دانشگاه خوارزمی

دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (جبر )

عنوان

# مدول‌های ضربی با حلقه درون‌ریختی‌های حوزه صحیح

تدوین

**معصومه ختایی**

استاد راهنما

**دکتر عبدالجواد طاهری‌زاده**

مهر ۱۳۹۱

تقدیم به:

## سایه سبز زندگیم (پدر و مادرم)

## و

## همسر مهربانم

## و

## غنچه‌های زیبای زندگیم (ارغوان و پارسا)

# تقدیر و تشکر

اکنون که با عنایت خدای متعال این مقطع تحصیلی را به پایان رسانده‌ام جا دارد از استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر طاهری‌زاده به خاطر راهنمایی‌ها و زحماتی که بی‌منت برای اینجانب کشیده‌اند تشکر و قدردانی کنم.

همچنین از حضور استادان ارجمند جناب آقایان دکتر ذاکری و دکتر موسوی به خاطر قبول زحمت داوری این پایان‌نامه نیز سپاسگزاری می‌کنم.

از استاد عزیزم سرکار خانم دکتر ماهیار که با نهایت دقت و درایت مرا در این راه یاری نمودند نیز تشکر می‌کنم.

پدر و مادر عزیزم با تمام وجود قدردان زحمات و فداکاری‌هایتان هستم و بر دستان پرمهرتان بوسه می‌زنم و تا آخر عمر موفقیتم را مدیون تشویق و محبت شما می‌دانم.

از دختر نازنین و پسر گلم به خاطر همهٔ صبوری‌یشان و از همسر مهربان و فداکارم که مرا در این راه تشویق نمودند تشکر می‌کنم.

و همچنین از سرکار خانم گلزاری نیز که همانند یک خواهر به من محبت کردند و زحمت تایپ پایان‌نامه را کشیده‌اند سپاسگزاری می‌کنم.

در پایان این پایان‌نامه را به همهٔ کسانی که من در این راه به آنها مدیون هستم تقدیم می‌کنم و از خدای منان بهترین‌ها را برایشان آرزومندم.

## چکیده

در این پایان نامه خاصیت‌های متعددی در باره حلقه درون ریختی‌های مدول‌ها را بررسی می‌نمائیم. یک مدول ضربی $M$ روی یک حلقه جابه جایی مانند $R$ حلقه‌ای جابه جایی مانند $M^*$ یعنی حلقه درون ریختی‌های مدول $M$ را به دست می‌دهد. و از این رو می‌توان روابطی بین زیرمدول‌های اول (ماکسیمال) $M$ و ایده‌آل‌های اول (ماکسیمال)$M^*$ پیدا نمود. به ویژه در این پایان نامه دوکلاس از ایده‌آل‌های $M^*$ بررسی شده است.

یکی از این دوکلاس به صورت

$$G_{M^*}(M, N) = \{f \in M^*; f(M) \subseteq N\}$$

و دیگری به صورت

$$G_{M^*}(N, \circ) = \{f \in M^*; f(N) = \circ\}$$

که در آن $N$ یک زیرمدول از $M$ است.

**واژه‌های کلیدی:** مدول ضربی، مدول نیم انژکتیو، مدول خودهم مولد، زیرمدول بسته کیپ و زیرمدول بسته.

**رده‌بندی موضوعی ریاضی 2010:** 13C11، 13C10، 13C05.

# مقدمه

در این پایان نامه فرض می‌کنیم که همه حلقه‌ها شرکت‌پذیر و با عضو همانی و همه مدول‌ها، مدول‌های چپ یکانی هستند، مگر در حالتی که خلاف آن تصریح شده باشد.

فرض کنیم $R$ یک حلقه و $M$ یک $R$ـمدول است. در این صورت مجموعه همه $R$ ـهمریختی‌ها از $M$ به خودش با دو عمل جمع و ضرب به صورت زیر، ساختار یک حلقه دارد، که این حلقه را حلقه درون ریختی‌های $M$ می‌نامیم و آن را با $M^*$ نشان می‌دهیم، یعنی

$$M^* = \mathrm{Hom}_R(M,M) = \{f : M \longrightarrow M.\text{یک } R\text{-همریختی است } f\}$$

۱) به ازای هر $f,g \in M^*$ و هر $m \in M$، تعریف می‌کنیم

$$(f+g)(m) := f(m) + g(m).$$

۲) و به ازای هر $f \in M^*$ و هر $g \in M^*$ و هر $m \in M$،

$$(f.g)(m) := (fog)(m).$$

بنابراین $(M^*, +, \cdot)$ تبدیل به یک حلقه یکدار می‌شود که لزوماً جابه جایی نیست. زیرا در حالت کلی $(fog) \neq (gof)$.

با فرض آن که $R$ حلقه‌ای جابه‌جایی و $M$ یک $R$ ـمدول باشد. گروه آبلی $M^* = \mathrm{Hom}_R(M,M)$ که یک $Z$ـمدول است با تعریف یک ضرب اسکالر به صورت زیر یک $R$ـمدول می‌شود.

برای این منظور فرض کنیم $f \in \mathrm{Hom}_R(M,M)$ و $r \in R$، حاصلضرب اسکالر $r$ در $f$ را با $rf$ نشان می‌دهیم و چنین تعریف می‌کنیم

$$R \times M^* \longrightarrow M^*$$

$$rf(m) = f(rm)$$

در این صورت $rf$ یک عضو از $M^*$ است زیرا:

۱) به ازای هر $m_1, m_2 \in M$

$$(rf)(m_1 + m_2) = (rf)(m_1) + (rf)(m_2)$$

۲) به ازای هر $m \in M, s \in R$،

$$(rf)(sm) = s((rf)(m))$$

با تعریف ضرب اسکالر فوق، $M^* = \mathrm{Hom}_R(M, M)$ یک $R$ـمدول است که در اصول موضوعه زیر صدق می‌کند.

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۱) | $(r + r')f = rf + r'f$ | $r, r' \in R$ | به ازای هر |
| ۲) | $r(f + g) = rf + rg$ | $f, g \in M^*$ | به ازای هر |
| ۳) | $r(sf) = (rs)f$ | $f \in M^*, r, s \in R$ | به ازای هر |
| ۴) | $۱_R f = f$ | $f \in M^*$ | به ازای هر |

حال فرض کنیم $L$ و $N$ دو زیرمدول از $M$باشند در این صورت مجموعه $\{f \in M^* | f(L) \subseteq N\}$ را در نظر می‌گیریم. این مجموعه زیرگروه جمعی از $(M^*, +)$ است. که این مجموعه را با $G_{M^*}(L, N)$ نمایش می‌دهیم. حال اگر انتخاب‌های متفاوتی از $L$ و $N$ را در نظر بگیریم، دراین صورت ساختارهای جبری متفاوتی از $G_{M^*}(L, N)$ را خواهیم داشت. به طور مثال حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$۱)N \subseteq L \qquad ۲)L \subseteq N \qquad ۳)N \nsubseteq L \qquad ۴)L \nsubseteq N$$

در حالت (۱)، $G_{M^*}(L, N)$ زیرحلقه‌ای از حلقه $M^*$ خواهد بود. زیرا

۱) $G_{M^*}(L, N)$ زیرگروه جمعی از $M^*$ است.

۲) به ازای هر $f, g \in G_{M^*}(L, N)$ که $N \subseteq L$ داریم $f(L) \subseteq N$ و $g(L) \subseteq N$. همچنین $f(N) \subseteq f(L)$.

$$(f.g)(L) = (fog)(L) = f(g(L)) \subseteq f(N) \subseteq f(L) \subseteq N$$

پس نسبت به ضرب نیز بسته است. یعنی $(f.g) \in G_{M^*}(L,N)$. به خصوص

$$G_{M^*}(\circ,\circ) = \{f \in M^* | f(\circ) = \circ\} = M^*$$

$$G_{M^*}(M,\circ) = \{f \in M^* | f(M) = \circ\} = \circ$$

$$G_{M^*}(M,M) = \{f \in M^* | f(M) \subseteq M\} = M^*.$$

در حالت (۲) نمی‌توان $G_{M^*}(L,N)$ را زیرحلقه‌ای از $M^*$ در نظر گرفت زیرا در حالت کلی اگر $f,g \in G_{M^*}(L,N)$ لزومی ندارد که $(fog)(L) \subseteq N$. مگر در شرایطی خاص، مانند وقتی که زیر مدول $N$ از $M$، $f$ـپایاباشد (یعنی به ازای هر $f \in M^*$، $f(N) \subseteq N$). در این صورت $(f.g) \in G_{M^*}(L,N)$ . البته در حالت خاصی از (۲) داریم:

$$G_{M^*}(M,M) = \{f \in M^*; f(M) \subseteq M\} = M^*$$

$$G_{M^*}(\circ,N) = \{f \in M^*; f(\circ) \subseteq N\} = M^*.$$

در حالت‌های (۳) و(۴) ساختارهای جبری زیادی از $G_{M^*}(L,N)$ را نمی‌دانیم.

حال فرض کنیم $N$ یک زیرمدول از $M$ است. در این صورت $M \subseteq N \subseteq \circ$ و با استفاده از حالت (۱) به سه زیرحلقه زیر از $M^*$ خواهیم رسید.

$$G_{M^*}(M,N), G_{M^*}(N,N), G_{M^*}(N,\circ)$$

رابطه شمولی که بین این سه زیرحلقه وجود دارد به صورت

$$G_{M^*}(N,\circ) \subseteq G_{M^*}(N,N) \supseteq G_{M^*}(M,N).$$

در ادامه، در این پایان نامه، در فصل اول تعریف‌ها و قضیه‌های مورد نیاز در فصل‌های بعدی را عنوان خواهیم کرد. در فصل دوم در مورد حلقه درون ریختی $R$-مدول $M$ شرح خواهیم داد و مدول ضربی را نیز تعریف خواهیم کرد. همچنین خواهیم دید که اگر $R$ حلقه‌ای جابه‌جایی و $M$ یک $R$ـمدول ضربی باشد، آنگاه $M^*$ حلقه‌ای جابه جایی

می‌شود. در فصل سوم به بررسی یکی از زیرحلقه‌های $M^*$ یعنی $G_{M^*}(M,N)$ که در آن $N \subseteq M$، خواهیم پرداخت و خواهیم دید که اگر $R$ حلقه جابه‌جایی و یکدار و $M$ یک $R$ـمدول ضربی و $N$ یک زیرمدول اول $M$ باشد، آنگاه $G_{M^*}(M,N)$ یک ایده‌آل اول $M^*$ است و برعکس. در پایان در فصل چهارم به بررسی زیرحلقه $G_{M^*}(N,0)$ از $M^*$ می‌پردازیم و خواهیم دید که این زیرحلقه نیز ایده‌آل چپ از حلقه $M^*$ خواهد بود و مواردی را بررسی می‌کنیم که این ایده‌آل دوطرفه شود. همچنین رابطه بین $G_{M^*}(N,0)$ و مدول ضربی $M$ را بیان می‌کنیم و با بیان تعاریفی چون مدول خود هم مولد و مدول نیم انژکتیو و زیرمدول بسته نشان خواهیم داد که اگر $R$ حلقه‌ای جابه جایی و یکدار و $M$ یک $R$-مدول ضربی و $Z(M^*) = 0$ آنگاه عبارت‌های زیر معادلند:

۱) $M$، نیم انژکتیو است.

۲) $M^*$ یک میدان است.

۳) $M$، خود هم مولد است.

۴) برای هر $f \in M^*$ ناصفر، $f$ یک بروریختی است.

۵) $M$ ساده است.

در این پایان نامه از مقاله‌ی زیر استفاده شده است.

S. C. Lee, Multiplication Modules whose Endomorphism Rings are Integral Domains, Bull. Korean Math. Soc. 47 (2010), No. 5, pp. 1053-1066.

# فهرست مطالب

# فصل اول

# تعاریف و قضایای مورد نیاز

**تعریف ۱.۱.** فرض کنیم $R$ یک حلقه و $M$ یک $R$ـ مدول باشد. در این صورت $M$ یک $R$ـ مدول باوفا نامیده می‌شود هرگاه $\operatorname{Ann}_R(M) = 0$.

**تعریف ۲.۱.** گوئیم $R$ـ مدول $M$ در $R$ـ مدول $M'$ نشانده می‌شود، هرگاه $R$ـ همریختی یک به یک $\varphi : M \longrightarrow M'$ موجود باشد. در این صورت $M \underset{R}{\cong} \varphi(M) \leq M'$ . پس نسخه‌ای از $M$ در $M'$ موجود است.

**تعریف ۳.۱.** فرض کنیم $R$ حلقه جابه‌جایی و $F$ یک $R$ـ مدول باشد. مجموعه مولد $X$ برای $F$، یک پایه برای $F$ نامیده می‌شود هرگاه مستقل خطی باشند یعنی به ازای $x_1, \ldots, x_n \in X$ متمایز و $r_i \in R$ که $1 \leq i \leq n$، اگر $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i = 0$ آنگاه $r_i = 0$ به ازای هر $1 \leq i \leq n$. مدول $F$ روی حلقه $R$ آزاد نامیده می‌شود هرگاه پایه داشته باشند.

**قضیه ۴.۱.** [12, 7.5]فرض کنیم $R$ حلقه‌ای جابه‌جایی و $F$، یک $R$ـ مدول آزاد باشد در این صورت تعداد اعضای (عدد اصلی) هر دو پایه از $F$ برابر است.

**قضیه ۵.۱.** [9, 6.53(2)]فرض کنیم $M$ یک مدول روی حلقه جابه‌جایی $R$ باشد. مدول $M$ آزاد است اگر و تنها اگر $M$ با مجموع مستقیمی از $R$ها یکریخت باشد. ( در واقع اگر $M$ پایه‌ای چون $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ داشته باشد آنگاه $M \cong \oplus_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$ که در آن به ازای هر $\lambda \in \Lambda$، $R_\lambda = R$) .

**قضیه ۶.۱.** [9, 6.57]فرض کنیم $M$ مدولی روی حلقه جابه‌جایی $R$ باشد. در این صورت $R$ـ مدولی آزاد چون $F$ و $R$ـ همریختی پوشایی از $F$ به $M$ موجود است. همچنین اگر $M$ مولدی متناهی با $n$ عضو داشته باشد، آنگاه $R$ـ مدولی آزاد چون $F$ با پایه‌ای متناهی و دارای $n$ عضو و همریختی پوشایی از $F$ به $M$ موجود است.

**تعریف ۷.۱.** فرض کنیم $R$ یک حلقه جابه جایی و $F$ یک $R$ـمدول آزاد باشد در این صورت تعداد عضوهای هر پایه $F$، رتبه $F$ نامیده می‌شود و با $rankF$ نشان می‌دهند.

**تعریف ۸.۱.** مدول $P$ روی حلقه $R$ تصویری نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر نمودار

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow f & & \\ A & \underset{g}{\longrightarrow} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

از $R$ـ مدول‌ها و $R$ـ همریختی‌ها که سطر پایین دقیق است، یک $R$ـ همریختی مانند $h : P \longrightarrow A$ موجود باشد که نمودار تکمیل شده زیر جابه‌جایی است.

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & h \swarrow & \downarrow f & & \\ A & \underset{g}{\longrightarrow} & B & \longrightarrow & 0 \end{array} \qquad (\text{یعنی} \quad gh = f)$$

**قضیه ۹.۱.** [3, 3.4]فرض کنیم $R$ یک حلقه باشد. شرایط زیر برای $R$ـ مدول $P$ معادل‌اند.

۱) $P$ تصویری است.

۲) هر دنباله دقیق کوتاه $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ شکافته شده است. از این رو $B \cong A \oplus P$.

۳) مدول آزاد $F$ و $R$ـ مدول $K$ موجودند به طوری که $F \cong K \oplus P$.

**قضیه ۱۰.۱.** [12, 8.3]هر $R$ مدول آزاد، پرژکتیو است.

**قضیه ۱۱.۱.** [7, 2.5]فرض کنیم $(A,m)$ یک حلقه موضعی باشد در این صورت هر مدول تصویری روی $A$ آزاد است .

**تعریف ۱۲.۱.** فرض کنیم $R$ یک حلقه باشد. زیر مجموعه $S$ از $R$ را یک مجموعه بسته ضربی می‌نامیم هرگاه:

۱) $1 \in S$

۲) به ازای هر $a,b \in S$، $ab \in S$.

**تعریف ۱۳.۱.** فرض کنیم $R$ یک حلقه جابه‌جایی و $P$ ایده‌آلی از $R$ باشد. گوئیم $P$ ایده‌آل اول از $R$ است هرگاه

۱) $P \subset R$، یعنی $P$ ایده‌آل سره از $R$ باشد.

۲) به ازای هر $a,b \in R$ که $ab \in P$ آنگاه $a \in P$ یا $b \in P$.

**تعریف ۱۴.۱.** فرض کنیم $S$ زیر مجموعه بسته ضربی از $R$ باشد. رابطه‌ی $\sim$ را روی $R \times S$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم. به ازای هر $(a,s),(b,t) \in R \times S$ می‌نویسیم $(a,s) \sim (b,t)$ اگر و تنها اگر $u$ از $S$ موجود باشد به طوری که $u(ta-sb)=0$ . در این صورت $\sim$ رابطه‌ی هم‌ارزی روی $R \times S$ است. ردهٔ هم‌ارزی شامل $(a,s)$ را با $\frac{a}{s}$ یا $a/s$ و مجموعه رده‌های هم‌ارزی $\sim$ را با $S^{-1}R$ نمایش می‌دهیم و قرار می‌دهیم.

$$S^{-1}R = \{\frac{a}{s}; a \in R, s \in S\}$$
$$\frac{a}{s} = \{(b,t) \in R \times S; (b,t) \sim (a,s)\}$$

در $S^{-1}R$ جمع و ضرب را چنین تعریف می‌کنیم $\frac{a}{s}+\frac{b}{t}=\frac{ta+sb}{st}$ و $\frac{a}{s}.\frac{b}{t}=\frac{ab}{st}$ . این جمع و ضرب خوش تعریف هستند و به علاوه $S^{-1}R$ با این اعمال جمع و ضرب تشکیل یک حلقه جابه‌جایی و یکدار می‌دهد. $S^{-1}R$ حلقه کسرهای $R$ نسبت به $S$ نامیده می‌شود که عضو صفر آن $\frac{0}{1}$ و عضو همانی آن $\frac{1}{1}$است. در حالتی که $R$ حلقه

جابه‌جایی و یکدار و $\underline{p}$ ایده‌آل اول از $A$ باشد و $S = R\backslash\underline{p}$ ، حلقه $S^{-1}R$ را با $R_{\underline{p}}$ نشان می‌دهند و $R_{\underline{p}}$ موضعی شده $R$ در $\underline{p}$ نامیده می‌شود.

**تعریف ۱.۱۵.** فرض کنیم $R$ یک حلقه جابه‌جایی باشد. مجموعه همه ایده‌آل‌های اول $R$ را با $\mathrm{spec}(R)$ نمایش می‌دهند.

**تعریف ۱.۱۶.** فرض کنیم $M$ یک $R$ـ مدول و $S$ یک زیر مجموعه بسته ضربی از $R$ باشد. رابطه $\sim$ را روی $M \times S$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم. برای هر $m, m' \in M$ و هر $s, s' \in S$ ، $(m, s) \sim (m', s')$ اگر و تنها اگر $t \in S$ موجود باشد به طوریکه $t(s'm - m's) = 0$. در این صورت $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی روی $M \times S$ است. برای هر $m \in M$ و هر $s \in S$ کلاس هم‌ارزی $(m, s)$ را با علامت $\frac{m}{s}$ نشان می‌دهیم. قرار می‌دهیم

$$S^{-1}M = \{\frac{m}{s}; m \in M, s \in S\}$$

در $S^{-1}M$ عمل جمع را چنین تعریف می‌کنیم. $\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} = \frac{s'm+sm'}{ss'}$ که $S^{-1}M$ با این عمل جمع یک گروه آبلی است. برای هر $\frac{m}{s} \in S^{-1}M$ و هر $\frac{a}{t} \in S^{-1}R$ حاصل ضرب اسکالر $\frac{a}{t}$ در $\frac{m}{s}$ را چنین تعریف می‌کنیم. $\frac{a}{t}.\frac{m}{s} = \frac{am}{ts}$ با این ضرب اسکالر $S^{-1}M$ یک $S^{-1}R$ مدول می‌شود. اگر $P$ ایده‌آل اولی از $R$ و $S = R\backslash P$ باشد، $S^{-1}M$ را با $M_P$ نشان می‌دهند که در این حالت $M_P$ یک $R_P$ مدول است.

**قضیه ۱.۱۷.** [9, 9.9]فرض کنیم دنباله $N \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} l$ دنباله‌ای دقیق از مدول‌های روی حلقه جابه‌جایی $R$ و $R$ـ همریختی‌ها باشد و $S$ نیز یک مجموعه بسته ضربی از $R$ باشد. در این صورت دنباله

$$S^{-1}l \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}N$$

نیز دقیق است.

**قضیه۱.۱۸.** [9, 9.8]فرض کنیم $L_1$ و $L_2$ زیر مدول‌هایی از مدول $M$ روی حلقه جابه‌جایی $R$ و $x \in R$ و $S$ یک مجموعه بسته ضربی از $R$ باشد و فرض کنیم که $X$ یک $R$ـ مدول با تولید متناهی باشد. در این صورت

۱) $S^{-1}(L_1 + L_2) = S^{-1}L_1 + S^{-1}L_2$

۲) $S^{-1}(xM) = (\frac{x}{1})S^{-1}M$

۳) $S^{-1}(\mathrm{Ann}_R(X)) = \mathrm{Ann}_{S^{-1}R}(S^{-1}X)$

**قضیه ۱.۱۹.** [9, 9.16]فرض کنیم $f : L \longrightarrow G$ یک همریختی از مدول‌ها روی حلقه جابه جایی $R$ باشد. در این صورت احکام زیر معادل‌اند.

۱) $f$ یک به یک است.

۲) به ازای هر $P \in (R)$ ، $f_P : L_P \longrightarrow G_P$ یک به یک است.

**گزاره ۱.۲۰.** [6, 2.3.1(1)]فرض کنیم $R$ یک حلقه جابه‌جایی باشد.

۱) اگر $P$ یک $R$ـ مدول تصویری و $S$ یک مجموعه بسته ضربی از $R$ باشد، در این صورت $S^{-1}P$ یک $S^{-1}R$ مدول تصویری است.

**تعریف ۱.۲۱.** فرض کنیم $R$ یک حلقه جابه‌جایی و $P$ یک $R$ـ مدول تصویری با تولید متناهی باشد. برای هر ایده‌آل اول $p$ از $\mathrm{spec}(R)$ تابع رتبه به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$rank(P,p) = rank(P_p)$$

اگر برای هر $p$ در $\mathrm{spec}(R)$، $rank(P,p) = r$ ثابت باشد، آنگاه گوئیم $P$ از رتبه $r$ است.

**تعریف ۱.۲۲.** فرض کنیم $R$ حلقه جابه‌جایی و $I$ یک ایده‌آل $R$ باشد. در این صورت

$$\sqrt{I} := \{r \in R; r^n \in I \text{ ای متعلق به } N \text{ وجود داشته باشد که } n\}$$

ایده‌آلی از $R$ است که $I$ را شامل می‌شود و رادیکال $I$ نامیده می‌شود.

**تعریف و لم ۲۳.۱.** [9, 3.48]فرض کنیم $I$ ایده‌آل حلقه جابه‌جایی $R$ باشد. واریتهٔ $I$ که با نماد $Var(I)$ نشان داده می‌شود برابر با مجموعه

$$Var(I) := \{p \in \operatorname{spec}(R); I \subseteq p\}$$

تعریف می‌شود. در این صورت

$$\sqrt{I} = \cap_{p \in Var(I)} p = \cap_{p \in \operatorname{spec}_{I \subseteq p}(R)} p$$

**تعریف ۲۴.۱.** رادیکال پوچ حلقه جابه‌جایی $R$ را با نماد $\sqrt{\circ}$ نشان می‌دهند که

$$\sqrt{\circ} = \cap_{p \in \operatorname{spec}(R)} p$$

بالاخص $\sqrt{\circ}$ را با $Nil(R)$ نمایش می‌دهند که در واقع

$$Nil(R) = \{r \in R; r^n = \circ \quad \text{به ازای عدد طبیعی مثل } n\text{،}\}$$

مجموعه تمام اعضای پوچ توان $R$ است.

حلقه جابه‌جایی $R$، کاهش یافته نامیده می‌شود هرگاه رادیکال پوچش صفر باشد.

**تعریف ۲۵.۱.** فرض کنیم $R$ حلقه جابه‌جایی و $I$ ایده‌آل سره‌ای از $R$ باشد. ایده‌آل اولی از $R$ مثل $p$ را که شامل $I$ است ایده‌آل اول مینیمال $I$ نامیده می‌شود هرگاه ایده‌آل اولی از $R$ مانند $q$ موجود نباشد که $I \subseteq q \subsetneqq p$ . مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول مینیمال $I$ را با $\operatorname{Min}(I)$ نمایش می‌دهند. هر ایده‌آل اول مینیمال صفر به ایده‌آل اول مینیمال $R$ معروف است.در واقع ایده‌آل اولی از$R$ مثل $p$ ایده‌آل اول مینیمال $R$ است هرگاه ایده‌آل اولی از $R$ مثل $q$ موجود نباشد که $q \subsetneqq p$. مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول مینیمال $R$ با $\operatorname{Min}(R)$ نمایش می‌دهند.

**لم ۲۶.۱.** [9, 3.54]فرض کنیم $I$ یک ایده‌آل سره حلقه جابه‌جایی $R$ و $\operatorname{Min}(I)$ نشان‌دهنده مجموعه ایده‌آل اول مینیمال $I$ باشد. در این صورت

$$\sqrt{I} = \cap_{p \in \operatorname{Min}(I)} p$$

همچنین با فرض $I = \circ$ داریم.

$$Nil(R) = \sqrt{\circ} = \cap_{p \in \mathrm{Min}(R)} p$$

**تعریف ۲۷.۱.** ایده‌آل $M$ از حلقه جابه‌جایی $R$ یک ایده‌آل ماکسیمال نامیده می‌شود هرگاه

۱) $M \subset R$

۲) ایده‌آلی چون $I$ از $R$ موجود نباشد که $M \subset I \subset R$.

**لم ۲۸.۱.** [3, 2.21]شرایط زیر برای حلقه جابه‌جایی و یکدار $R$ با واحد $\mathbf{1}_R \neq \circ$ معادلند.

۱) $R$ یک میدان است.

۲) $R$ ایده‌آل حقیقی ندارد.

۳) صفر ایده‌آل ماکسیمال در $R$ است.

هر میدان مثالی از یک حلقه جابه‌جایی است که دقیقاً یک ایده‌آل ماکسیمال دارد. زیرا ایده‌آل صفر تنها ایده‌آل سره‌اش است.

**تعریف ۲۹.۱.** فرض کنیم $E$ یک $R$ـ مدول باشد. در این صورت $E$ انژکتیو نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر نمودار از $R$ـ همریختی‌ها و $R$ـ مدول‌ها مانند

$$\begin{array}{ccccc} \circ & \longrightarrow & M & \xrightarrow{g} & N \\ & & \downarrow f & & \\ & & E & & \end{array}$$

که سطر بالا دقیق است، $R$ـ همریختی مانند $\varphi : N \longrightarrow E$ موجود باشد به طوری که نمودار تکمیل شده زیر جابه‌جایی باشد.

$$\begin{array}{ccccc} \circ & \longrightarrow & M & \xrightarrow{g} & N \\ & & \downarrow f & \swarrow \varphi & \\ & & E & & \end{array} \qquad (\text{یعنی} \quad \varphi g = f)$$

**تعریف ۳۰.۱.** فرض کنیم $R$ یک حلقه جابه‌جایی و یکدار و $E$ یک $R$ـمدول باشد. یک عضو $e$ از $E$ بخش پذیر نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $r \in R\backslash Zd(R)$، $e'$ عضو $E$ موجود باشد به طوری که $e = re'$. اگر هر عضو $E$ بخش‌پذیر باشد. آنگاه $E$ یک مدول بخش‌پذیر است. معادلاً $E$ بخش‌پذیر است هرگاه $E = rE$ که $r \in R\backslash Zd(R)$.

**قضیه بئر ۳۱.۱.** [12, 9.3]فرض کنیم $E$ یک $R$ـ مدول باشد. اگر به ازای هر ایده‌آل مثل $I$ از $R$، هر $R$ـ همریختی مثل $\varphi : I \longrightarrow E$ را بتوان به $R$ـ همریختی از $R$ به $E$ توسیع داد، (یعنی $R$ـ همریختی‌ای مثل $\psi : R \longrightarrow E$ یافت شود که $\psi\big|_I = \varphi$ ) آنگاه $E$ انژکتیو است.

**قضیه ۳۲.۱.** [10, 2.6]هر $R$ـ مدول انژکتیو، مدولی بخش‌پذیر است.

**تعریف ۳۳.۱.** زیر مدول $N$ از $M$ جمعوند مستقیم $M$ نامیده‌می‌شود هرگاه زیر مدولی مانند $K$ از $M$ موجود باشد به طوری که $M = N + K$ و $N \cap K = ۰$. این مطلب معادل است با این که $M = K \oplus N$.

**قضیه ۳۴.۱.** [9, 3.9]فرض کنیم $R$ حلقه جابه‌جایی و ناصفر باشد. در این صورت $R$ دست کم یک ایده‌آل ماکسیمال دارد.

**نتیجه ۳۵.۱.** [9, 3.10]فرض کنیم $I$ ایده‌آل سره از حلقه جابه‌جایی $R$ باشد در این صورت ایده‌آل ماکسیمالی چون $M$ از $R$ موجود است که $I \subseteq M$.

**قضیه ۳۶.۱.** فرض کنیم $R$ حلقه جابه‌جایی و یکدار و $M$ یک $R$ـ مدول با تولید متناهی و $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از $R$ باشد در این صورت

$$r(\mathrm{Ann}(\frac{M}{\mathfrak{a}M})) = r(\mathrm{Ann}_R(M) + \mathfrak{a})$$

**برهان.** فرض کنیم $x \in r(\mathrm{Ann}_R(M)+\mathfrak{a})$ در این صورت $n \in N$ موجود است که $x^n \in (\mathrm{Ann}_R(M)+\mathfrak{a})$. در این صورت $y \in \mathrm{Ann}_R(M)$ و $z \in \mathfrak{a}$ موجودند به طوری که $x^n = y+z$. همچنین برای هر $m \in M$، $ym = 0$.

حال فرض کنیم $m + \mathfrak{a}M \in \frac{M}{\mathfrak{a}M}$ که $m \in M$ . در این صورت

$$x^n(m+\mathfrak{a}M) = x^n m + \mathfrak{a}M = (y+z)m + \mathfrak{a}M = ym + zm + \mathfrak{a}M = zm + \mathfrak{a}M = \mathfrak{a}M.$$

بنابراین $x^n \in \mathrm{Ann}_R(\frac{M}{\mathfrak{a}M})$. از این رو $x \in r(\mathrm{Ann}_R(\frac{M}{\mathfrak{a}M}))$

برعکس. فرض کنیم $x \in r(\mathrm{Ann}_R(\frac{M}{\mathfrak{a}M}))$. پس $t \in N$ موجود است به طوری که $x^t \in \mathrm{Ann}_R(\frac{M}{\mathfrak{a}M})$ بنابراین $x^t(\frac{M}{\mathfrak{a}M}) = 0$ پس $\frac{x^t M + \mathfrak{a}M}{\mathfrak{a}M} = 0$ . در نتیجه $x^t M + \mathfrak{a}M = \mathfrak{a}M$ از این رو $x^t M \in \mathfrak{a}M$ چون $M$ با تولید متناهی است فرض کنیم $\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ مولدی برای $M$ باشند. لذا

$$x^t m_1 \in \mathfrak{a}M = a_{11}m_1 + \cdots + a_{1n}m_1$$

$$x^t m_2 \in \mathfrak{a}M = a_{21}m_2 + \cdots + a_{2n}m_2$$

$$\vdots$$

$$x^t m_n \in \mathfrak{a}M = a_{n1}m_n + \cdots + a_{nn}m_n$$

در نتیجه

$$\begin{pmatrix} x^t - a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & x^t - a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & x^t - a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = 0$$

که در آن برای هر $1 \leq i \leq n$، $a_{i1}, \ldots, a_{in} \in \mathfrak{a}$. بنابراین $\alpha \in \mathfrak{a}$ موجود است که برای هر $1 \leq i \leq n$، $((x^t)^n - \alpha)m_i = 0$ در نتیجه $(x^{tn} - \alpha)m_i = 0$. پس $x^{tn} - \alpha \in \mathrm{Ann}_R(M)$ که $\alpha \in \mathfrak{a}$ و $tn \in N$، لذا $x^{tn} \in (\mathrm{Ann}_R(M) + \alpha)$، لذا $x \in r(\mathrm{Ann}_R(M) + \alpha)$.

بنابراین $r(\mathrm{Ann}_R(\frac{M}{\mathfrak{a}M})) \subseteq r(\mathrm{Ann}_R(M)+\mathfrak{a})$ . در نتیجه نشان دادیم که

$$r(\mathrm{Ann}_R(\frac{M}{\mathfrak{a}M})) = r(\mathrm{Ann}_R(M)+\mathfrak{a}).$$

**قضیه ۳۷.۱.** فرض کنیم $R$ یک حلقه جابه‌جایی و یکدار و $M$ یک $R$ـ مدول با تولید متناهی و $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از $R$ باشد. در این صورت $\mathfrak{a}M = M$ اگر و تنها اگر $\mathrm{Ann}_R(M)+\mathfrak{a} = R$.

**برهان.** فرض کنیم $\mathfrak{a}M = M$. از این رو $\frac{M}{\mathfrak{a}M} = \circ$. از طرفی می‌دانیم $\mathrm{Ann}_R(M) = R$ اگر و فقط اگر $M = \circ$. بنابراین چون $\frac{M}{\mathfrak{a}M} = \circ$ پس $\mathrm{Ann}_R(\frac{M}{\mathfrak{a}M}) = R$. همچنین می‌دانیم $I = R$ اگر و تنها اگر $\sqrt{I} = R$. بنابراین $r(\mathrm{Ann}\frac{M}{\mathfrak{a}M}) = r(R) = R$. از طرفی طبق قضیه (۳۵.۱)، $r(\frac{M}{\mathfrak{a}M}) = r(\mathrm{Ann}_R(M)+\mathfrak{a})$ پس $r(\mathrm{Ann}_R(M)+\mathfrak{a}) = R$. بنابراین $\mathrm{Ann}_R(M)+\mathfrak{a} = R$.

برعکس. فرض کنیم $\mathrm{Ann}_R(M)+\mathfrak{a} = R$ . نشان می‌دهیم $\mathfrak{a}M = M$. برای این منظور داریم

$$(\mathrm{Ann}_R(M)+\mathfrak{a})M = RM = M$$

همچنین می‌دانیم $(\mathrm{Ann}_R(M)M) = \circ$. پس

$$M = RM = (\mathrm{Ann}_R(M)+\mathfrak{a})M = (\mathrm{Ann}_R(M))M + \mathfrak{a}M = \mathfrak{a}M$$

بنابراین $\mathfrak{a}M = M$.

**قضیه ۳۸.۱.** فرض کنیم $R$ حلقه جابه‌جایی و $M$ یک $R$ـ مدول با تولید متناهی باشد. اگر به ازای هر $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$، داشته باشیم $\mathfrak{m}M = M$. در این صورت $M = \circ$

**برهان.** فرض (خلف) کنیم که $M \neq \circ$. در این صورت $\circ \neq x \in M$ موجود است به طوری که $\mathrm{Ann}_R(x)$ یک ایده‌آل سره از $R$ است. پس طبق ۳۴.۱، ایده‌آل $m_\circ \in \mathrm{Max}(R)$ موجود است به طوری که $\mathrm{Ann}_R(x) \subseteq m_\circ$. از طرفی طبق فرض $m_\circ M = M$. حال چون $M$ با تولید متناهی است و طبق (۳۶.۱)، $\mathrm{Ann}_R(M)+m_\circ = R$ . همچنین

$$R = \mathrm{Ann}_R(M)+m_\circ \subseteq \mathrm{Ann}_R(x)+m_\circ = m_\circ$$