بسم اللّه الرّحمن الرّحيم

دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی– گرایش آنالیز ریاضی

خاصیت نقطه ثابت جبرهای باناخ تعویض‌پذیریکانی

پژوهشگر

حسین عیسی آبادی

استاد راهنما

دکتر داود علیمحمدی

استاد مشاور

دکتر سیروس مرادی

دانشگاه اراک

زمستان ۱۳۹۰

تقدیر و تشکر

ضمن سپاس به درگاه ایزد یکتا، بر خود لازم می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد گرانقدرم جناب آقای دکترداود علیمحمدی که در تمامی مراحل این تحقیق با راهنمایی‌های ارزنده‌شان، دلسوزانه یار و یاورم بودند و با صبر و حوصله از هیچ کمکی نسبت به اینجانب دریغ نکردند صمیمانه سپاس‌گذاری کنم.

از جناب آقای دکترسیروس مرادی استاد مشاور ارجمندم سپاس ویژه دارم که در تمامی مراحل تحصیل همواره مشوق و پشتیبان برایم بوده و با رهنمودهای ارزنده‌شان، راهگشای اینجانب بوده‌اند.

هم‌چنین از مادر و همسر عزیزم به خاطر تمامی کمک ها و دلگرمی هایشان در تمامی لحظات زندگی‌ام تشکر می‌نمایم.

در پایان از همگی دوستان خوبم که در این مدت با حضور گرم‌شان همراهم بوده‌اند کمال تشکر را دارم.

چکیده

یکی از مسائل مهم در نظریه‌ی نقطه‌ی ثابت تعیین فضاهای باناخی است که خاصیت نقطه‌ی ثابت دارند یا ندارند.گوییم یک فضای باناخ $\mathfrak{X}$ خاصیت نقطه‌ی ثابت دارد هرگاه به ازای هر مجموعه‌ی ناتهی محدب بسته‌ی کراندار E در $\mathfrak{X}$ ، هر نگاشت غیر انبساطی $T : E \to E$ داشته باشیم $Fix(T) = \emptyset$ که $Fix(T) = \{x \in E : T(x) = x\}$.

در این پایان نامه بررسی می کنیم که یک جبر باناخ تعویض‌پذیر یکانی تحت شرایطی خاصیت نقطه‌ی ثابت ندارد. به عنوان نتایجی از این بررسی، ما در مورد جبر توابع پیوسته حقیقی–مقدار(مختلط–مقدار) $C_{\mathbb{R}}(X)$ ($C(X)$) احکامی به دست می آوریم، که X فضای توپولوژیکی فشرده‌ی هاسدورف است ونشان می دهیم یک زیر جبر حقیقی بسته‌ی تعویض‌پذیر یکانی ${\ell^\infty}_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$ وجود دارد که‌خاصیت نقطه‌ی ثابت ندارد و حاوی $c_{\circ_{\mathbb{R}}}(\mathbb{N})$ نیست .

واژه‌های کلیدی:

جبر باناخ – جبرتوابع پیوسته–خاصیت نقطه‌ی ثابت – فضای باناخ –نگاشت غیر انبساطی .

پیش گفتار

فرض کنیم $(\mathfrak{X}, ||.||)$ یک فضای نرمدار روی میدان $\mathbb{F}$ باشد و $E \subseteq \mathfrak{X}$. نگاشت $T : E \to E$ را یک نگاشت غیر انبساطی می نامیم هرگاه به ازای هر $f, g \in E$ ؛ $||T(f) - T(g)|| \leq ||f - g||$.

گوییم فضای باناخ $(\mathfrak{X}, ||.||)$ خاصیت نقطه‌ی ثابت دارد هرگاه به ازای هر مجموعه‌ی ناتهی محدب بسته‌ی کراندار E در $\mathfrak{X}$ ، هر نگاشت غیر انبساطی $T : E \to E$ یک نقطه‌ی ثابت داشته باشد .

در سال ۲۰۱۰ ، دبلیو. فوپینونگ[1] و اس. دامپونگسا[2] ، در مقاله‌ی [3] ، خاصیت نقطه‌ی ثابت جبرهای باناخ تعویض‌پذیر یکانی را مورد بررسی قرار دادند و ثابت کردند که یک جبر باناخ تعویض‌پذیریکانی تحت شرایطی خاصیت نقطه‌ی ثابت ندارد. به عنوان مثال، نشان دادند که اگر جبر باناخ حقیقی (مختلط) توابع حقیقی–مقدار (مختلط–مقدار) پیوسته بر یک فضای توپولوژیکی فشرده‌ی هاسدورف نامتناهی–بعد باشد، خاصیت نقطه‌ی ثابت ندارد. همچنین زیرجبرهایی از جبر باناخ دنباله‌های عددی حقیقی کراندار را ارائه نمودند که خاصیت نقطه‌ی ثابت ندارند .

در سال ۲۰۱۰ ، د. علیمحمدی [3] و س. مرادی [4] ، در مقاله‌ی [1] ، خاصیت نقطه‌ی ثابت برای زیر جبرهای یکنواخت بسته‌ی یکانی جبر توابع مختلط پیوسته بر یک فضای توپولوژیکی فشرده‌ی هاسدورف را مورد بررسی قرار دادند و با استفاده از نتایج بدست آمده در مقاله [3] وهمچنین با استفاده از مفهوم نقطه‌ی قله‌ای ، برخی اززیرجبر های جبر توابع مختلط پیوسته بر یک فضای توپولوژیکی فشرده‌ی هاسدورف را مشخص نمودند که خاصیت نقطه‌ی ثابت ندارند .

در سال ۲۰۱۱ ، اس. دامپونگسا، دبلیو. فوپینونگ و دبلیو. لاوتن[5] در مقاله‌ی [2] خاصیت نقطه‌ی ثابت برای $C^\star$– جبرها را مورد بررسی قرار دادند و ثابت کردند که یک $C^\star$– جبر

W. Fupinwong[1]
S. Dhompongsa[2]
D. Alimohammadi [3]
S. Moradi[4]
W. Lawton[5]

خاصیت نقطه‌ی ثابت دارد اگر و فقط اگر متناهی–بعد باشد.

در این پایان نامه ، مقاله‌ی [3] به طور کامل باز شده است . در فصل اول تعاریف ، مفاهیم اولیه وقضایایی آورده شده اند که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می گیرند . در فصل دوم برخی از جبرهای باناخ دنباله‌های عددی معرفی شده‌اند و برخی از خواص آنها مورد بررسی قرار گرفته است . در فصل سوم ثابت نموده ایم که جبرهای باناخ تعویض‌پذیر یکانی حقیقی ومختلط تحت شرایطی خاصیت نقطه‌ی ثابت ندارد . بالاخص ، نشان داده ایم که جبرهای توابع حقیقی ومختلط پیوسته متریک فضای فشرده‌ی هاسدورف خاصیت نقطه‌ی ثابت ندارند هرگاه نامتناهی– بعد باشند .

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم اولیه و مقدمات

با $\mathbb{R}$، $\mathbb{C}$، $\mathbb{N}$ به ترتیب میدان اعداد حقیقی، میدان اعداد مختلط و مجموعه‌ی اعداد طبیعی را نمایش می‌هیم. همچنین با $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$، دایره‌ی واحد را نمایش می‌دهیم. علامت $\mathbb{F}$ برای نمایش یک میدان به کار می‌بریم که یامیدان اعداد حقیقی یا میدان اعداد مختلط است. اعضای $\mathbb{F}$ اسکالرها نامیده می‌شوند.

در این فصل به تعریف مفاهیم اولیه و بیان قضایایی می‌پردازیم که در فصل دوم و سوم مورد نیاز هستند. برای آشنایی بیشتر با این مفاهیم و برهان قضایا به مراجع [6]، [7] و [9] مراجعه شود.

۱.۱ فضاهای توپولوژیکی

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم E یک مجموعه‌ی نا تهی بوده و $T : E \to E$ یک تابع باشد . نقطه‌ی $x \in X$ را یک نقطه‌ی ثابت T می نامیم هرگاه $T(x) = x$. مجموعه‌ی همه‌ی نقاط ثابت T رابه $Fix(T)$ نشان می دهیم .

به عنوان مثال اگر f یک تابع حقیقی پیوسته بر بازه‌ای بسته‌وکراندار $[a, b]$ باشد و$f([a, b]) \subseteq [a, b]$ آنگاه f حداقل یک نقطه ثابت در $[a, b]$ دارد .

تعریف ۲.۱.۱ فضای توپولوژیکی X را در نقطه x موضعاً فشرده گوییم هرگاه زیرمجموعه‌ی فشرده‌ای از X مانند C یافت شود به‌طوری‌که حاوی یک همسایگی x باشد. اگر X در هر نقطه خود موضعاً فشرده باشد آن‌گاه فضای توپولوژیکی X را موضعاً فشرده می‌نامیم.

تعریف ۳.۱.۱ فضای توپولوژیکی X یک فضای هاسدورف می نامیم هرگاه به ازای هر دو نقطه‌ی متمایز X مانند x و y مجموعه‌های باز U و V در X یافت شوند به طوری که $x \in U$ ، $y \in V$ و $U \bigcap V = \emptyset$.

لم ۴.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای توپولوژیکی موضعاً فشرده‌ی هاسدورف باشد. دراین‌صورت، X در نقطه x موضعاً فشرده است اگر وفقط اگر به‌ازای‌هر همسایگی x مانند U، یک همسایگی x مانند V یافت شود به‌طوری‌که $\overline{V}$ فشرده باشد و $\overline{V} \subseteq U$.

برهان. $[6; 8.2]$ □

تعریف ۵.۱.۱ (الف) فضای توپولوژیکی X را فشرده‌بر حسب نقطه‌ی حدی می نامیم هرگاه هر زیر مجموعه‌ی نامتناهی X یک نقطه حدی در X داشته باشد.
(ب) فضای توپولوژیکی X را فشرده‌ی دنباله می نامیم هرگاه هر دنباله از نقاط X زیر دنباله‌ای همگرا در این فضاداشته باشد.

قضیه ۶.۱.۱ فرض کنیم X فضایی مترپذیر باشد در این صورت احکام ذیل معادلند:

(الف) X فشرده است.

(ب) X فشرده بر حسب نقطه حدی است.

(ج) X فشرده‌ی دنباله ای است.

قضیه ۷.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای فشرده و Y یک فضای هاسدورف باشند. اگر $F : X \to Y$ یک نگاشت پیوسته ویک به یک از X به روی Y باشد، آنگاه F یک همانریختی از X به Y است .

برهان. کافی است نشان دهیم که $F^{-1} : Y \to X$ پیوسته است فرض کنیم K یک مجموعه بسته در X باشد . چون X فشرده است و $K \subseteq X$ در X بسته است پس K یک مجموعه ی فشرده در X است . پیوستگی $F : X \to Y$ ایجاب می کند که $F(K)$ یک مجموعه‌ی فشرده در Y است . چون Y یک فضای هاسدورف است نتیجه می شود که $F(K)$ یک مجموعه ی بسته در Y است . اما $F(K) = (F^{-1})^{-1}(K)$ پس $(F^{-1})^{-1}(K)$ یک مجموعه بسته در Y است . در نتیجه F^{-1} پیوسته است.

□

۲.۱ فضاهای برداری توپولوژیکی، فضاهای نرمدار و فضاهای باناخ

در این بخش به معرفی فضاهای برداری توپولوژیکی، فضاهای نرمدار و فضاهای باناخ می‌پردازیم و چند قضیه‌ی اساسی در این فضاها را ارائه می‌دهیم که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند. برای مشاهده‌ی اثبات قضایا و مطالعه‌ی بیشتر در این خصوص به [6] مراجعه شود.

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنیم $\mathfrak{X}$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ بوده و τ یک توپولوژی بر $\mathfrak{X}$ باشد به طوری که

(الف) به‌ازای‌هر $x \in \mathfrak{X}$، مجموعه‌ی یکانی $\{x\}$ یک مجموعه‌ی بسته در فضای توپولوژیکی $(\mathfrak{X}, \tau)$ باشد،

(ب) عمل جمع یک تابع پیوسته از $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ با توپولوژی حاصلضربی به فضای توپولوژیکی $(\mathfrak{X}, \tau)$ باشد،

(ج) ضرب اسکالر یک تابع پیوسته از $\mathbb{F} \times \mathfrak{X}$ با توپولوژی حاصلضربی به فضای توپولوژیکی $(\mathfrak{X}, \tau)$ باشد.

در این صورت τ را یک توپولوژی برداری بر $\mathfrak{X}$ و $(\mathfrak{X}, \tau)$، یا، به اختصار $\mathfrak{X}$ را یک فضای برداری توپولوژیکی روی میدان $\mathbb{F}$ می‌نامیم.

در صورتی که $\mathbb{F} = \mathbb{R}$، $\mathfrak{X}$ را یک فضای برداری توپولوژیکی حقیقی و در صورتی که $\mathbb{F} = \mathbb{C}$، $\mathfrak{X}$ را یک فضای برداری توپولوژیکی مختلط می‌نامیم.

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنیم $\mathfrak{X}$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد و $E \subseteq \mathfrak{X}$. گوییم E یک مجموعه‌ی محدب در این فضا است هرگاه به ازای هر $x, y \in E$ و هر $t \in [0,1]$،

$$(1-t)x + ty \in E.$$

تعریف ۳.۲.۱ فرض کنیم $(\mathfrak{X}, \tau)$ یک فضای برداری توپولوژیکی روی میدان $\mathbb{F}$ باشد.

(الف) $\mathfrak{X}$ را یک فضای موضعاً محدب روی میدان $\mathbb{F}$ می‌نامیم هرگاه 0 یک پایه‌ی موضعی در فضای توپولوژیکی $(\mathfrak{X}, \tau)$ داشته باشد که اعضای آن مجموعه‌های محدب در فضای برداری $\mathfrak{X}$ باشند.

(ب) $\mathfrak{X}$ یک فضای برداری توپولوژیکی متریک‌پذیر می‌نامیم هرگاه یک متریک بر $\mathfrak{X}$ مانند d یافت شود به طوری که τ_d، توپولوژی القایی توسط متریک d بر $\mathfrak{X}$، همان توپولوژی مفروض τ بر $\mathfrak{X}$ باشد.

ثابت می‌شود که اگر $\mathfrak{X}$ یک فضای برداری توپولوژیکی متریک‌پذیرباشد، آن‌گاه یک متریک پایا بر $\mathfrak{X}$ مانند d (یعنی، به ازای هر $x, y, z \in \mathfrak{X}$؛ $d(x,y) = d(x+z, y+z)$) وجود دارد که با توپولوژیکی برداری τ بر $\mathfrak{X}$ سازگار است.

تعریف ۴.۲.۱ فرض کنیم $\mathfrak{X}$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. تابع $||\cdot|| : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ را یک نرم بر $\mathfrak{X}$ می‌نامیم هرگاه

(الف) به‌ازای هر $x \in \mathfrak{X}$، $||x|| \geq 0$ و $||x|| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$،

(ب) به‌ازای هر $x \in \mathfrak{X}$ و هر اسکالر $\lambda \in \mathbb{F}$، $\quad ||\lambda x|| = |\lambda| \, ||x||$،

(ج) به‌ازای هر $x, y \in \mathfrak{X}$، $\quad ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$.

در صورتی که $||\cdot||$ یک نرم بر فضای برداری $\mathfrak{X}$ (روی میدان $\mathbb{F}$) باشد آن‌گاه $(\mathfrak{X}, ||\cdot||)$، یا، به اختصار $\mathfrak{X}$ را یک فضای نرمدار (روی میدان $\mathbb{F}$) می نامیم.

قضیه ۵.۲.۱ فرض کنیم $(\mathfrak{X}, ||\cdot||)$ یک فضای نرمدار روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. در این صورت

(الف) اگر $a \in \mathfrak{X}$، $r \geq 0$، $B(a,r) = \{x \in \mathfrak{X} : \ ||x-a|| < r\}$ و $B[a,r] = \{x \in \mathfrak{X} : \ ||x-a|| \leq r\}$ آن‌گاه مجموعه‌های $B(a,r)$ و $B[a,r]$ در $\mathfrak{X}$ محدب هستند.

(ب) اگر $d : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ به صورت $d(x,y) = ||x-y||$ تعریف شود، آن‌گاه d یک متریک پایا بر $\mathfrak{X}$ است و τ_d، توپولوژی القایی توسط متریک d بر $\mathfrak{X}$، یک توپولوژی برداری بر $\mathfrak{X}$ است.

(ج) اگر $B = \{B(a,r) : a \in \mathfrak{X}, r > 0\}$ آن‌گاه B یک پایه‌ی موضعی 0 در فضای توپولوژیکی $(\mathfrak{X}, \tau_d)$ است.

(د) $(\mathfrak{X}, \tau_d)$ یک فضای برداری توپولوژیکی موضعاً محدب است.

تعریف ۶.۲.۱ فرض کنیم $(\mathfrak{X}, ||\cdot||)$ یک فضای نرمدار روی میدان $\mathbb{F}$ بوده و d متریک القایی توسط $||\cdot||$ بر $\mathfrak{X}$ باشد. دراین‌صورت $(\mathfrak{X}, ||\cdot||)$، یا، به اختصار $\mathfrak{X}$ را یک فضای باناخ (فضای نرمدارتمام) روی میدان $\mathbb{F}$ می‌نامیم، هرگاه $(\mathfrak{X}, d)$ یک فضای متریک تمام باشد، یعنی، هر دنباله‌ی کوشی در این فضا یک دنباله‌ی همگرا باشد.

مثال ۷.۲.۱ فرض کنیم Ω یک مجموعه‌ی ناتهی بوده و $B_{\mathbb{F}}(\Omega)$ فضای برداری همه‌ی توابع کراندار $f : \Omega \to \mathbb{F}$ روی میدان $\mathbb{F}$ با جمع و ضرب اسکالر نقطه به نقطه باشد. برای هر $f \in B_{\mathbb{F}}(\Omega)$ قرار می‌دهیم

$$||f||_{\Omega} = \sup\{|f(\omega)| : \omega \in \Omega\}.$$

به آسانی دیده می‌شود که $||\cdot||_{\Omega}$ یک نرم بر $B_{\mathbb{F}}(\Omega)$ است که آن را نرم یکنواخت بر Ω می‌نامیم. قضیه‌ی همگرایی یکنواخت و کرانداری ایجاب می‌کند که $(B_{\mathbb{F}}(\Omega), ||\cdot||_{\Omega})$ یک فضای باناخ روی میدان $\mathbb{F}$ است.

مثال ۸.۲.۱ فرض کنیم Ω یک فضای توپولوژیکی بوده و $CB_{\mathbb{F}}(\Omega)$ مجموعه‌ی همه‌ی توابع پیوسته و کراندار $f : \Omega \to \mathbb{F}$ باشد. دراین‌صورت $CB_{\mathbb{F}}(\Omega)$ یک زیر فضای برداری $B_{\mathbb{F}}(\Omega)$ روی میدان $\mathbb{F}$ است . به‌علاوه، قضیه‌ی همگرایی یکنواخت و کرانداری و قضیه‌ی همگرایی یکنواخت و پیوستگی ایجاب می‌کنند که $(CB_{\mathbb{F}}(\Omega), ||\cdot||_{\Omega})$ یک فضای باناخ روی میدان $\mathbb{F}$ است.

تعریف ٩.٢.١ فرض کنیم $\mathfrak{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. فضای برداری همه‌ی نگاشت‌های خطی از $\mathfrak{X}$ به $\mathcal{Y}$ (روی میدان $\mathbb{F}$) را با $L_{\mathbb{F}}(\mathfrak{X},\mathcal{Y})$ نشان می‌دهیم و آن را فضای نگاشت‌های خطی از $\mathfrak{X}$ به $\mathcal{Y}$ می‌نامیم.

تعریف ١٠.٢.١ فرض کنیم $\mathfrak{X}$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. هر عضو $L_{\mathbb{F}}(\mathfrak{X},\mathbb{F})$ را یک تابعک خطی بر $\mathfrak{X}$ (روی میدان $\mathbb{F}$) می‌نامیم.

تعریف ١١.٢.١ فرض کنیم $\mathfrak{X}$ یک فضای برداری توپولوژیکی روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. مجموعه‌ی همه‌ی تابعک‌های خطی پیوسته بر $\mathfrak{X}$ (روی میدان $\mathbb{F}$) یک زیر فضای برداری $L_{\mathbb{F}}(\mathfrak{X},\mathbb{F})$ است که آن را فضای دوگان $\mathfrak{X}$ نامیده و با $\mathfrak{X}^{*}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ١٢.٢.١ فرض کنیم $\mathfrak{X}$ یک فضای برداری توپولوژیکی روی میدان $\mathbb{F}$ باشد و $E \subseteq \mathfrak{X}$. گوییم E یک مجموعه‌ی کراندار در این فضا است هرگاه به ازای هر همسایگی 0 در $\mathfrak{X}$ مانند V ، عدد حقیقی مثبتی مانند s یافت شود به طوری که به ازای هر $t > s$، $E \subseteq tV$.

هرگاه $(\mathfrak{X}, ||\cdot||)$ یک فضای نرمدار روی میدان $\mathbb{F}$ بوده و $E \subseteq \mathfrak{X}$ آن‌گاه E در این فضا کراندار است اگر و فقط اگر $K > 0$ی یافت شود به طوری‌که به ازای هر $x \in E$، $||x|| \leq K$.

تعریف ١٣.٢.١ فرض کنیم $\mathfrak{X}$ یک فضای برداری توپولوژیکی روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. گوییم

(الف) $\mathfrak{X}$ خاصیت هاینه —بورل دارد هرگاه هر مجموعه‌ی بسته وکراندار در این فضا فشرده باشد .

(ب)$\mathfrak{X}$ موضعاً کراندار است هرگاه 0 یک همسایگی کراندار در$\mathfrak{X}$ داشته باشد .

قضیه ۱۴.۲.۱ [7,Theorem,1.23] فرض کنیم $\mathfrak{X}$ یک فضای برداری توپولوژیکی روی میدان $\mathbb{F}$ باشد.اگر $\mathfrak{X}$ موضعاً کراندار بوده و خاصیت هاینه —بورل داشته باشد ، آنگاه $\mathfrak{X}$ یک فضای برداری متناهی —بعد است .

تعریف ۱۵.۲.۱ فرض کنیم $\mathfrak{X}$ یک فضای نرمدار روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. در این صورت مجموعه‌ی $\{x \in \mathfrak{X} : ||x|| \leq 1\}$ را گوی واحد بسته‌ی $\mathfrak{X}$ نامیده و آن را با $B_{\mathfrak{X}}$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۶.۲.۱ فرض کنیم X یک فضای نرمدار روی میدان $\mathbb{F}$ باشد و $B_X = \{x \in X : ||x|| \leq 1\}$.
اگر B_X در X با نرم — توپولوژی فشرده باشد، آنگاه
الف) X با نرم توپولوژی یک فضای برداری توپولوژیکی موضعاً کراندار با خاصیت هاینه —بورل است .
ب) $dimX < \infty$.

برهان.الف) از اینکه B_X در X با نرم— توپولوژی فشرده است ، نتیجه می شود که B_X در X با نرم— توپولوژی کراندار است . لذا $U_X = \{x \in X : ||x|| < 1\}$ یک مجموعه ی کراندار در X با نرم—توپولوژی است . پس 0 یک همسایگی کراندار در X با نرم—توپولوژی دارد. لذا X بانرم توپولوژی یک فضای برداری توپولوژیکی موضعاً کراندار است . حال فرض کنیم $E \subseteq X$ یک مجموعه ی بسته وکراندار در X با نرم—توپولوژی باشد . از این کهE درX با نرم توپولوژی کراندار است، نتیجه می شود یک عدد حقیقی مثبت مانند M وجود دارد به طوری که $E \subseteq B(0,M) = \{x \in X : ||x|| \leq M\}$. چون $M \neq 0$ لذا نگاشت $F : X \to X$ با ضابطه ی $F(X) = Mx$ یک همانریختی است . چون B_X یک مجموعه ی فشرده در X با نرم—توپولوژی است ، لذا $F(X)$ یک مجموعه ی فشرده در X با نرم—توپولوژی است . اما $F(A) = \{x \in X : ||x|| \leq M\}$. لذا $\{x \in A : ||f|| \leq M\}$ درX بانرم— توپولوژی بسته است . چون E یک مجموعه ی بسته ی $\{x \in X : ||x|| \leq M\}$ است ، پس E یک مجموعه ی فشرده درX بانرم—توپولوژی است . در نتیجه X خاصیت هاینه—بورل دارد.
ب) باتوجه به (الف) ،X یک فضای برداری توپولوژیکی موضعاً کراندار روی میدان $\mathbb{F}$ که خاصیت هاینه —بورل دارد . پس طبق قضیه ۱۴.۲.۱، X یک فضای برداری متناهی —بعد است . □

تعریف ۱.۲.۱۷ فرض کنیم $\mathfrak{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو فضای برداری توپولوژیکی روی میدان $\mathbb{F}$ باشند. نگاشت خطی $\Lambda : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ را یک نگاشت خطی کراندار می‌نامیم هرگاه به ازای هر مجموعه‌ی کراندار E در $\mathfrak{X}$، مجموعه $\Lambda(E)$ یک مجموعه‌ی کراندار در $\mathcal{Y}$ باشد.
می‌دانیم که هر نگاشت خطی پیوسته از $\mathfrak{X}$ به $\mathcal{Y}$ یک نگاشت خطی کراندار است و در صورتی که $\mathfrak{X}$ متریک‌پذیر باشد، آن‌گاه نگاشت خطی $\Lambda : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ کراندار است اگر و فقط اگر پیوسته باشد.

تعریف ۱.۲.۱۸ فرض کنیم $\mathfrak{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو فضای برداری توپولوژیکی روی میدان $\mathbb{F}$ باشند. مجموعه‌ی همه‌ی نگاشت‌های خطی کراندار از $\mathfrak{X}$ به $\mathcal{Y}$ را با $BL_{\mathbb{F}}(\mathfrak{X},\mathcal{Y})$ نشان می دهیم. $BL_{\mathbb{F}}(\mathfrak{X},\mathcal{Y})$ یک زیر فضای برداری $L_{\mathbb{F}}(\mathfrak{X},\mathcal{Y})$ است که آن فضای تبدیلات خطی کراندار از $\mathfrak{X}$ به $\mathcal{Y}$ می‌نامیم.
واضح است که هرگاه $\mathfrak{X}$ یک فضای نرمدار روی میدان $\mathbb{F}$ باشد آن‌گاه $\mathfrak{X}^\star = BL_{\mathbb{F}}(\mathfrak{X},\mathbb{F})$.

قضیه ۱.۲.۱۹ (قضیه‌ی نگاشت باز برای فضاهای باناخ) : فرض کنیم $\mathfrak{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو فضای باناخ روی میدان $\mathbb{F}$ باشند . اگر Λ یک نگاشت خطی پیوسته و یک به یک از $\mathfrak{X}$ بروی $\mathcal{Y}$ باشد ،
(الف) $\Lambda^{-1} : \mathcal{Y} \to \mathfrak{X}$ یک نگاشت خطی پیوسته است ،
(ب)اعداد حقیقی مثبتی مانند K و M وجود دارند به طوری که

$$K||a|| \leq ||\lambda(a)|| \leq M||a| \quad (\forall a \in A).$$

قضیه ۱.۲.۲۰ فرض کنیم $\mathfrak{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو فضای نرمدار روی میدان $\mathbb{F}$ بوده و $\Lambda : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ یک نگاشت خطی باشد. در این صورت Λ کراندار است اگر و فقط اگر $M > 0$ی وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x \in \mathfrak{X}$،

$$||\Lambda x|| \leq M||x||.$$

قضیه ۱.۲.۲۱ فرض کنیم $\mathfrak{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو فضای نرمدار روی میدان $\mathbb{F}$ باشند. در این صورت

(الف) نگاشت $||\cdot|| : BL_{\mathbb{F}}(\mathfrak{X},\mathcal{Y}) \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$$||\Lambda|| = \sup\{|||\Lambda x|| : x \in \mathfrak{X}, ||x|| \leq 1\},$$

یک نرم بر فضای برداری $BL_{\mathbb{F}}(\mathfrak{X},\mathcal{Y})$ (روی میدان $\mathbb{F}$) است.

(ب) اگر $\mathcal{Y}$ یک فضای باناخ (روی میدان $\mathbb{F}$) باشد آن‌گاه $(BL_{\mathbb{F}}(\mathfrak{X},\mathcal{Y}), ||\cdot||)$ یک فضای باناخ (روی میدان $\mathbb{F}$) است.

تعریف ۲۲.۲.۱ فرض کنیم $\mathfrak{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو فضای نرمدار روی میدان $\mathbb{F}$ باشند. برای هر $\Lambda \in BL_{\mathbb{F}}(\mathfrak{X},\mathcal{Y})$، $||\Lambda|| = \sup\{||\Lambda x|| : x \in \mathfrak{X}, ||x|| \leq 1\}$ را نرم عملگری Λ می‌نامیم.

قضیه **۲۳.۲.۱** اگر $\mathfrak{X}$ یک فضای نرمدار روی میدان $\mathbb{F}$ باشد آن‌گاه $\mathfrak{X}^\star$ با نرم عملگری

$$||\Lambda|| = \sup\{||\Lambda x|| : x \in \mathfrak{X}, ||x|| \leq 1\} \quad (\Lambda \in \mathfrak{X}^\star)$$

یک فضای باناخ روی میدان $\mathbb{F}$ است.

تعریف ۲۴.۲.۱ فرض کنیم A و B دو مجموعه‌ی ناتهی بوده و $\mathcal{F}$ یک خانواده از نگاشت‌های از A به B باشد. گوییم $\mathcal{F}$ نقاط A را جدا می‌کند هرگاه به ازای هر $a_1, a_2 \in A$، که $a_1 \neq a_2$ ، تابعی مانند f در $\mathcal{F}$ یافت شود به طوری که

$$f(a_1) \neq f(a_2).$$

قضیه **۲۵.۲.۱** اگر $\mathfrak{X}$ یک فضای برداری توپولوژیکی موضعاً محدب روی میدان $\mathbb{F}$ باشد آن‌گاه $\mathfrak{X}^\star$ نقاط $\mathfrak{X}$ را جدا می‌کند.

تعریف ۲۶.۲.۱ فرض کنیم $\mathfrak{X}$ یک مجموعه ناتهی، $\mathcal{Y}$ یک فضای توپولوژیکی و $\mathcal{F}$ یک خانواده از $\mathfrak{X}$ به $\mathcal{Y}$ باشند. ضعیفترین توپولوژی بر $\mathfrak{X}$ که تحت آن هر $f \in \mathcal{F}$ نگاشتی پیوسته از $\mathfrak{X}$ با آن توپولوژی به فضای توپولوژیکی $\mathcal{Y}$ است، $\mathcal{F}-$ توپولوژی بر $\mathfrak{X}$ نامیده می‌شود.
در واقع، خانواده‌ی همه‌ی مجموعه‌های به شکل

$$\{x \in \mathfrak{X} : |f_k(x) - f_k(x_0)| < r_k, \quad k \in \{1, 2, ..., n\}\},$$

که در آن $n \in \mathbb{N}$، $f_1, ..., f_n \in \mathcal{F}$، $x_0 \in \mathfrak{X}$ و $r_n, ...r_1$ اعداد حقیقی مثبت هستند، یک پایه برای $\mathcal{F}-$ توپولوژی بر $\mathfrak{X}$ است.
به‌علاوه اگر $\mathcal{Y}$ یک فضای هاسدروف بوده و $\mathcal{F}$ نقاط $\mathfrak{X}$ را جدا کند آن‌گاه $\mathfrak{X}$ با $\mathcal{F}-$ توپولوژی یک فضای هاسدروف است.

قضیه ۲۷.۲.۱ فرض کنیم $\mathfrak{X}$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد و $\mathcal{Y}$ یک زیر فضای برداری $L_{\mathbb{F}}(\mathfrak{X}, \mathcal{F})$ باشد که نقاط $\mathfrak{X}$ را جدامی‌کند. در این صورت $\mathfrak{X}$ با $\mathcal{Y}-$ توپولوژی به یک فضای برداری توپولوژیکی موضعاً محدب تبدیل می‌شود که فضای دوگان آن $\mathcal{Y}$ است.

تعریف ۲۸.۲.۱ فرض کنیم $\mathfrak{X}$ یک فضای برداری توپولوژیکی روی میدان $\mathbb{F}$ باشد به طوری $\mathfrak{X}^{\star}$ که نقاط $\mathfrak{X}$ را جدامی‌کند. در این صورت $\mathfrak{X}^{\star}-$ توپولوژی بر $\mathfrak{X}$ را توپولوژی ضعیف بر $\mathfrak{X}$ می‌نامیم.

در واقع، توپولوژی ضعیف بر فضای برداری توپولوژیکی $\mathfrak{X}$ (روی میدان $\mathbb{F}$)، ضعیفترین توپولوژی بر $\mathfrak{X}$ است که تحت آن هر $\Lambda \in \mathfrak{X}^{\star}$ نگاشتی پیوسته بر $\mathfrak{X}$ است. بنابراین توپولوژی ضعیف بر $\mathfrak{X}$ ضعیفتر از توپولوژی برداری مفروض بر $\mathfrak{X}$ است. به‌علاوه، طبق قضیه‌ی ۲۲.۲.۱، $\mathfrak{X}$ با توپولوژی ضعیف یک فضای برداری توپولوژیکی موضعاً محدب روی میدان $\mathbb{F}$ است که دوگان آن تحت این توپولوژی همان $\mathfrak{X}^{\star}$ است.

قضیه ۲۹.۲.۱ فرض کنیم $\mathfrak{X}$ یک فضای برداری توپولوژیکی روی میدان $\mathbb{F}$ باشد به طوری که $\mathfrak{X}^{\star}$ نقاط $\mathfrak{X}$ را جدامی‌کند. برای هر $x \in \mathfrak{X}$، نگاشت $\pi(x) : \mathfrak{X}^{\star} \to \mathcal{F}$ را به صورت $\pi(x)(\Lambda) = \Lambda x$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $\{\pi(x) : x \in \mathfrak{X}\}$ یک زیر فضای خطی $L(\mathfrak{X}, \mathcal{F})$ است که نقاط $\mathfrak{X}^{\star}$ را جدا می‌کند.

تعریف ۳۰.۲.۱ فرض کنیم $\mathfrak{X}$ یک فضای برداری توپولوژیکی روی میدان $\mathbb{F}$ باشد به طوری که $\mathfrak{X}^\star$ نقاط $\mathfrak{X}$ را جدامی کند. در این صورت $\{\pi(x) : x \in \mathfrak{X}\}-$ توپولوژی بر $\mathfrak{X}^\star$ را توپولوژی ضعیف−ستاره بر $\mathfrak{X}^\star$ می‌نامیم.

قضیه ۳۱.۲.۱ فرض کنیم $\mathfrak{X}$ یک فضای نرمدار روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. در این صورت

(الف) $\mathfrak{X}^\star$ نقاط $\mathfrak{X}$ را جدا می کند،

(ب) به ازای هر $x \in \mathfrak{X}$، نگاشت $\pi(x) : \mathfrak{X}^\star \to \mathbb{F}$ یک نگاشت پیوسته از $\mathfrak{X}^\star$ با نرم−توپولوژی به فضای اقلیدسی $\mathbb{F}$ است،

(ج) توپولوژی ضعیف−ستاره بر $\mathfrak{X}^\star$ ضعیف‌تر از توپولوژی ضعیف بر $\mathfrak{X}^\star$ و توپولوژی ضعیف بر $\mathfrak{X}^\star$ ضعیف‌تر از نرم−توپولوژی $\mathfrak{X}^\star$ است. به‌علاوه، $\{\pi(x) : x \in \mathfrak{X}\}$ دوگان $\mathfrak{X}^\star$ با توپولوژی ضعیف−ستاره است.

قضیه ۳۲.۲.۱ (قضیه‌ی باناخ−آلوگلو) [6, *Theorem* 3.15] فرض کنیم $\mathfrak{X}$ یک فضای برداری توپولوژیکی روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. اگر V یک همسایگی 0 در $\mathfrak{X}$ بوده و

$$K(V) = \{\Lambda \in \mathfrak{X}^\star : ||\Lambda x|| \leq 1 \ \ (\forall x \in V)\},$$

آن‌گاه $K(V)$ یک مجموعه‌ی فشرده در $\mathfrak{X}^\star$ با توپولوژی ضعیف−ستاره است.

قضیه‌ی زیر نتیجه‌ای از قضیه‌ی باناخ آلوگلو است.

قضیه ۳۳.۲.۱ فرض کنیم $\mathfrak{X}$ یک فضای نرمدار روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. در این صورت $B_{\mathfrak{X}^\star}$، گوی واحد بسته‌ی $\mathfrak{X}^\star$، یک مجموعه‌ی فشرده در $\mathfrak{X}^\star$ با توپولوژی ضعیف−ستاره است.

تعریف ۳۴.۲.۱ فرض کنیم Ω یک فضای توپولوژیکی بوده و f یک تابع مختلط بر $\mathfrak{X}$ باشد. در این صورت بستار مجموعه‌ی $\{\omega \in \Omega : f(\omega) \neq 0\}$ در Ω را تکیه‌گاه f نامیده و آن را به $Supp(f)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳۵.۲.۱ فرض کنیم Ω یک فضای توپولوژیکی موضعاً فشرده‌ی هاسدورف باشد.

(الف) مجموعه‌ی همه توابع حقیقی پیوسته بر Ω را با $C_{\mathbb{R}}(\Omega)$ نشان می‌دهیم. واضح است که $C_{\mathbb{R}}(\Omega)$ یک فضای برداری حقیقی است و $CB_{\mathbb{R}}(\Omega) = C_{\mathbb{R}}(\Omega) \cap B_{\mathbb{R}}(\Omega)$.

(ب) مجموعه‌ی همه توابع مختلط پیوسته بر Ω را با $C(\Omega)$ نشان می‌دهیم. واضح است که $C(\Omega)$ یک فضای برداری مختلط است و $CB(\Omega) = C(\Omega) \cap B(\Omega)$.

(ج) مجموعه‌ی همه توابع مختلط بر $\mathfrak{X}$ را که تکیه‌گاه فشرده دارند، با $C_c(\Omega)$ نشان می‌دهیم.

به آسانی دیده می‌شود که اگر $f \in C_c(\Omega)$ آن‌گاه $f(\Omega)$ یک مجموعه‌ی فشرده در صفحه‌ی مختلط $\mathbb{C}$ است.

تعریف ۳۶.۲.۱ فرض کنیم Ω یک فضای توپولوژیکی باشد. گوییم تابع مختلط بر Ω در بینهایت به صفر می‌رود هرگاه به ازای هر $\epsilon > 0$ یک زیر مجموعه‌ی فشرده‌ی Ω مانند K یافت شود به طوری که

$$f(\Omega \backslash K) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| < \epsilon\}.$$

تعریف ۳۷.۲.۱ فرض کنیم Ω یک فضای توپولوژیکی موضعاً فشرده‌ی هاسدورف باشد. مجموعه‌ی همه‌ی توابع مختلط پیوسته بر Ω را که در بینهایت به صفر می‌روند، به $C_0(\Omega)$ نشان می‌دهیم.

واضح است که $C_0(\Omega)$ یک زیر فضای خطی بسته‌ی فضای باناخ $(CB(\Omega), ||\cdot||_\Omega)$ است. به‌علاوه، $C_c(\Omega)$ یک زیر فضای خطی $C_0(\Omega)$ است که در $C_0(\Omega)$ چگال است.

به آسانی می‌توان ثابت نمود که اگر Ω فشرده باشد آن‌گاه

$$C_c(\Omega) = C_0(\Omega) = CB(\Omega) = C(\Omega).$$

بنابراین اگر Ω فشرده باشد آن‌گاه $(C(\Omega), ||\cdot||_\Omega)$ یک فضای باناخ مختلط است. هم‌چنین به آسانی ثابت می‌شود که اگر Ω فضای موضعاً فشرده‌ی هاسدورف باشد و $C_0(\Omega) = C(\Omega)$، آن‌گاه Ω فشرده است.