بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

قضایای مقایسه‌ی روش‌های ژاکوبی بهبودیافته و روش‌های گاوس - سایدل بهبودیافته با استفاده از M- ماتریس‌ها

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

عادله ادبی فیروزجائی

استاد راهنما: **دکتر معصومه خضرلو**

مهرماه ۱۳۹۳

تقدیم به

پیشگاه مقدس حضرت ولی عصر (عج)

و روح ملکوتی شهدای راه ولایت

تشکر و قدردانی

ذلک فضل من الله و کفی بالله علیما.(نسا- ۷۰)

به درگاه کبریا و عظمت پروردگار، سپاس و ستایش می‌گزارم که ذات لایزال ازلی است و ازلیت بی‌ابتدایش جاویدان است. او را سپاس و ستایش سزاوار است که در پناهش ایمن مانده‌ایم و به دولت یکتاپرستی و حق‌بینی راه یافته‌ایم. سپاس خدای را که اجابتم می کند آنگاه که صدایش می زنم و هر زشتی را بر من می پوشاند. سپاس خدای را که ما را به شناخت خویش هدایت فرمود. خدایا درود فرست بر محمد بنده و فرستاده ات و برگزیده ات ، بر علی امیر المؤمنان، جانشین فرستاده پروردگار جهانیان، درود فرست بر صدیقه طاهره فاطمه زهرا سرور زنان جهانیان، درود فرست بر دو فرزندزاده پیامبر رحمت، دو پیشوای هدایت،حسن و حسین، درود فرست بر امامان مسلمانان،علی بن الحسین و محمد بن علی، جعفر بن محمد، موسی بن جعفر و علی بن موسی الرضا و محمد بن علی و علی بن محمد، حسن بن علی، خدایا درود فرست بر ولی امرت،آن قائم آرزو شده و دادگستر مورد انتظار و دینی را که برایش پسندیده ای به دست او پابرجا بدار.

از تمامی اساتیدم که از محضر پر فیض تدریسشان ، بهره ها برده ام تشکر و قدردانی می‌کنم.

تشکر و سپاس از استاد دانشمند و پر مایه ام سرکار خانم دکتر معصومه خضرلو که از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند.

با سپاس از خانواده‌ام بویژه استوارترین تکیه گاهم، پدر و مادرم، که هرچه آموختم در مکتب عشق آن‌ها آموختم و هرچه بکوشم قطره ای از دریای بی کران مهربانیشان را سپاس نتوانم بگویم. امروز هستی ام به امید آن‌هاست و فردا کلید باغ بهشتم رضای آن‌ها.

از دوستانم بویژه سرکار خانم معصومه دان اصفهانی ویلدا سلطانی به دلیل یاری‌های ایشان تشکر می‌کنم.

با سپاس ازسه وجود مقدس:

آنان که ناتوان شدند تا ما به توانایی برسیم...

موهایشان سپید شد تا ما روسفید شویم...

و عاشقانه سوختند تا گرمابخش وجود ما و روشنگر راهمان باشند...

پدرانمان

مادرانمان

استادانمان

چکیده

دستگاه خطی پیش‌شرط‌ساز شده‌ی $PAX = Pb$ که در آن A یک M-ماتریس است را در نظر بگیرید. می‌خواهیم با مقایسه‌ی شعاع طیفی ماتریس تکرار روش‌های ژاکوبی بهبودیافته و روش‌های گاوس-سایدل بهبودیافته سرعت همگرایی به جواب را با پیش‌شرط‌سازهای مختلف مقایسه کنیم. در نهایت مشاهده می‌کنیم که سرعت همگرایی روش گاوس-سایدل بهبودیافته از سرعت همگرایی روش ژاکوبی بهبودیافته بیشتر است.

واژه‌های کلیدی: *M-ماتریس، شعاع طیفی، روش ژاکوبی بهبودیافته، روش گاوس-سایدل بهبودیافته، پیش‌شرط‌ساز.*

فهرست

فهرست تصاویر

فهرست جداول

پیش‌گفتار

پیش‌شرط‌سازی کردن روشی است از به کار بردن انتقال، شرایطی که مسأله‌ی داده شده را به شکلی که مناسب‌تر برای حل عددی است تبدیل می‌کند. پیش‌شرط‌سازی کردن وابسته به کاهش عدد شرطی مسأله است و مسأله‌ی پیش‌شرط‌ساز شده معمولاً با یک روش تکراری حل می‌شود. در این پایان‌نامه پیش‌شرط‌سازی کردن دستگاه معادلات خطی با استفاده از روش‌های تکراری ژاکوبی و روش تکراری گاوس–سایدل بررسی می‌شود.

فرض کنید $AX = b$ یک دستگاه معادلات خطی باشد می‌خواهیم با روش پیش‌شرط‌سازی کردن جواب دستگاه را با تقریب اولیه‌ی $X^{(0)}$ بدست آوریم. برای این منظور دستگاه از سمت چپ در ماتریس نامنفرد P ضرب می‌شود و دستگاه $PAX = Pb$ بدست می‌آید. فرض کنید $PA = M_P - N_P$ که M_P ماتریس معکوس‌پذیر است. آنگاه $X = M_P^{-1}N_pX + M_P^{-1}Pb$ و با داشتن تقریب اولیه‌ی X^0

$$X^{(k+1)} = M_P^{-1}N_PX^{(k)} + M_P^{-1}Pb, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{1}$$

جواب تکراری دستگاه پیش‌شرط‌ساز شده‌ی $PAX = Pb$ است. اگر از روش تکراری ژاکوبی برای تقریب جواب استفاده کنیم ماتریس M_P قطری و اگر از روش تکراری گاوس–سایدل برای تقریب جواب استفاده کنیم ماتریس M_P پایین مثلثی است.

فصل اول این پایان‌نامه به بیان روش تکراری ژاکوبی کلاسیک، روش گاوس–سایدل کلاسیک و بسیاری از مفاهیمی که در فصل‌های بعد استفاده خواهد شد، مانند Z–ماتریس‌ها، L–ماتریس‌ها، M–ماتریس‌ها، شکافت‌های روش ژاکوبی و گاوس–سایدل و... اختصاص دارد.

در فصل دوم روش ژاکوبی و روش گاوس–سایدل بهبودیافته معرفی می‌شود و به کمک مرجع [۲۳]

پیش‌شرط‌ساز $P = I + S'$ را معرفی و برای بهبود بخشیدن این پیش‌شرط‌ساز به کمک چند قضیه مدل‌هایی برای انتخاب (r,t) ارائه می‌شود. rو t بیان کننده‌ی rامین سطر و tامین ستون عنصر غیر صفر ماتریس $S'' = (s'_{i,j})$ است که $s'_{r,t} = c$. سپس به کمک چندین مثال نشان داده می‌شود کدام مدل انتخاب بهتری است.

در فصل سوم به کمک مرجع [۱۱] و [۲۴] دو پیش‌شرط‌ساز

$$P_{max} = I + S_{max} + R_{max}$$

$$P_R = I + S_{max} + R$$

معرفی و همگرایی و قضایای مقایسه‌ی مربوط به این پیش‌شرط‌سازها بیان می‌شود.

در فصل چهارم، ابتدا به کمک مرجع [۱۳] پیش‌شرط‌ساز $P_\alpha = (I + S_\alpha)$ را معرفی می‌کنیم و بعد از آن به کمک مرجع [۹] قضایای مقایسه‌ی شعاع طیفی روش گاوس-سایدل بهبودیافته با این پیش‌شرط‌ساز را بررسی می‌کنیم. سپس به کمک مرجع [۲۱] و [۲۰] چندین پیش‌شرط‌ساز معرفی و قضایای مقایسه‌ی این پیش‌شرط‌سازها با یکدیگر را مورد بحث قرار می‌دهیم.

در فصل پنجم، به کمک مرجع [۱] روش ژاکوبی بهبودیافته را با روش گاوس-سایدل بهبودیافته با پیش‌شرط‌سازهای P_{max} و P_R مقایسه می‌کنیم، نتیجه‌ی مقایسه نشان می‌دهد همگرایی روش گاوس-سایدل بهبودیافته از روش ژاکوبی بهبودیافته سریعتر است.

فصل اول

مفاهیم اولیه

۱.۱ تعاریف اولیه

در این فصل روش‌های تکراری ژاکوبی و گاوس-سایدل معرفی و بسیاری از مفاهیمی که در فصل‌های بعد استفاده خواهد شد، بیان می‌گردد.

تعریف ۱.۱.۱. [۱۴]، ماتریس حاصل از جابجایی سطرها و ستون‌های ماتریس همانی را ماتریس جایگشت [۱] گوییم.

قرارداد: $L(\mathbb{K}^n)$، فضای متشکل از ماتریس‌های $n \times n$ روی میدان $\mathbb{K}$ است.

تعریف ۲.۱.۱. [۱۴]، اگر به ازای هر $i, j = ۱, \cdots, n$ داشته باشیم

$$\lim_{k\to\infty} (A^k)_{i,j} = ۰$$

[۱] Permotation Matrix

آنگاه ماتریس A را همگرا گوییم. به عبارت دیگر ماتریس A را همگرا گوییم اگر و فقط اگر

$$\lim_{k\to\infty} A^k = ۰.$$

تعریف ۳.۱.۱. [۱۴]، نرم $\|.\|$ را روی $\mathbb{R}^n$ یا $\mathbb{C}^n$ یکنواخت گوییم اگر برای هر ماتریس قطری $D = diag(d_۱, \cdots, d_n)$ عملگر نرم متناظر در رابطه‌ی زیر صدق کند:

$$\|D\| = \max_{i=۱,\cdots,n} |d_i|\,.$$

تعریف ۴.۱.۱. [۱۱]، فرض کنیم $A = (a_{i,j})$ و $B = (b_{i,j})$ ماتریس‌های $n \times m$ باشند، گوییم $A \geq B$ است اگر برای هر $i = ۱, ..., n$ و $j = ۱, ..., n$ داشته باشیم $a_{i,j} \geq b_{i,j}$. اگر ۰ ماتریس $n \times m$ صفر باشد آنگاه A نامنفی است اگر $A \geq ۰$ و مثبت است اگر $A > ۰$.

با توجه به آنچه در [۱۸] بیان شده‌است، در حالت ضرب یک ماتریس منفرد و نامنفی A در یک ماتریس منفرد و نامنفی B یا در یک بردار نامنفی x، حاصل ممکن است یک ماتریس صفر یا یک بردار صفر شود که با نماد $AB \geq (=)۰$ یا $Ax \geq (=)۰$ نشان می‌دهیم و به این معنی است که $AB(Ax)$ یا یک ماتریس(بردار) نامنفی است و یا یک ماتریس(بردار) صفر. بنابراین در نمایش $A \geq (=)B$ و $x \geq (=)y$ حالت تساوی خارج شده است.

تعریف ۵.۱.۱. [۲]، ماتریس حقیقی A یکنوا[۱] گفته می‌شود، اگر از $AX \geq ۰$ نتیجه شود $X \geq ۰$.

تعریف ۶.۱.۱. [۱۷]، فرض کنیم $A = (a_{i,j})$ یک ماتریس مربعی مختلط با مقادیر ویژه‌ی λ_i $(۱ \leq i \leq n)$ باشد در این صورت

$$\rho(A) = \max_{۱\leq i\leq n} |\lambda_i|,$$

---

[۱] Monotone

شعاع طیفی A نامیده می‌شود.

تعریف ۷.۱.۱. [۸]، برای ماتریس مربعی A،گراف مستقیم $\Gamma(A)$ به صورت جفت (V,E) تعریف می‌شود که $V=\{1,\cdots,n\}$ مجموعه‌ی راس‌ها و $E=\{(i,j): a_{i,j}\neq 0, i,j=1,\cdots,n\}$ مجموعه‌ی یال‌هاست. یک مسیر از i به j از طول k در $\Gamma(A)$ دنباله‌ی راس‌های $\sigma=(i_0,i_1,\cdots,i_k)$ است که $i_0=i$ و $i_k=j$ به طوریکه $(i_0,i_1),(i_1,i_2),\cdots,(i_{k-1},i_k)$ یال‌های $\Gamma(A)$ هستند. مسیر σ بسته است اگر $i=j$ باشد. مسیر بسته‌ی $\sigma=(i_0,i_1,\cdots,i_k)$ با جفت راس‌های مجزای $i_1,\cdots,i_k$ مدار[۱] گفته می‌شود. می‌گوئیم گراف مستقیم $\Gamma(A)$ قویاً همبند است هرگاه برای هر دو راس i و j یک مسیر از i به j در $\Gamma(A)$ وجود داشته باشد. ماتریس A تحویل‌ناپذیر است اگر $\Gamma(A)$ قویاً همبند باشد.

تعریف ۸.۱.۱. [۱۷]، ماتریس مربعی مختلط A تحویل‌پذیر است اگر ماتریس جایگشت $n\times n$ ای مانند P موجود باشد که

$$PAP^T=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

که در آن $A_{1,1}$ یک زیر ماتریس $r\times r$ و $A_{2,2}$ یک زیر ماتریس $(n-r)\times(n-r)$، $1\leq r\leq n$، می‌باشند. اگر چنین ماتریس جایگشتی وجود نداشته باشد در این صورت A تحویل‌ناپذیر است. اگر A یک ماتریس مختلط 1×1 باشد دراین صورت اگر درایه‌ی واحد آن غیر صفر باشد A تحویل‌ناپذیر است و در غیر این صورت A تحویل‌پذیر است.

تعریف ۹.۱.۱. [۲۱]، ماتریس مربعی A، Z-ماتریس است اگر برای هر $i\neq j$، $a_{i,j}\leq 0$ باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱. [۱۴]، ماتریس مربعی A را یک M-ماتریس گوییم هرگاه

۱) $A^{-1}\geq 0$

---

[۱] Circuit

۲) به ازای هر $i \neq j$، $a_{ij} \leq ۰$ باشد.

تعریف ۱.۱.۱۱. [۲۳]، ماتریس A، L-ماتریس است اگر

$$\begin{cases} a_{i,i} \geq ۰, & i = ۱, \cdots, n \\ a_{i,j} \leq ۰, & i, j = ۱, \cdots, n, i \neq j. \end{cases}$$

توجه: L-ماتریس نامنفرد A، یک M-ماتریس نامنفرد است اگر $A^{-۱} \geq ۰$.

تعریف ۱.۱.۱۲. [۱۱]، فرض کنیم A، یک M-ماتریس باشد. دراین صورت $A = M - N$ را یک شکافت از A گفته می‌نامیم. همچنین

(۱) اگر M نامنفرد، $M^{-۱} \geq ۰$ و $M^{-۱}N \geq ۰$، در این صورت شکافت منظم ضعیف[۱] است.

(۲) اگر M نامنفرد، $M^{-۱} \geq ۰$ و $N \geq ۰$، در این صورت شکافت منظم [۲] است.

(۳) اگر M، M-ماتریس نامنفرد بوده و $N \geq ۰$، در این صورت شکافت A یک M- شکافت [۳] است.

تعریف ۱.۱.۱۳. [۱۸]، برای ماتریس‌های A، M و N تجزیه‌ی

$$A = M - N$$

(الف) یک شکافت نامنفی از A گفته می‌شود اگر M یک ماتریس نامنفرد باشد که $M^{-۱} \geq ۰$، $M^{-۱}N \geq ۰$ و $NM^{-۱} \geq ۰$.

(ب) یک شکافت نامنفی ضعیف از A گفته می‌شود اگر M یک ماتریس نامنفرد باشد که $M^{-۱} \geq ۰$

[۱] Weak regular

[۲] Regular

[۳] M-splitting

و یا $\circ \geq M^{-۱}N$ یا $\circ \geq NM^{-۱}$.

نتیجه ۱.۱.۱۴. [۱۸]، *هر شکافت منظم از یک ماتریس A یک شکافت نامنفی از A است و هر شکافت نامنفی از A یک شکافت نامنفی ضعیف از A است. حالت عکس برقرار نیست.*

تعریف ۱.۱.۱۵. [۱۵]، ماتریس مربعی $A = (a_{i,j})$

- قطر غالب [۱] است هرگاه

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} | a_{i,j} | \leq |a_{j,j}|, \qquad j = 1, \cdots, n;$$

- قطر غالب اکید [۲] است هرگاه

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} | a_{i,j} | < |a_{j,j}|, \qquad j = 1, \cdots, n;$$

- قطر غالب تحویل‌ناپذیر است هرگاه A تحویل‌ناپذیر بوده،

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} | a_{i,j} | \leq |a_{j,j}|, \qquad j = 1, \cdots, n;$$

و نامساوی برای حداقل یک j اکید باشد.

۱.۲ روش‌های تکراری

تعریف ۱.۲.۱. [۱۴]، فرض کنید X جواب دستگاه $AX = b$ باشد. هدف تقریب جواب دستگاه با استفاده از یک تقریب اولیه‌ی $X^{(\circ)}$ است. ایده‌ی این روش به این صورت است:

---

۱ Diagonally Dominant

۲ Strictly Diagonally Dominant

فرض کنید $A = M - N$ که M یک ماتریس معکوس پذیر باشد. پس

$$(M-N)X = b$$

پس:
$$MX = NX + b$$

در نتیجه:
$$X = (M^{-1}N)X + M^{-1}b$$

فرض کنید $M^{-1}N = T$ و $M^{-1}b = c$ پس $X = TX + c$ که T را ماتریس تکرار می‌گویند. با انتخاب تقریب اولیه $X^{(0)}$ داریم :

$$X^{(k+1)} = TX^{(k)} + c \qquad k = 0, 1, \ldots$$

قضیه ۱.۲.۲. [۱۴]، *احکام زیر معادلند*

(الف) *A یک ماتریس همگراست.*

(ب) *به ازای هر نرمی مانند $\|.\|$،*

$$\lim_{k\to\infty} \|A^k\| = 0.$$

(ج) $\rho(A) < 1$.

قضیه‌ی بنیادی روش‌های تکراری

قضیه ۱.۲.۳. [۱۴]، *فرض کنیم $T \in L(R^n)$ و $X = TX + c$ دارای جواب منحصر به X^* باشد، در این صورت معادله بازگشتی $X^{(k+1)} = TX^{(k)} + c$ به ازای هر جواب $X^{(0)}$ همگرا به X^* است اگر و فقط اگر $\rho(T) < 1$.*

اثبات. فرض کنید $\{X^{(k)}\}_{k\in N}$ به ازای هر جواب آغازین $X^{(\circ)}$ به X^* همگرا باشد، بنابراین

$$X^{(k+1)} = TX^{(k)} + c$$
$$X^* = TX^* + c$$

در نتیجه
$$\begin{aligned} X^{(k+1)} - X^* &= T(X^{(k)} - X^*) \\ &= T(T(X^{(k-1)} - X^*)) = T^2(X^{(k-1)} - X^*) \\ &\vdots \\ &= T^{(k+1)}(X^{(\circ)} - X^*) \end{aligned}$$

بنا به فرض
$$\lim_{k\to\infty}(X^{(k+1)} - X^*) = \circ$$

پس
$$\lim_{k\to\infty}(T^{k+1}(X^{(\circ)} - X^*)) = \circ$$

در نتیجه $\lim_{k\to\infty} T^{k+1} = \circ$ و طبق تعریف (۲.۱.۱)، T ماتریسی همگرا است و با توجه به قضیه‌ی (۲.۲.۱)، $\rho(T) < 1$ می باشد.

بالعکس: فرض کنیم که $\rho(T) < 1$ باشد. ثابت می‌کنیم که معادله بازگشتی $X^{(k+1)} = TX^{(k)} + c$، به ازای هر جواب آغازین $X^{(\circ)}$ به X^* همگرا است. با توجه به فرض، قضیه‌ی (۲.۲.۱) و تعریف (۲.۱.۱)، داریم

$$\lim_{k\to\infty} T^{k+1} = \circ$$

پس
$$\lim_{k\to\infty}(T^{k+1}(X^{(\circ)} - X^*)) = \circ$$

در نتیجه
$$\lim_{k\to\infty} T^k(X^{(1)} - X^*) = \circ$$

به همین ترتیب
$$\lim_{k\to\infty}(X^{(k+1)} - X^*) = \circ.$$