی و آکادمیک آن به طور فعال مشغول مطالعه درباره‌ی نظریه‌ی منطق فازی و نحوه‌ی استفاده از منطق فازی در کاربردهای مختلف هستند.

۳) برنامه ریزی خطی[۲] و تصمیم گیری فازی

در دنیای واقعی بسیاری از تصمیم گیری‌ها در محیطی رخ می‌دهد که اهداف، قیود و

[۱] E. Mamdani

[۲] Linear programming

نتیجه‌ی عملکرد را دقیقا نمی‌دانیم و معمولا مفاهیم و تکنیک‌هایی از نظریه‌ی احتمال را به کار می‌بریم. اهداف و یا قیود می‌توانند به صورت مجموعه‌ی فازی تعریف شوند.آنگاه یک تعریف فازی را می‌توان به عنوان فصل مشترک اهداف و قیود در نظر گرفت. بلمن[۱] و زاده در [۱] مفهوم بزرگ‌ترین را در مسایل تصمیم‌گیری فازی بیان کردند. این مفهوم را تاناکا[۲] [۱۸] برای مسایل برنامه‌ریزی ریاضی به کار بست. در سال ۱۹۸۴ تاناکا و آسایی[۳] [۱۷] یک فرمول برای برنامه‌ریزی خطی فازی و همچنین یک روش برای جواب آن بر پایه‌ی روابط نامساوی بین اعداد فازی ارائه کردند. دبویس[۴] و پرید[۵] [۲] روی مسایل برنامه‌ریزی خطی فازی با قیود فازی تحقیق کرده‌اند.

۴) فضاهای نرمدار فازی و پایداری معادلات تابعی

فضاهای نرمدار فازی در [۳, ۴, ۵, ٦] توانست گامی بس بزرگ در نظریه‌ی ϵ^{∞} که توسط النشائی[٦] در کوانتوم مطرح شده بود، ایجاد کند که هدف آن ایجاد موقعیت‌هایی بود که نرم در یک فضای معمولی نمی‌توانست مقادیر مورد نیاز را ارائه دهد. که بعد از تعریف فضاهای نرمدار فازی رده‌ی مهمی از این فضاها تحت عنوان شهودی *Intuitionistic* یا در [۱۳, ۱٦] معرفی شد که ابزار قدرتمندی برای مدل سازی فضاهای نرمدار گردید.

پایداری معادلات تابعی همواره به عنوان موضوعی جالب در ریاضی و خارج از ریاضی محض، به ویژه برای فیزیک‌دانان جالب بوده است. به عنوان مثال فیزیک‌دانان علاقه‌مند هستند تا با ایجاد تغییرات کوچک در یک سیستم یا دستگاهی میزان پایداری آن را تخمین بزنند. در سال ۱۹۴۰، اولام[۷] در [۱۹] سئوال معروف خود را در زمینه‌ی پایداری معادلات تابعی مطرح کرد: فرض کنید G_1 یک گروه و G_2 یک گروه متری باشد و $\delta > 0$ ای باشد که برای تابع $f : G_1 \longrightarrow G_2$ داشته باشیم $d(f(xy), f(x)f(y)) \leq \delta$. آنگاه آیا همومورفیسمی مانند $g : G_1 \longrightarrow G_2$ وجود دارد که برای هر $x \in G_1$ داشته باشیم $d(f(x), g(x)) \leq \delta$؟

در سال ۱۹۴۱، یرز[۸] در [۹] نشان داد که اگر $\delta > 0$ و E_1 و E_2 جبرهای باناخ و $f : E_1 \longrightarrow E_2$ یک تابع باشد که $\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \delta$ آنگاه یک تابع یکتای جمعی

---

[۱] R.E. Bellman
[۲] H. Tanaka
[۳] K. Asia
[۴] D. Dubois
[۵] H. Prade
[٦] El. Naschie
[۷] Ulam
[۸] Hyers

T وجود دارد که برای هر $x \in E_1$ داریم $||f(x) - T(x)|| \leq \delta$.

در سال ۱۹۷۸، راسیاس[1] در [۱۴] نشان داد که برای فضاهای باناخ مفروض E_1 و E_2 و $p \in [0, 1)$ اگر $\delta > 0$ ای موجود باشد که برای هر $x, y \in E_1$ داشته باشیم $||f(x + y) - f(x) - f(y)|| \leq \delta(||x||^p + ||y||^p)$، آنگاه تابع جمعی یکتای T وجود دارد به‌طوریکه برای هر $x \in E_1$ داریم $||f(x) - T(x)|| \leq \frac{2\delta}{2-2^p}||x||^p$. همچنین او این قضیه را برای $p < 0$ نیز ثابت کرد.

در سال ۱۹۹۱، گایدا[2] در [۷] قضیه‌ی راسیاس را برای حالت $p > 1$ اثبات نمود. برای حالت $p = 1$، راسیاس و شمرل[3] با ارائه‌ی مثالی در [۱۵] نشان دادند که نمی‌توان f را تقریب زد.

سرانجام در سال ۱۹۹۲، گاوروتا[4] در [۸] نتیجه‌ی راسیاس را برای توابع کنترل مجاز توسیع داد.

در فصل اول این پایان‌نامه برخی تعاریف و مفاهیم اولیه را یادآوری می‌کنیم. در فصل دوم فضای نرمدار فازی شهودی را معرفی می‌کنیم و پایداری معادله تابعی مکعبی را در این فضا بررسی می‌کنیم. در فصل سوم پیوستگی فازی شهودی را تعریف کرده و پیوستگی فازی شهودی تابع مکعبی را بررسی می‌کنیم. در فصل چهارم معادلات تابعی مربعی[5] و مربعی فوق‌العاده[6] را معرفی کرده و پایداری این معادلات را در فضای نرمدار فازی شهودی بررسی می‌کنیم. در فصل پنجم به معرفی فضای ۲—نرم و n—نرم فازی می‌پردازیم و پایداری تابع مکعبی را در این فضا بررسی می‌کنیم.

---

[1] Th.M. Rassias

[2] Gajda

[3] *Šemrl*

[4] *Ǧavruta*

[5] Quadratic

[6] Pexiderized quadratic

فصل ۱

مقدمات و مفاهیم اولیه

تابع عضویت مجموعه‌های قطعی و فازی

هر مجموعه‌ی قطعی (صریح) یک ویژگی معین و قطعی دارد. اما در بسیاری از مجموعه‌ها نمی‌توان یک ویژگی قطعی پیدا کرد، لذا تئوری مجموعه‌های فازی مطرح شد که در مقایسه با مجموعه‌های قطعی، مبین مجموعه‌های مبهم است.

با استفاده از تابع عضویت[1] (تابع مشخصه) می‌توان عضویت یا عدم عضویت یک عنصر را در یک مجموعه تعریف کرد.

فرض کنید A بیانگر یک مجموعه‌ی قطعی بر روی مجموعه‌ی مرجع X باشد. تابع مشخصه‌ی این مجموعه یعنی χ_A را می‌توان با نگاشت زیر تعریف کرد:

$$\chi_A : X \to \{۰, ۱\},$$

به طوری که

$$\chi_A(x) = \begin{cases} ۱, & x \in A, \\ ۰, & x \notin A. \end{cases}$$

در نظریه‌ی مجموعه‌های فازی، عضویت یک عضو در مجموعه درجه‌بندی می‌شود و در بازه‌ی $[۰, ۱]$ تعریف می‌گردد. بنابراین یک عضو در یک مجموعه‌ی فازی به همراه درجه‌ی عضویت خود بیان می‌گردد. پس می توان ادعا کرد که یک مجموعه‌ی فازی متشکل از زوج‌های مرتب است.

۱.۱ تعاریف اولیه

اغلب تعاریف زیر از منابع [۱۰، ۲۰] استخراج شده‌اند.

تعریف ۱.۱ فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. هر زیر مجموعه‌ی فازی از X توسط تابع $\mu_{\tilde{A}}(x) : X \to [۰, ۱]$ به نام تابع عضویت معین می‌شود. $\mu_{\tilde{A}}(x)$ نشان دهنده‌ی میزان تعلق x به مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ می‌باشد.

---

[1] Membership function

تبصره ۱.۱ با توجه به تعریف بالا می‌توان مجموعه‌های فازی را به صورت یک مجموعه از زوج‌های مرتب به گونه‌ی زیر نشان داد:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x));\ x \in X\},$$

که در آن $\mu_{\tilde{A}}(x)$ درجه‌ی عضویت عنصر x در مجموعه‌ی A است.
هنگامی که X یک مجموعه‌ی متناهی (و یا نامتناهی شمارا) به صورت $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ باشد، یک زیر مجموعه‌ی فازی A از X به صورت‌های زیر نشان داده می‌شود:

$$\tilde{A} = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_1)}{x_1} + \cdots + \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_n)}{x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i},$$

یا

$$\tilde{A} = \{\frac{\mu_{\tilde{A}}(x_1)}{x_1}, \ldots, \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_n)}{x_n}\},$$

که در عبارت اول، منظور از علامت +، اجتماع است نه جمع حسابی. و هنگامی که X یک مجموعه‌ی پیوسته باشد، نماد زیر به کار برده می‌شود:

$$\tilde{A} = \int_x \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x},$$

که در آن منظور از $\int$، اجتماع است.

تعریف ۲.۱ برای مجموعه‌ی جهانی X، خانواده‌ی مجموعه‌های فازی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Im(X) = \{\tilde{A} \mid \tilde{A} \subseteq X,\ \mu_{\tilde{A}}(x) \in [0, 1],\ \forall x \in X\}.$$

تعریف ۳.۱ فرض کنید $\tilde{A} \in \Im(X)$ و $\Im(X)$ خانواده‌ای از مجموعه‌های فازی تعریف شده در X باشد. تکیه‌گاه یا محمل [1] مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$، مجموعه‌ای است که عناصر مجموعه‌ی مرجع در آن درجه‌ی عضویت غیر صفر دارند و به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$Supp(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\} = X - \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) = 0\}.$$

Support[1]

تعریف ۴.۱ برای $\tilde{A} \in \Im(X)$ هسته‌ی[۱] $\tilde{A}$، تمامی x هایی در X است که $\mu_{\tilde{A}}(x)$ برابر یک باشد. به عبارت دیگر

$$Ker(\tilde{A}) = Core(\tilde{A}) = \{x \in X |\ \mu_{\tilde{A}}(x) = ۱\}.$$

تعریف ۵.۱ ارتفاع[۲] مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$، بزرگترین مقدار عضویت آن است، یعنی

$$hgt(\tilde{A}) = \sup_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x).$$

تعریف ۶.۱ مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ را نرمال[۳] گویند اگر و فقط اگر ارتفاع $\tilde{A}$ برابر با یک باشد. به عبارت دیگر مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ نرمال است اگر و فقط اگر

$$\max_{x \in X}\ \mu_{\tilde{A}}(x) = ۱,$$

در غیر این صورت مجموعه‌ی فازی را غیر نرمال یا زیر نرمال [۴] گویند.

تعریف ۷.۱ برای مجموعه‌های فازی $\tilde{A}$، α—برش قوی یا ضعیف به صورت زیر تعریف می‌شوند:

α—برش قوی: $\alpha \in [\circ, ۱]$، $\tilde{A}_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}$،

α—برش ضعیف: $\alpha \in (\circ, ۱]$، $\tilde{A}_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$.

لازم به ذکر است که α—برش یک مجموعه‌ی غیر فازی است.

تعریف ۸.۱ وقتی که X یک مجموعه‌ی متناهی است، عدد اصلی[۵] مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ در X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|\tilde{A}| = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x),$$

[۱] Core{nucleus}
[۲] Height
[۳] Normal
[۴] Subnormal
[۵] Cardinal number

و اگر X نامتناهی باشد، عدد اصلی $\tilde{A}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|\tilde{A}| = \int \mu_{\tilde{A}}\, dx,$$

و همچنین اندازه‌ی نسبی عناصر مجموعه‌ی فازی $|\tilde{A}|$ بر X عبارت است از:

$$||\tilde{A}|| = \frac{|\tilde{A}|}{|X|}.$$

که در آن $|\tilde{A}|$ عدد اصلی مجموعه‌ی $\tilde{A}$ و $|X|$ عدد اصلی مجموعه‌ی مرجع می‌باشد.

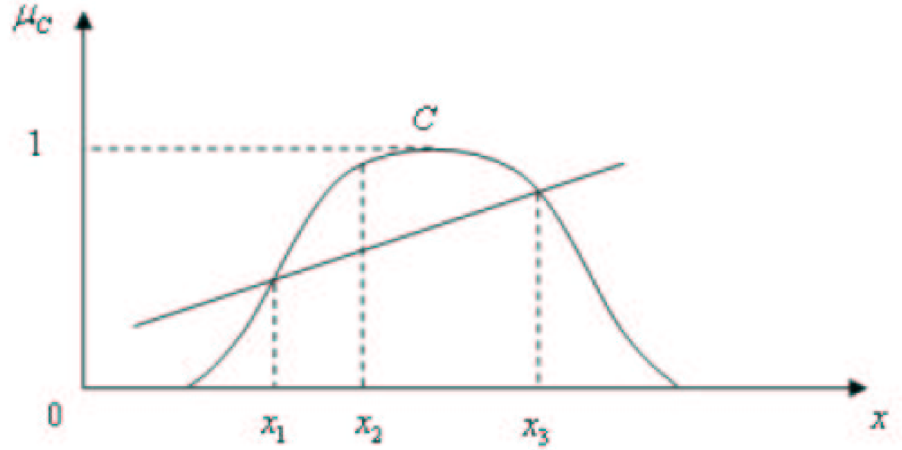
تعریف **۹.۱** مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ محدب است اگر و فقط اگر به ازای هر $x_۱, x_۲ \in X$ و $\lambda \in [۰, ۱]$ داشته باشیم:

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_۱ + (۱ - \lambda)x_۲) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_۱), \mu_{\tilde{A}}(x_۲)\},$$

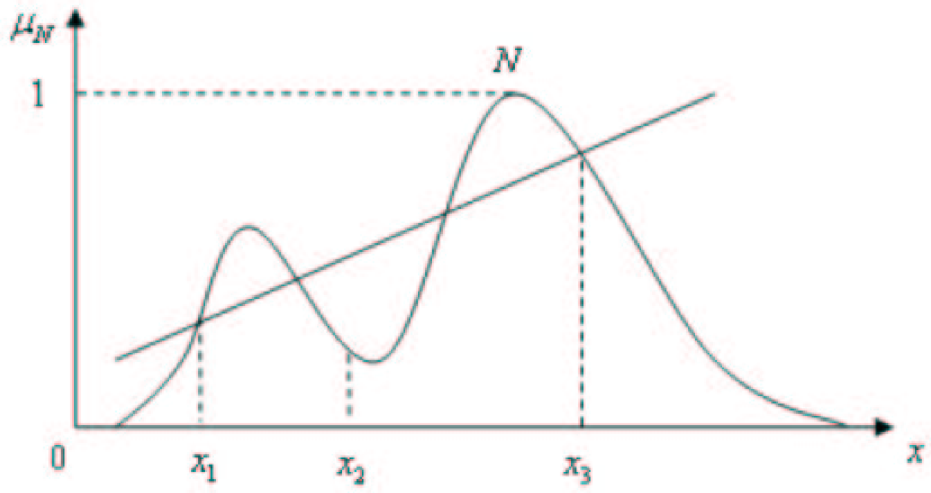
یا به صورت معادل برای هر $x_۱, x_۲ \in X$ و به ازای هر $x \in [x_۱, x_۲]$ داشته باشیم:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_۱), \mu_{\tilde{A}}(x_۲)\}.$$

شکل ۱.۱ مثالی از یک مجموعه‌ی فازی محدب و شکل ۲.۱ مجموعه‌ی فازی نامحدب می‌باشد.



شکل ۱.۱: تابع محدب



شکل ۲.۱: تابع نامحدب

تعریف ۱۰.۱ مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ را تهی گویند اگر برای هر $x \in X$، $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$. به عبارت دیگر $|\tilde{A}| = 0$.

تعریف ۱۱.۱ مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ را تام [1] گویند اگر برای هر $x \in X$، $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$، یا به عبارت دیگر $|\tilde{A}| = ||\tilde{A}||$ یا $||\tilde{A}|| = 1$.

۲.۱ عملگرهای مجموعه‌های فازی

این عملگرها تعمیم عملگرهای مجموعه‌ای، برای مجموعه‌های معمولی است. تابع عضویت، عامل مشخص کننده‌ی یک مجموعه‌ی فازی می‌باشد پس برای عملگرهایی که روی مجموعه‌های فازی ارائه می‌شود از تابع عضویت مجموعه‌ها استفاده می‌شود. در تمامی موارد زیر X یک مجموعه‌ی مرجع و $\tilde{A}$، $\tilde{B}$ و... زیر مجموعه‌های فازی آن به ترتیب باتوابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}(x)$، $\mu_{\tilde{B}}(x)$ و... می‌باشند.

[1] Complete

تعریف ۱۲.۱ اجتماع دو مجموعه‌ی $\tilde{A}, \tilde{B} \in \Im(X)$ مجموعه‌ای است مانند $\tilde{C} = \tilde{A} \cup \tilde{B}$ با تابع عضویت

$$\mu_{\tilde{c}} = \mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\},$$

$\tilde{C}$ کوچکترین مجموعه‌ی فازی است که $\tilde{A}$، $\tilde{B}$ (هر دو) را شامل می‌شود.

تعریف ۱۳.۱ اشتراک دو مجموعه‌ی $\tilde{A}, \tilde{B} \in \Im(X)$ مجموعه‌ای است مانند $\tilde{D} = \tilde{A} \cap \tilde{B}$ با تابع عضویت

$$\mu_{\tilde{D}} = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\},$$

$\tilde{D}$ بزرگترین مجموعه‌ی فازی است که $\tilde{A}$، $\tilde{B}$ (هر دو) را شامل می‌شود.

تعریف ۱۴.۱ متمم مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$، مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}^c \in \Im(x)$ با تابع عضویت زیر است:

$$\mu_{\tilde{A}^c}(x) = ۱ - \mu_{\tilde{A}}(x).$$

تعریف ۱۵.۱ اگر $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ باشد، متمم نسبی $\tilde{A}$ نسبت به $\tilde{B}$ که با $\tilde{B} - \tilde{A}$ نشان داده می‌شود به صورت یک مجموعه‌ی فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$\forall x \in X,\ \mu_{\tilde{B}-\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x),$$

به شرط آن که $\mu_{\tilde{B}} > \mu_{\tilde{A}}$.

تبصره ۲.۱ قوانین تناقض و میانه‌ی غیر مشمول برای مجموعه‌های فازی برقرار نیست. یعنی:

$$\tilde{A} \cap \bar{\tilde{A}} \neq ۰, \qquad\qquad \tilde{A} \cup \bar{\tilde{A}} \neq X,$$

به عنوان مثال فرض کنید:

$$\tilde{A} = \{(۱, ۰.۲), (۲, ۰.۷), (۳, ۰.۵), (۴, ۱)(۵, ۰.۳)\}, \qquad X = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\},$$

در این صورت داریم:

$$\tilde{A}^c = \{(۱, ۰.۸), (۲, ۰.۳), (۳, ۰.۵), (۵, ۰.۷)\},$$

با توجه به $\tilde{A}^c$ و متمم آن خواهیم داشت:

$$\tilde{A} \cup \bar{\tilde{A}} = \{(۱, ۰.۸), (۲, ۰.۷), (۳, ۰.۵), (۴, ۱), (۵, ۰.۷)\},$$

$$\tilde{A} \cap \bar{\tilde{A}} = \{(۱, ۰.۲), (۲, ۰.۳), (۵, ۰.۳), (۳, ۰.۵)\},$$

$$\tilde{A} \cap \bar{\tilde{A}} \neq ۰, \qquad \tilde{A} \cup \bar{\tilde{A}} \neq X.$$

تبصره ۳.۱ توجه کنید که تعاریف متمم، اجتماع و اشتراک تعریف شده، تنها راه ممکن برای تعریف این اصطلاحات نبوده و یکی از ساده‌ترین تعاریفی است که توسط زاده در سال ۱۹۶۵ ارائه گردیده و به طور وسیعی به کار برده شده است.

تعریف ۱۶.۱ تساوی دو مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\forall x \in X, \quad \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x) \iff \tilde{A} = \tilde{B}.$$

تعریف ۱۷.۱ چنانچه K یک مجموعه‌ی اندیس گذار باشد و $i \in K$ ،$\tilde{A}_i$ زیر مجموعه‌های فازی از X باشند، آنگاه $\bigcup\limits_{i\in K} \tilde{A}_i$ و $\bigcap\limits_{i\in K} \tilde{A}_i$ به صورت مجموعه‌های فازی با توابع زیر تعریف می‌شوند:

$$\mu_{\bigcup_{i\in K}\tilde{A}_i} = \sup\{\mu_{\tilde{A}_i},\ i \in K\},$$
$$\mu_{\bigcap_{i\in K}\tilde{A}_i} = \inf\{\mu_{\tilde{A}_i},\ i \in K\}.$$

تعریف ۱۸.۱ مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$، زیر مجموعه‌ی مجموعه‌ی $\tilde{B}$ است، اگر و تنها اگر

$$\forall x \in X, \quad \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x).$$