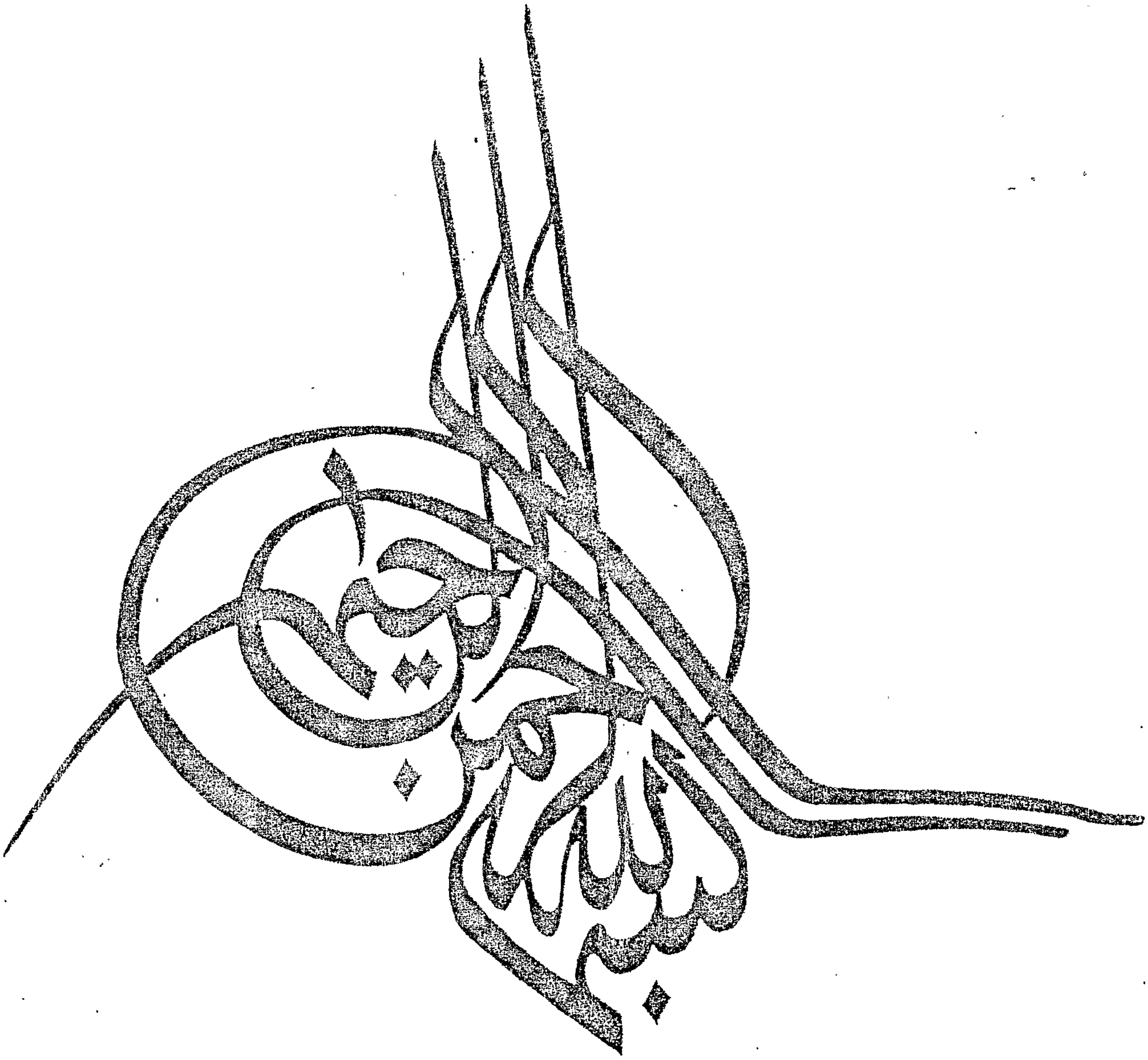

١٤١٢٨٥

دانشگاه گیلان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی (گرایش آنالیز تابعی)

بررسی خواص نگاشتهای تقریبا خطی و تقریبا ضربی در جبرهای توپولوژیکی

از:
نسرین اقبالی عموقین

استاد راهنما:
اسماعیل انصاری پیری

تیر ۱۳۸۸

تقدیم به همسفر زندگیم، آقای دکتر احمد یوسفیان،

و

دخترم، نوژین.

و

با سپاس فراوان از:

استاد ارجمندم، آقای دکتر اسماعیل انصاری،

و

پدر و مادر مهربانم.

تقدیر و تشکر

آن زمان که خداوند اسماء را به انسان آموخت، یعنی مسئولیت آموزش، فهم و درک تمامی علوم هستی را به عهده او نهاد، تکاپو و جستجو آغاز گردید و خواندن و قلم یار و یاور بشر در این راه پر تلاش شد. پس حمد و سپاس اول معلم هستی را که ما را در راه شناخت کائنات هدایت فرمود و بهترین وسیله شناخت، یعنی ریاضیات، را به ما آموزش داد.

اینک باز ابتدای دیگر خواهد بود برای این اعلام پایان که آرزومندم در این ابتدای راه بتوانم گامی استوار بردارم و حرکت که نماد حیات است یار آشنای لحظات زندگیم باشد. نیک آگاهم که آرزویی دلکش و اما دشوار است.

مراتب سپاس خود را از استاد بزرگوارم، جناب آقای دکتر اسماعیل انصاری پیری که راهنمایی بنده را در طول دوره کارشناسی ارشد و دکتری و مراحل تهیه این رساله بر عهده داشتند و مهر و علاقه خود را از بنده دریغ نداشته اند، ابراز داشته و صادقانه می گویم هر آنچه توانسته ام به سرمنزل مقصود برسانم از دانش و یاری ایشان بوده است. ایشان به من آموختند اگر چه کوه، شکوه خاک است و موج، عظمت و اقتدار دریا، یکی با خروش و فریاد و دیگری با سکوت وهم انگیز خویش سربلندی و افتخار را در باور آدمیان می ریزند ولی آدمی می تواند عجیب تر و شگرف تر باشد که اگر بخروشد امواج اقیانوسها پیش پایش بازیچه ای می شوند و اگر بایستد کوهساران ذره خاکی بر کف پای او.

از جناب آقایان پروفسور اسداله نیکنام، دکتر داود احمدی دستجردی و دکتر عباس سهله که داوری این رساله را پذیرفته و سهم بسزایی در هر چه بهتر شدن آن داشتند قدردانی می نمایم.

همچنین از مساعی جناب آقای دکتر احمد عباسی مدیر محترم گروه ریاضی و جناب آقای دکتر بهروز فتحی نهایت قدردانی را دارم.

از اساتید محترم دانشگاه گیلان که در طول تحصیل یاریگرم بوده اند و اداره بورس وزارت علوم، تحقیقات و فناوری که فرصتی برای مطالعه و تحقیق در آکادمی علوم

کشور لهستان تحت راهنمایی پروفسور ژلازکو (Żelazko) فراهم آورده اند، از خانواده ام که صبورانه در تمامی لحظات دشوار یاریگرم بوده اند و همسرم جناب آقای دکتر احمد یوسفیان دارانی، که در حقیقت اگر زحمات ایشان نبود، اندوخته هایم به بار نمی نشست تشکر و قدردانی می نمایم.

نسرین اقبالی
تابستان ۱۳۸۸

فهرست مندرجات

چکیده

بررسی خواص نگاشتهای تقریبا خطی و تقریبا ضربی در جبرهای توپولوژیکی
نسرین اقبالی عموقین

در این رساله بحث ما تخریب و پایداری در برابر تخریب می باشد. تخریب توابع اعم از تخریب توابع ضربی و توابع خطی از دیرباز مورد بررسی قرار گرفته است. در این رساله، توابع تقریبا ضربی و پیوستگی آنها مورد بررسی قرار می گیرد. به عنوان نوع دیگر از تخریب توابع ضربی، توابع تقریبا n–ضربی و توابع تقریب جردن معرفی شده و بررسی می شوند.

ضمنا به عنوان نوعی از تخریب توابع خطی، توابع حدودا جمعی تعریف می شوند، و قضایای کرانداری یکنواخت و گراف بسته و همچنین پیوستگی برای این دسته از توابع اثبات می شوند.

در آخر رساله، بحث مهم پایداری مطرح میشود و پایداری توابع تخریب شده مورد بحث قرار خواهد گرفت. همچنین، پایداری معادلات سینوسی و کسینوسی به عنوان دو نوع خاص از معادلات بررسی می شود.

کلیدواژه: توابع ضربی، توابع تقریبا ضربی، توابع n–همومورفیسم، توابع تقریبا n– ضربی، توابع تقریب جردن، توابع خطی، توابع تقریبا خطی، توابع حدودا جمعی، پیوستگی، تخریب توابع، تقریب توابع، پایداری توابع، معادله سینوسی، معادله کسینوسی.

Abstract

A verification on almost linear and almost multiplicative maps in topological algebras.

Nasrin Eghbali Amooghin

In this thesis, we discuss on perturbation and stability contrary to perturbation. The perturbation of functions, such as mltiplicative maps and linear maps has studied many years ago. In this thesis we study the almost multiplicative maps and their continuity. As another perturbation of multiplicative maps, we introduce the n-almost multiplicative maps and almost approximate Jordan mappings. Also as a perturbation of linear maps, nearly additive maps are defined. We prove the Uniformly Bounded Theorem and Closed Graph Theorem, and also the continuity for these classes of functions is considered. Finally we introduce the stability and investigate the stability of perturbated maps. Moreover, as two kinds of equations, we study the stability of sine and cosine equations.

Keywords: Multiplicative maps, Almost multiplicative maps, Almost n-multiplicative maps, n-homomorphism maps, Approximate Jordan mappings, Linear maps, Almost linear maps, Nearly additive maps, Continuity, Perturbation of maps, Approximation of maps, Stability of maps, Sine equation, Cosine equation.

مقدمه

توابع مورد بحث در ریاضی لزوما ضربی و یا خطی نیستند. در این رساله هدف ما معرفی چند نوع تخریب از توابع ضربی یا خطی و پایداری آنها می باشد. دو سوال اساسی در این بحث مطرح می باشد، اول اینکه چه قضایایی بعد از تخریب توابع اعم از تخریب ضربی یا خطی باز برقرارند و دوم اینکه آیا می توان توابع تخریب شده را با همنوع آن، ضربی یا خطی تقریب زد؟

بحث پیوستگی توابع خطی و ضربی نیز از دیرباز با سوال معروف مایکل آغاز گشته است. در سال ۱۹۵۲، مایکل سوال مشهور خود درباره پیوستگی تابعکهای خطی و ضربی روی جبرهای توپولوژیکی تام موضعا محدب را مطرح کرد. از آن زمان به بعد، ریاضیدانان این مساله جالب را از جهت های مختلف مورد مطالعه قرار دادند. برای جبرهای نرمدار تام پاسخ به این سوال مثبت است. آخرین نتیجه در این زمینه در [۱] اثبات شده که در آن ادعا شده است که هر تابعک خطی ضربی روی جبرهای مترپذیر تام FLM بطور خود بخود پیوسته است.

در این رساله، در فصلهای ۲ و ۳ و ۴ به انواعی از تخریب توابع ضربی اشاره می کنیم. یاروش در سال ۱۹۸۵ در [۱۶] توابع تقریبا ضربی را روی جبرهای باناخ تعریف نمود و نشان داد که تابعکهای خطی تقریبا ضربی روی جبرهای باناخ پیوسته اند. ما در فصل ۲ به ارتباط بیشتر توابع ضربی و تقریبا ضربی پرداخته و پیوستگی توابع خطی و تقریبا ضربی را از جبر باناخ A بتوی جبر باناخ شبه– ساده B بررسی خواهیم نمود.

در سال ۲۰۰۵ در [۱۴] توابع n–هممورفیسم توسط حجازیان، میرزاوزیری و مصلحیان معرفی شدند و پیوستگی آنها در حالت خاصی به اثبات رسید. در فصل ۳، توابع تقریبا n–ضربی را تعریف نموده و پیوستگی آنها و ارتباط آنها با توابع n–هممورفیسم بررسی میشود.

در سال ۲۰۰۲ توابع تقریب جردن در [۱۹] بررسی شدند و پیوستگی آنها تحت شرایطی در [۱۹] و [۱۸] بررسی شد. در فصل ۴ رساله در مورد توابع تقریب جردن بحث بیشتری خواهیم داشت.

در سال ۲۰۰۲، Šemrl در [۲۶] مفهوم توابع تقریبا خطی را از یک فضای باناخ بتوی فضای باناخ دیگر بیان کرد. برای این دسته توابع، پیوستگی در صفر، لزوما پیوستگی آن بر کل فضا را ایجاب نمی کند. ما با تعریف نوع خاصی از تخریب به نام حدودا جمعی ها، در فصل ۵ نشان می دهیم که پیوستگی در صفر برای این توابع، پیوستگی را نتیجه می دهد. قضایای کرانداری یکنواخت و گراف بسته برای توابع حدودا جمعی همگن بیان و اثبات می شوند. همچنین نشان می دهیم که هر تابعک حدودا جمعی همگن و تقریبا ضربی روی یک جبر باناخ پیوسته است.

پایداری معادلات تابعی همواره به عنوان موضوعی جالب در ریاضی و حتی خارج از ریاضی محض، بویژه برای فیزیکدانان جالب بوده است. به عنوان مثال فیزیکدانان علاقمند هستند تا با ایجاد تغییرات کوچک در یک سیستم یا دستگاهی میزان پایداری آن را تخمین بزنند. در سال ۱۹۴۰، Ulam در [۲۷] سوال معروف خود را در زمینه پایداری معادلات تابعی مطرح کرد: فرض کنید G_1 یک گروه و G_2 یک گروه متری باشد و $\delta > 0$ ای باشد که برای تابع $f : G_1 \to G_2$ داشته باشیم $d(f(xy), f(x)f(y)) \leq \delta$. آنگاه آیا هomomorphism مانند $g : G_1 \to G_2$ وجود دارد که برای هر $x \in G_1$ داشته باشیم $d(f(x), g(x)) \leq \delta$؟

در سال ۱۹۴۱، Hyers در [۱۵] نشان داد که اگر $\delta > 0$ و E_1, E_2 جبرهای باناخ و $f : E_1 \to E_2$ یک تابع باشد که $||f(x+y) - f(x) - f(y)|| \leq \delta$ آنگاه یک تابع یکتای جمعی T وجود دارد که برای هر $x \in E_1$ داریم $||f(x) - T(x)|| \leq \delta$.

در سال ۱۹۷۸، Th. M. Rassias در [۲۲] نشان داد که برای فضاهای باناخ مفروض E_1, E_2 و $p \in [0, 1)$، اگر $\delta > 0$ ای موجود باشد که برای هر $x, y \in E_1$ داشته باشیم $||f(x+y) - f(x) - f(y)|| \leq \delta(||x||^p + ||y||^p)$، آنگاه تابع جمعی یکتای T وجود دارد بطوریکه برای هر $x \in E_1$ داریم $||f(x) - T(x)|| \leq \frac{2\delta}{2-2^p}||x||^p$. همچنین او این قضیه را برای $p < 0$ نیز ثابت کرد.

در سال ۱۹۹۱، Gajda در [۱۲] قضیه Th. M. Rassias را برای حالت $p > 1$ اثبات نمود. برای حالت $p = 1$، Th. M. Rassias و Šemrl با ارائه مثالی در [۲۳] نشان دادند که نمی توان f را تقریب زد.

سرانجام در سال ۱۹۹۲، Ğavruta در [۱۳] نتیجه Rassias را برای توابع کنترل مجاز توسیع داد. در این رساله ما به پایداری توابع حدودا جمعی و همچنین توابع تقریب جردن می پردازیم. در ضمن، به عنوان نوع خاصی از پایداری، پایداری معادلات سینوسی و کسینوسی را بررسی می کنیم.

۱ مقدمات و مطالب مورد نیاز

در این فصل تعاریف و قضایایی که در سراسر این رساله مورد نیاز می باشند را بیان می کنیم. قرارداد می کنیم که F را میدان حقیقی یا مختلط می گیریم. همچنین اثبات قضایای مطرح شده در این فصل را در مراجع [۲۴] و [۱۰] و [۲۰] می توان دید.

تعریف ۱.۱ فضای برداری توپولوژیکی X یک فضای برداری روی میدان F همراه با یک توپولوژی با خواص زیر است:
۱) به ازای هر $x \in X$ مجموعه $\{x\}$ بسته است.
۲) تابع جمع پیوسته است.
۳) تابع ضرب اسکالر پیوسته است.

قضیه ۲.۱ اگر X یک فضای برداری توپولوژیکی و U یک همسایگی از صفر باشد، یک همسایگی متقارن V از صفر وجود دارد که: $V + V \subseteq U$.

قضیه ۳.۱ اگر β یک پایه موضعی برای فضای برداری توپولوژیکی X باشد، آنگاه به ازای هر $V \in \beta$، $U \in \beta$ ای وجود دارد به طوری که $\overline{U} \subseteq V$.

تعریف ۴.۱ زیر مجموعه E در یک فضای برداری توپولوژیکی X، کراندار است اگر برای هر همسایگی صفر V در X، $s > 0$ ای موجود باشد به طوری که برای هر $t > s$ داشته باشیم $E \subseteq tV$.

تعریف ۵.۱ فرض کنید X یک فضای برداری است. در این صورت:

۱) $A \subseteq X$ را موزون مینامیم اگر برای هر $x \in A$ و هر α که $|\alpha| \leq 1$ داشته باشیم $\alpha x \in A$.

۲) $A \subseteq X$ را جاذب مینامیم اگر برای هر $x \in A$، $\lambda > 0$ ای موجود باشد، بطوریکه داشته باشیم $\lambda^{-1}x \in A$.

قضیه ۶.۱ فرض کنید X و Y فضاهای برداری توپولوژیک باشند. اگر $\Lambda : X \to Y$ خطی و در صفر پیوسته باشد، انگاه Λ پیوسته یکنواخت است.

قضیه ۷.۱ فرض کنید X یک فضای برداری نرمدار باشد. در اینصورت $dimX < \infty$ اگر و فقط اگر هر تابعک خطی روی X پیوسته باشد.

قضیه ۸.۱ فرض کنید Λ یک تابعک خطی ناصفر روی یک فضای برداری توپولوژیکی X باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:

۱) Λ پیوسته است.

۲) فضای پوچ Λ بسته است.

۳) فضای پوچ Λ در X چگال نیست.

۴) همسایگی از صفر وجود دارد که بر آن Λ کراندار است.

قضیه ۹.۱ فرض کنید X و Y فضاهای برداری توپولوژیک باشند. اگر $\Lambda : X \to Y$ خطی باشد، در بین گزاره های زیر رابطه ۳ $\Rightarrow$ ۲ $\Rightarrow$ ۱ را داریم:

۱) Λ پیوسته است.

۲) Λ کراندار است.

۳) اگر $x_n \to 0$ آنگاه $\{\Lambda x_n : n = 1, 2, 3, ...\}$ کراندار است.
اگر X مترپذیر باشد، آنگاه گزاره های فوق با گزاره زیر معادل اند:
۴) اگر $x_n \to 0$ آنگاه $\Lambda x_n \to 0$.

تعریف ۱۰.۱ فرض کنید S فضای توپولوژیکی باشد. مجموعه $E \subseteq S$ هیچ جا چگال نامیده می شود اگر درون بستار E تهی باشد. مجموعه ای که به صورت اجتماع شمارایی از مجموعه های هیچ جا چگال در S باشد را از وسته اول در S می نامیم. هر زیر مجموعه ای از S که از رسته اول نباشد را از رسته دوم می نامیم.

قضیه ۱۱.۱ (قضیه رسته ای بئر) اگر S فضای متریک تام و یا فضای موضعا فشرده و هاسدورف باشد، آنگاه اشتراک هر گردایه شمارا از زیر مجموعه های باز چگال از S در S چگال است.

تعریف ۱۲.۱ فرض کنید X و Y فضاهای برداری توپولوژیکی و Γ گردایه ای از توابع خطی از X بتوی Y باشند. گوییم Γ همپیوسته است اگر برای هر همسایگی W از صفر در Y، یک همسایگی V از صفر در X موجود باشد بطوریکه برای هر $\Lambda \in \Gamma$، $\Lambda(V) \subseteq W$.

قضیه ۱۳.۱ فرض کنید X و Y فضاهای برداری توپولوژیکی و Γ گردایه ای از توابع خطی و همپیوسته از X بتوی Y باشند و E یک زیر مجموعه کراندار از X باشد. آنگاه زیر مجموعه کراندار F از Y وجود دارد که برای هر $\Lambda \in \Gamma$ داریم $\Lambda(E) \subseteq F$.

قضیه ۱۴.۱ (قضیه کرانداری یکنواخت (باناخ– اشتنهاوس)) فرض کنید X و Y فضاهای برداری توپولوژیکی و Γ گردایه ای از توابع خطی و پیوسته از X بتوی Y باشد و B مجموعه همه $x \in X$ هایی باشد که مدار آنها یعنی $\Gamma(x) = \{\Lambda x : \Lambda \in \Gamma\}$ در Y کراندار است. اگر B از رسته دوم باشد، آنگاه $B = X$ و Γ همپیوسته است.

قضیه ۱۵.۱ فرض کنید X و Y فضاهای برداری توپولوژیکی، K مجموعه محدب و فشرده در X، Γ یک گردایه از توابع خطی و پیوسته از X بتوی Y و برای هر $x \in K$، مدار $\Gamma(x) = \{\Lambda x : \Lambda \in \Gamma\}$ زیر مجموعه کرانداری از Y باشد، آنگاه مجموعه کراندار $B \subseteq Y$ وجود دارد بطوری که برای هر $\Lambda \in \Gamma$، $\Lambda(K) \subseteq B$.

تعریف ۱۶.۱ اگر X و Y مجموعه های مفروضی باشند و تابع $f : X \to Y$ مفروض باشد. گراف f مجموعه $\{(x, f(x)) : x \in X\}$ است.

قضیه ۱۷.۱ فرض کنید X فضای برداری توپولوژیکی، Y هاسدورف و $f : X \to Y$ تابعی پیوسته باشد، آنگاه گراف f بسته است.

تعریف ۱۸.۱ فرض کنید X فضای برداری توپولوژیکی باشد. X را F– فضا گوییم اگر توپولوژی آن توسط یک متر پایای تام القا شود.

تعریف ۱۹.۱ فضای برداری توپولوژیکی A را بنیادی نامیم اگر $b > 1$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر دنباله (x_n) از A، از همگرایی $b^n(x_n - x_{n-1})$ به صفر، کوشی بودن (x_n) نتیجه شود.

تعریف ۲۰.۱ جبر توپولوژیکی بنیادی A را موضعا ضربی نامیم و با نماد FLM نشان می دهیم اگر همسایگی صفر $U_{\circ}$ را چنان بیابیم بطوری که برای هر همسایگی صفر مانند V، توانهای به اندازه کافی بزرگ $U_{\circ}$ زیرمجموعه V باشند.

قضیه ۲۱.۱ (قضیه گراف بسته) فرض کنید:
۱) X و Y، $F-$ فضا باشند.
۲) $\Lambda : X \to Y$ خطی است.
۳) $G = \{(x, \Lambda x) : x \in X\}$، گراف Λ، در $X \times Y$ بسته است.
آنگاه Λ پیوسته است.

تعریف ۲۲.۱ فضای دوگان یک فضای برداری توپولوژیکی X، فضای برداری X^* است که اعضای آن تابعکهای خطی و پیوسته روی X هستند. اگر X نرمدار باشد، X^* با نرم $||\Lambda|| = sup\{|\Lambda(x)| : ||x|| \leq ۱\}$ فضای باناخ است.

لم ۲۳.۱ فرض کنید $(X, d_۱)$ و $(Y, d_۲)$ فضاهای متریک باشند و Λ تابعی از X بتوی Y باشد. مجموعه $G = \{(x, \Lambda x) : x \in X\}$ بسته است اگر و فقط اگر، برای هر دنباله (x_n) در X که $x_n \to x$ و $\Lambda(x_n) \to y$، داشته باشیم $\Lambda(x) = y$.

لم ۲۴.۱ فرض کنید X یک فضای نرمدار، $\delta > ۱$ و E زیرمجموعه ای از X باشد بطوریکه برای هر x در گوی واحد $B(\circ, ۱)$ از X، $a \in E$ ای وجود داشته باشد که $||x - a|| < ۱/\delta$. در اینصورت دنباله $(a_n) \in E$ وجود دارد، بطوریکه:

$$||x - \sum_{j=\circ}^{n} a_j/\delta^j|| < ۱/\delta^{n+۱}.$$

تعریف ۲۵.۱ فرض کنید X و Y فضاهای برداری باشند. تابع $f : X \to Y$ را جمعی گوییم اگر برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم: $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

تعریف ۲۶.۱ فرض کنید X و Y فضاهای برداری باشند. تابع $f : X \to Y$ را خطی گوییم اگر جمعی باشد و برای هر $x \in X$ و α ی حقیقی داشته باشیم: $f(\alpha x) = \alpha f(x)$. شرط اخیر را شرط همگنی نامیم.

تعریف ۲۷.۱ فرض کنید X و Y فضاهای برداری باشند. تابع $f : X \to Y$ را ضربی گوییم اگر برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم: $f(xy) = f(x)f(y)$.

لم ۲۸.۱ فرض کنید A و B جبرهای باناخ و $T : A \to B$ تابع جمعی و $x_\circ \in A$ باشد. اگر بازه (c, d) و $y \in A$ وجود داشته باشند به قسمی که مجموعه $C = \{||T(ux_\circ + y)|| : u \in (c, d)\}$ کراندار باشد، آنگاه برای هر u حقیقی داریم: $T(ux_\circ) = uT(x_\circ)$.

قضیه ۲۹.۱ فرض کنید A یک جبر باناخ و φ تابعک خطی ضربی روی A باشد. در اینصورت φ پیوسته است و $||\varphi|| \leq ۱$ و اگر A یکدار باشد آنگاه $||\varphi|| = ۱$.

مثالهای زیادی وجود دارند که نشان می دهند شرط تام بودن را از قضیه ۲۹.۱ نمی توان حذف کرد، [۱۰].

تعریف ۳۰.۱ تابعک خطی ناصفر φ روی جبر A را جردن نامیم اگر به ازای هر $a \in A$ داشته باشیم $\varphi(a^2) = (\varphi(a))^2$.

لم ۳۱.۱ (لم جردن) هر تابعک جردن φ روی جبر A، ضربی است.

تعریف ۳۲.۱ فرض کنید X فضای برداری توپولوژیکی باشد. X را موضعا محدب نامیم اگر پایه موضعی β برای X موجود باشد که اعضایش محدب باشند.

تعریف ۳۳.۱ فرض کنید X فضای برداری توپولوژیکی باشد. X را موضعا کراندار نامیم اگر صفر یک همسایگی کراندار داشته باشد.

تعریف ۳۴.۱ فرض کنید X جبر توپولوژیکی موضعا محدب و $\{p_\alpha\}$ یک خانواده از نیم نرمهای جبری روی X باشد. در این صورت X را جبر موضعا محدب ضربی نامیم و با نماد LMC نشان می‌دهیم.

قضیه ۳۵.۱ فضای برداری توپولوژیکی X، LMC است اگر و تنها اگر پایه موضعا محدبی مانند $\{U_\alpha\}$ وجود داشته باشد که برای هر α ، $U_\alpha^2 \subseteq U_\alpha$.

تعریف ۳۶.۱ فرض کنید A جبر یکدار باشد. مجموعه اعضای معکوسپذیر در جبر A نسبت به عمل ضرب را با $Inv(A)$ و مجموعه اعضای معکوس ناپذیر در جبر A را با$Sing(A)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳۷.۱ فرض کنید a عضوی از جبر نرمدار A باشد. شعاع طیفی a که با نماد $r(a)$ نشان داده می شود به صورت زیر تعریف می شود:

$$r(a) = inf\{||a^n||^{۱/n} : n = ۱, ۲, ۳, ...\}.$$

تبصره ۳۸.۱ فرض کنید A جبر بدون یکه باشد. به دو روش می توان A را یکدار کرد:

۱) با اضافه کردن عضو یکه به جبر.

۲) با استفاده از مفهوم شبه معکوس.

تعریف ۳۹.۱ یکدار شده جبر نرمدار A روی میدان F را با نماد $A \oplus F$ نشان می دهیم و جبر نرمداری تعریف می کنیم که شامل مجموعه $A \times F$ با جمع، ضرب اسکالر و ضرب تعریف شده برای هر $x, y \in A$ و $\alpha, \beta \in F$ به صورت زیر می باشد:

۱) $(x, \alpha) + (y, \beta) = (x + y, \alpha + \beta)$.

۲) $\beta(x, \alpha) = (\beta x, \beta\alpha)$.

۳) $(x, \alpha)(y, \beta) = (xy + \alpha y + \beta x, \alpha\beta)$.

نرم برای جبر یکدار شده $A \oplus F$ به صورت

$$||(x, \alpha)|| = ||x|| + |\alpha|$$

عریف می شود.