شرایط بهینگی کاروش- کان- تاکر در مسائل برنامه‌ریزی چندهدفی با توابع هدف بازه مقدار

توسط

الهام حسین زاده

رسالهٔ ارائه شده به عنوان بخشی از ملزومات برای دریافت درجهٔ

کارشناسی ارشد ریاضیات کاربردی (تحقیق در عملیات)

زیر نظر

دکتر حسن حسن پور

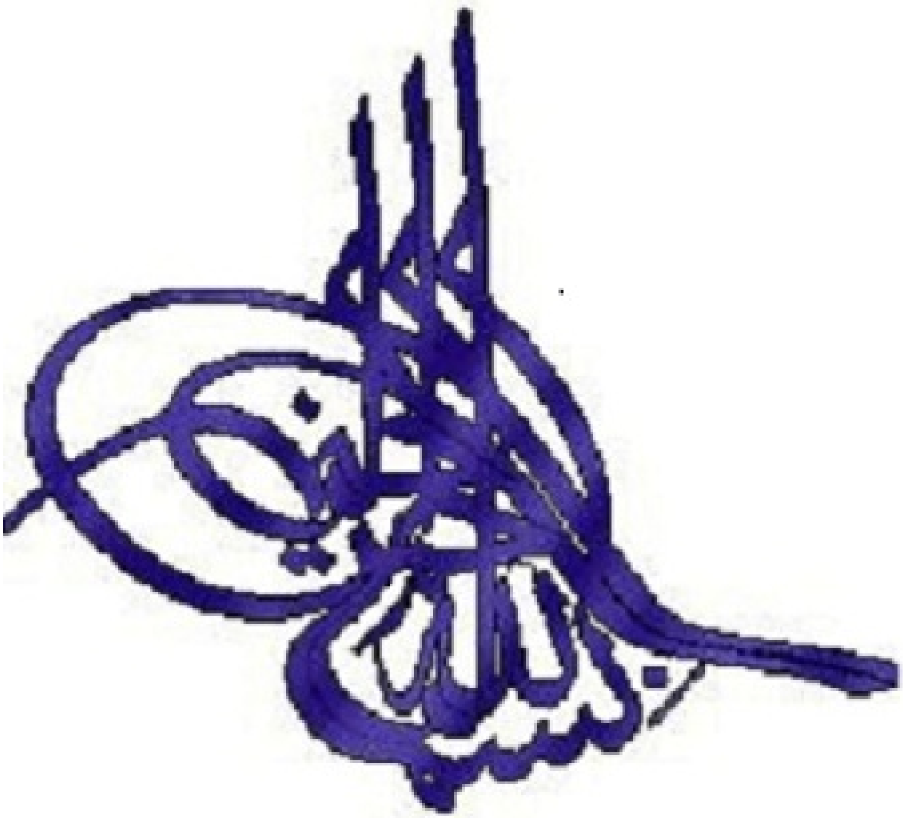
استاد مشاور

دکتر مسعود امان

دی ماه ۱۳۸۹

دانشکدهٔ ریاضی

دانشگاه بیرجند



تقدیم به

او که جهان در انتظارش است و ساحت مقدس علی بن موسی الرضا(ع).

پیشکش به:

پدر عزیزم

که مهرش بی دریغ بود و دلتنگی ام برایش بی پایان...

پس از خدا، یادش همیشه آرام دل بیقرار من است. او که با دستان پر محبتش، دستان کوچک مرا گرفت و آرزوهای بزرگش را در سایه ی چتری از دعا بر من گستراند تا اکنون قلم بر برگ دفتر تلاش روزهای بی حضور او جاری کنم و بگویم سپاس! روحت شاد و جایگاهت بهشت باد.

و

مادر مهربانم

امیدم، شادیم، آرامشم، همه ی، هستیم

او که گوهری بی همتا در دریای بی دریغ فداکاریست و قلب پاکش منبع دعای خیر در زندگیم است. در برابر وجود گرامیش زانوی ادب به زمین می نهم و با دلی مالامال از عشق و محبت بر دستانش بوسه می زنم. امیدوارم انوار روح افزای پر مهرش همواره بر وجودم بتابد و روشنگر ادامه ی مسیر زندگیم باشد.

و تقدیم به برادران و خواهران مهربانم که وجودشان گرمابخش زندگیم است.

صمیمانه ترین و خالصانه ترین سپاس ها را با اشک شوق به پیشگاه کبریایی پروردگار مهربانم تقدیم میدارم، او که همواره مبهوت حکمتش بوده و هستم، خاضعانه در برابر الطاف بیکرانش پیشانی خضوع و بندگی بر خاک می نهم. امید آنکه با فضلش پذیرا باشد که او "نعم المولی و نعم النصیر" است.

نهایت سپاس خود را از الطاف استاد راهنمای گرانقدرم جناب آقای دکتر حسن حسن پور دارم، استاد ارجمندی که همواره با خلق نیکو و صبر و حوصله ی بی نظیرشان پاسگوی تمامی سوالاتم بودند و با بزرگواری خود، نقایص این حقیر را مورد اغماض قرار می دادند. واژه ای هم تراز قدردانی از ایشان نمی شناسم و می دانم که خداوند خود این جای خالی را پر خواهد کرد.

از خداوند متعال آرزوی طول عمر با عزت و توفیق روزافزون برای ایشان مسئلت می نمایم.

از استاد مشاور گرانقدرم جناب آقای دکتر مسعود امان که با راهنماییهای ارزنده شان همیشه مشوق من بوده اند و سرکار خانم دکتر فائزه توتونیان در دانشگاه فردوسی صمیمانه سپاسگزارم.

از اساتید محترم جناب آقای دکتر اسدا.. محمودزاده وزیری و سرکار خانم دکتر نسیم نصرآبادی که زحمت مطالعه و داوری پایان نامه را به عهده گرفتند بسیار سپاسگزارم.

خدای را سپاسگزارم که در اولین سفرم به بیرجند مرا با دوست بسیار مهربانم خانم فرزانه بنی فاطمی آشنا کرد او که حضورش همواره برایم آرامش بخش بود، بابت تمام زحماتش تشکر و قدردانی می کنم.
از دوستان مهربانم خانم زبیده مومنی، بخاطر تمام فداکاریها و لطف بی دریغشان و آقای علی متوسل بابت راهنماییهای ارزنده شان صمیمانه سپاسگزارم.
از هم اتاقیهای خوبم مریم یاوری، فاطمه عباسلو، اکرم خواجه رضایی و عفت دریاب که در این مدت دورانی پر از خاطره های خوب و دوست داشتنی را برایم به ارمغان گذاشتند تشکر و قدردانی می کنم.
خاطره ی زیبای دوستان خوبم سودابه شعبانی، اشرف اروجی، سمانه محمدی، بیترا احمدی، فاطمه علی- محمدی، معصومه فنایی و معصومه محبی همیشه با من می ماند و همکلاسی های خوبم خانمها کفاش دوست، متولی، صلواتی نژاد، قلی زاده و آقایان کرمانی نژاد و زیبایی، هیچگاه از ذهن من پاک نخواهند شد.
برای تمامی این عزیزان آرزوی سلامتی و موفقیت روزافزون از خداوند متعال مسئلت می نمایم.

شرایط بهینگی کاروش- کان- تاکر در مسائل برنامه‌ریزی چندهدفی با توابع هدف بازه مقدار

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا مسائل برنامه‌ریزی چندهدفی به عنوان شاخه‌ای مهم از مسائل تصمیم‌گیری چندمعیاره مورد بحث قرار گرفته است. از آنجا که در دنیای واقعی پارامترهای مسائل بهینه‌سازی نادقیقند، مسائل برنامه‌ریزی چندهدفی با داده‌های بازه‌ای در نظر گرفته شده است.
به دلیل اینکه که مقادیر توابع هدف بازه‌های بسته می‌باشند، برای تفسیر مفهوم بازه‌ی بهینه (مقدار بهینه‌ی تابع هدف) دو رابطه‌ی ترتیب جزئی بر روی رده‌ی بازه‌های بسته معرفی شده است. همچنین به منظور بررسی مشتق‌پذیری یک تابع بازه مقدار از متر هاسدورف و برای تعریف فاصله‌ی بین دو بازه‌ی بسته از تفاضل هوکوهارا استفاده گردیده است.
شرایط بهینگی کاروش- کان- تاکر (KKT) برای مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی مشتق‌پذیر که در خواص تحدب مناسبی صادق باشند علاوه بر شرایط لازم، شرایط کافی نیز می‌باشند.
در این پایان نامه شرایط بهینگی KKT در مسائل برنامه‌ریزی چندهدفی با توابع هدف و همچنین توابع محدودیت بازه مقدار مورد بررسی قرار گرفته است. در نهایت موضوع دوگانی در مسائل بهینه‌سازی بازه مقدار مورد مطالعه قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: *شرایط بهینگی کاروش- کان- تاکر، متر هاسدورف، تفاضل هوکوهارا، تابع بازه مقدار، جواب بهینه‌ی پارتو.*

فهرست مطالب

پیشگفتار

اکثر تصمیم‌گیری‌های مدیران تحت تأثیر عوامل مختلف کمی وکیفی قراردارد که عموماً این عوامل با یکدیگر در تعارض هستند. اشتباه و عدم دقت در تصمیم‌گیری مستلزم پرداخت هزینه‌ی خطا می‌باشد. هر چه قدرت و اختیار مدیریت بیشتر باشد هزینه‌ی تصمیم غلط نیز بالاتر خواهد بود. برای پیشگیری از خطا در تصمیم‌گیری و پرداخت هزینه‌های گزاف آن، نیاز به تکنیک‌های قوی در این زمینه می‌باشد. از این رو روش‌های برنامه‌ریزی چندهدفی در سه دهه‌ی گذشته بسیار مورد توجه محافل علمی و کاربردی بوده است.

در جهان واقعی، رویدادهای تصادفی و نامعلوم زیادی وجود دارد که حاکی از موقعیت-های ناگهانی و غیر قابل پیش‌بینی است. لذا عدم قطعیت در مسائل بهینه‌سازی معمول، يك موضوع پژوهشی جالب می‌باشد. برای نشان دادن این نامعینی معمولاً از رویکرد بازه‌ای، فازی، یا تصادفی استفاده می‌شود.

در برنامه‌ریزی ریاضی معمولی، معمولا ضرایب مسائل بصورت مقادیر قطعی هستند. در صورتی که ضرایب می‌تواند بصورت کمیت‌های نامعین باشد. در حالت کلی، آن دسته از مسائل بهینه‌سازی که ضرایب آنها اعداد حقیقی می‌باشند، مسائل بهینه‌سازی قطعی نامیده می‌شوند. اگر ضرایب مسئله‌ی بهینه‌سازی بصورت متغیرهایی تصادفی با توزیع معلوم فرض شود با مسائل بهینه‌سازی تصادفی مواجه هستیم.

در سال‌های اخیر برای مدلسازی مسائل بهینه‌سازی نامعین رویکرد بازه‌ای گسترش یافته است. آن دسته از مسائل بهینه‌سازی که ضرایب آنها بازه های بسته می‌باشند، مسائل بهینه-

سازی بازه مقدار نامیده می‌شوند و به اختصار با (IVOP)[1] نشان داده می‌شود. بنابراین مسائل بهینه‌سازی بازه مقدار، می‌تواند انتخابی برای در نظر گرفتن عدم قطعیت و نامعینی در مسائل بهینه‌سازی باشد.

رئوس مطالب پایان‌نامه به قرار زیرند:

در فصل اول، پس از معرفی مسئله‌ی بهینه‌سازی چندهدفی، مفهوم جواب بهینه‌ی پارتو برای این نوع مسائل مطرح شده است. سپس به معرفی دو روش برای حل این نوع مسائل پرداخته شده است.

فصل دوم، به بیان مفاهیم و تعاریف اساسی از جمله حساب بازه‌ها و رتبه‌بندی آنها که مبنای فصول بعدی است، اختصاص یافته و پس از معرفی تابع بازه مقدار، مفاهیم حد و پیوستگی، مشتق‌پذیری و تحدب در این نوع توابع مورد بررسی قرار گرفته است. از آنجا که مقادیر توابع هدف بازه‌های بسته می‌باشند، برای تفسیر مفهوم بازه‌ی بهینه (مقدار تابع هدف بهینه) از روابط ترتیب جزئی بر روی رده‌ی بازه‌های بسته استفاده شده است. همچنین به منظور بررسی مشتق‌پذیری یک تابع بازه مقدار از متر هاسدورف و برای تعریف فاصله‌ی بین دو بازه‌ی بسته از تفاضل هوکوهارا استفاده گردیده است.

در فصل سوم، شرایط بهینگی KKT برای انواع مفاهیم جواب بهینه‌ی پارتو در مسائل بهینه‌سازی چندهدفی با توابع هدف بازه مقدار بررسی گردیده است.

در فصل چهارم، علاوه بر توابع هدف، توابع قیدی نیز در مسائل بهینه‌سازی چندهدفی، بازه مقدار در نظر گرفته شده و شرایط لازم و کافی برای بهینگی این نوع مسائل بررسی شده است. قابل ذکر است که مطالب این فصل از نگارنده می‌باشد.

در فصل پایانی، مسائل بهینه‌سازی بازه مقدار در حالت کلی فرمول‌بندی شده و قضایای دوگانی و قابلیت حل در آنها مورد بررسی قرار گرفته است.

قضایایی که با علامت (*) مشخص شده‌اند توسط نگارنده اثبات گردیده است.

[1] Interval valued optimization problems

فصل ۱

بهینه‌سازی چندهدفی

۱.۱ مقدمه

دستیابی به بهترین نتیجه در شرایط داده شده بهینه‌سازی [۱] نام دارد. در طراحی، ساخت و نگهداري هر سیستم مهندسی، مهندسان باید تصمیمات فنی و مدیریتی بسیاری را در چند مرحله بگیرند. هدف نهایي چنین تصمیماتی، کمینه‌کردن هزینه‌ی لازم و یا بیشینه‌کردن سود موردنظر است. از طرفی هزینه‌ی لازم و یا سود موردنظر را در هر وضعیت عملی می‌توان به صورت تابعی از متغیرهای تصمیم بیان کرد. لذا بهینه‌سازی در واقع فرایند یافتن شرایطی است که مقدار بیشینه یا کمینه‌ی یك تابع را به دست می‌دهد. برای حل گونه‌های مختلف مسائل بهینه‌سازی روش‌های بهینه‌سازی مختلفی وجود دارد. روش‌های جستجوی جواب بهینه را با عنوان روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی هم می‌شناسند که عموماً به صورت بخشی از تحقیق در عملیات [۲] مطالعه می‌شوند. تحقیق در عملیات شاخه‌ای از ریاضیات است که به کاربرد روش‌های علمی در مسائل تصمیم‌گیری و رسیدن به بهترین جواب یا جواب بهینه می‌پردازد.

[۱] Optimization
[۲] Operations research

روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی عبارتند از:

۱- روش‌های حسابی

۲- حساب تغییرات [۳]

۳- برنامه‌ریزی غیرخطی (NLP) [۴]

۴- برنامه‌ریزی هندسی [۵]

۵- برنامه‌ریزی درجه‌ی دوم [۶]

۶- برنامه‌ریزی خطی(LP)

۷- برنامه‌ریزی پویا [۷]

۸- برنامه‌ریزی صحیح [۸]

۹- برنامه‌ریزی تصادفی [۹]

۱۰- برنامه‌ریزی تفکیك پذیر (جداشدنی) [۱۰]

۱۱- برنامه‌ریزی چند هدفی [۱۱]

۱۲- روش‌های شبکه (CPM [۱۲] و $PERT$ [۱۳])

۱۳- نظریه‌ی بازی‌ها [۱۴]

۱۴- برنامه‌ریزی فازی [۱۵]

۱۵- برنامه‌ریزی بازه مقدار (IVP) [۱۶]

---

[۳] Calculus of variations
[۴] Non linear Programming
[۵] Geometic Programming
[۶] Quadratic Programming
[۷] Dynamic Programming
[۸] Integer Programming
[۹] Stochastic Programming
[۱۰] Seperable Programming
[۱۱] Mullti objective Programming
[۱۲] Critical Path Method
[۱۳] Program Evolution and Review Technique
[۱۴] Game theory
[۱۵] Fuzzy Programming
[۱۶] Interval-valued Programming

۲.۱ تاریخچه

گذشته‌ی روش‌های بهینه‌سازی را می‌توان در روزگار نیوتن [۱۷]، لاگرانژ [۱۸] و کوشی ردیابی کرد. روش‌های بهینه‌سازی با کارهای نیوتن و لایبنیتز [۱۹] گسترش یافت و حساب تغییرات توسط برنولی، اولر [۲۰]، لاگرانژ و ویرشتراس [۲۱] بنیانگذاری شد. یك روش بهینه‌سازی برای مسائل مقید، که شامل افزودن مضارب مجهولی از توابع قیدی به تابع هدف می‌باشد به نام یابنده‌ی آن، لاگرانژ نامگذاری شد و کوشی برای اولین بار روش تندترین کاهش را در حل مسائل کمینه‌سازی نامقید به کار گرفت.

تلاش‌های کان وتاکر در سال ۱۹۵۱ برای شرایط لازم و کافی جواب بهینه‌ی مسائل برنامه‌ریزی ریاضی، زیربنای تحقیقات بعدی در برنامه‌ریزی غیرخطی شد. سهم زوتندیك و روزن [۲۲] در اوایل دهه‌ی ۱۹۶۰ در برنامه‌ریزی غیرخطی بسیار با اهمیت بوده است. گرچه روش خاصی که به طور کلی برای حل همه‌ی مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی قابل اعمال باشد، یافت نشد، کارهای کارول [۲۳] و فیاکو و مك کورمیك [۲۴] یك مسئله‌ی مشکل را که باید با استفاده از روش‌های شناخته شده‌ی بهینه‌سازی نامقید حل شود، بسیار آسان کرد. برنامه‌ریزی هندسی در دهه‌ی ۱۹۶۰ توسط دوفین [۲۵] و زنر و پیترسون [۲۶] بسط یافت. گاموری [۲۷] در زمینه‌ی برنامه‌ریزی با اعداد صحیح پیشگام شد که یکی از مهمترین و رو به گسترش‌ترین زمینه‌های بهینه‌سازی است. زیرا بیشتر کاربردهای دنیای واقعی در این طبقه

[۱۷] Newton
[۱۸] Lagrange
[۱۹] Leibnitz
[۲۰] Euler
[۲۱] Weirstrass
[۲۲] Zoutendijk and Rosen
[۲۳] Carroll
[۲۴] Fiacco and Mc Cormick
[۲۵] Duffin
[۲۶] Zener and Peterson
[۲۷] Gamory

از مسائل قرار می‌گیرند. دانتزیك [۲۸] و چارنز و کوپر [۲۹] روش‌های برنامه‌ریزی تصادفی را توسعه دادند و مسائلی را حل کردند که در آنها پارامترها مستقل و دارای توزیع نرمال هستند. تمایل به بهینه‌سازی مسئله‌ای با بیش از یك هدف و با قیدهای فیزیکی، به توسعه‌ی روش‌های برنامه‌ریزی با چند هدف انجامید. وان نیومن [۳۰] در سال ۱۹۲۸ نظریه‌ی بازی‌ها را بنیانگذاری کرد و از آن زمان این روش در حل چندین مسئله‌ی اقتصاد ریاضی و نظامی بکار گرفته شده است، تنها طی چند سال اخیر از نظریه‌ی بازی‌ها برای حل برخی از مسائل طراحی مهندسی استفاده شده است .

بهینه‌سازی بازه مقدار و بررسی مسائل برنامه‌ریزی خطی و غیرخطی بازه مقدار موضوعی جوان است و پژوهش در مورد آن برگرفته از مسائل بهینه‌سازی نامعین [۳۱] و مسائل برنامه‌ریزی نادقیق [۳۲] می‌باشد.

کتابهای نوشته شده توسط بیرگ[۳۳] [۷]، کال[۳۴] [۲۰]، پریکوپا [۳۵][۲۸]، استانکو-میناسیان [۳۶] و واجدا [۳۷] [۴۴] روش‌های بسیار مفیدی را برای حل مسائل بهینه‌سازی تصادفی مطرح می‌کنند. اگر ضرایب مسائل بهینه‌سازی بصورت اعداد فازی فرض شوند یا محدودیتها و تابع هدف مجموعه های فازی با توابع عضویت معلوم در نظر گرفته شوند، با مسائل برنامه‌ریزی فازی روبرو خواهیم بود. مقالات نوشته شده در زمینه‌ی بهینه‌سازی فازی توسط اسلوینسکی[۳۸][۳۳] و دلگادو[۳۹][۱۲] روش‌های حل اینگونه مسائل را معرفی می‌کند. در این دو رویکرد (بهینه‌سازی تصادفی و بهینه‌سازی فازی) توزیع‌های

[۲۸] Dantzig
[۲۹] Charnes and Copper
[۳۰] Van Newman
[۳۱] Uncertain
[۳۲] Inexact programming
[۳۳] Birge
[۳۴] Kall
[۳۵] Prekopa
[۳۶] Stancu-Minasian
[۳۷] Vajda
[۳۸] Slowinski
[۳۹] Delgado

احتمال و توابع عضویت نقش مهمی را ایفا می‌کنند و تعیین یك تابع عضویت مناسب یا توزیع احتمال درست در یك محیط نامعین دشوار است. همچنین افرادی مانند رامیک و اینوگوچی[۴۰] کارهایی در زمینه‌ی مقایسه‌ی بهینه‌سازی تصادفی و فازی انجام داده‌اند [۱۷]. در سال‌های اخیر برای مدلسازی مسائل بهینه‌سازی نامعین رویکرد بازه‌ای گسترش یافته است. تاناکا [۴۱] در سال ۱۹۸۴ و روملفانگر [۴۲] در سال ۱۹۸۹ در مورد مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی با ضرایب بازه‌ای در تابع هدف بحث کردند. در سال ۱۹۹۶ چاناس و کوچتا[۴۳] روشی بر اساس رابطه‌ای ترتیبی روی اعداد بازه‌ای پیشنهاد کردند که مسئله‌ی بهینه‌سازی نامعین را به مسئله‌ی بهینه‌سازی قطعی تبدیل می‌کند [۹]. تونگ [۴۴] در سال ۱۹۹۴ مسائلی را بررسی کرد که ضرایب تابع هدف و قیود آنها بازه‌ای بودند. لیو و دا [۴۵] در سال ۱۹۹۹ یك روش برای بهینه‌سازی مسائل خطی بازه‌ای ارائه کردند. همچنین سنگوپتا [۴۶] مسائل برنامه‌ریزی خطی‌ای را مورد بررسی قرار داد که در آن ضرایب تابع هدف و قیدهای نامساوی همگی بازه‌ای بودند. برای حل مسائل بهینه‌سازی بازه‌ای، ژانگ [۴۷] در سال ۱۹۹۹ اعداد بازه‌ای را به صورت متغیرهای تصادفی با توزیع یکنواخت فرض کرد و مسئله‌ی بهینه‌سازی بازه مقدار را به مسئله‌ی بهینه‌سازی تصادفی تبدیل کرد. ما [۴۸] در سال ۲۰۰۲ روی مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی بازه‌ای کار کرد و بالاخره در سال‌های اخیر افرادی مانند هسین-چونگ وو [۴۹] و شیانگ-تای لیو [۵۰] کارهایی در زمینه‌ی بهینه‌سازی بازه‌ای انجام داده‌اند [۴۶، ۴۷، ۴۸] که اساس کار این پایان نامه را تشکیل می‌دهند.

[۴۰] Ramic and Inuiguchi
[۴۱] Tanaka
[۴۲] Rommelfanger
[۴۳] Chanas and Kuchta
[۴۴] Tong
[۴۵] Liu and Da
[۴۶] Sengupta
[۴۷] Zhang
[۴۸] Ma
[۴۹] Hsien-Chung Wu
[۵۰] Shiang-Tai Liu

۳.۱ کاربردها

بهینه‌سازی در مفهوم گسترده‌ی خود، می‌تواند در حل هر مسئله مهندسی بکار گرفته شود. از کاربردهای بهینه‌سازی در حالت کلی، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- طراحی هواپیما و سازه های فضایی با وزن کمینه
- یافتن مسیرهای بهینه در وسایل نقلیه‌ی فضایی
- طراحی سازه های مهندسی عمران مانند پلها، برجها، لوله ها و سدها با هزینه‌ی کمینه
- طراحی سازه های مقاوم در برابر زلزله، باد و دیگر بلایای طبیعی و تصادفی با وزن کمینه
- طراحی سیستمهای منابع آب با سود بیشینه
- طراحی پمپها، توربین ها و تجهیزات انتقال حرارت با بازده بیشینه
- یافتن کوتاهترین مسیر
- برنامه‌ریزی، کنترل و زمان‌بندی بهینه‌ی تولید
- تخصیص منابع یا خدمات به چند فعالیت برای بیشینه شدن سود
- انتخاب بهترین رویکرد برای دستیابی به سود بیشینه در یك فرایند رقابتی
- طراحی بهینه‌ی سیستمهای کنترل

و ... .

از بهینه‌سازی بازه مقدار و روش‌های بازه‌ای، استفاده های زیادی شده است و مسائل برنامه‌ریزی بازه مقدار، کاربردهای نسبتا وسیعی در انواع مهندسی از جمله مهندسی نفت، مهندسی هوا فضا و تصمیم‌گیری چندهدفی [۵۱] داشته است. ژی سو و بوتینگ یانگ [۵۲] برای مدیریت پسماند جامد در نفت خام، یک مدل برنامه‌ریزی فازی با پارامترهای بازه‌ای ارائه کردند [۴۱]. همچنین کین و هانگ [۵۳] به همراه چند تن دیگر، یک مدل بهینه‌سازی غیرخطی فازی با پارامترهای بازه‌ای برای مدیریت کیفی آب های جاری بلاتکلیف

[۵۱] Multi objective decision making
[۵۲] Zhe Su and Boting Yang
[۵۳] Qin and Huang

پیشنهاد دادند [۲۹]. میشل ر. بنجامین [۵۴] برای بهینه‌سازی در طراحی موشك و زیردریایی و همچنین تصمیم‌گیری چند هدفی از برنامه‌ریزی بازه‌ای استفاده کرد [۶].

۴.۱ بهینه‌سازی چند هدفی

انسان در زندگی روزمره تصمیمات بسیاری می‌گیرد. این تصمیمات از مسائل شخصی و فردی تا مسائل بزرگ و کلان را شامل می‌شود. در اکثر مسائل تصمیم‌گیری عموماً اهداف و عوامل متعددی مطرح است و فرد تصمیم‌گیرنده سعی می‌کند بین چند گزینه‌ی موجود، بهترین گزینه را انتخاب نماید.

در زیر چند نمونه از تصمیم‌گیری‌های چند معیاره در مراحل مختلف زندگی ذکر می‌گردد. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود این تصمیمات تحت تأثیر چندین معیار و عامل قرار دارند:

- **انتخاب شغل**: این امر بستگی به ماهیت شغل، شخصیت فرد، میزان حقوق، محل کار، موفقیت‌های شغلی و ... دارد.

- **انتخاب محل سکونت**: این مسئله تحت تأثیر قیمت منزل، فاصله‌ی آن تا محل کار، سکوت و آرامش محله و... است.

- **انتخاب موشك برای نیروی هوایی**: این امر از عواملی چون سرعت، برد، قابلیت اطمینان، دقت عملکرد، هزینه و ... تأثیر می‌پذیرد.

- **توسعه‌ی منابع آب**: توسعه‌ی سدها و منابع آبی در کشورها بستگی به عواملی مانند هزینه‌ی احداث سد، صدمات ناشی از سیل در صورت عدم وجود سد، هزینه‌ی خشکسالی در صورت عدم وجود سد، استفاده از آب سد در زمین‌های کشاورزی و مصرف شهری، توسعه‌ی نیروگاه‌ها و تولید برق و ... دارد.

در تحقیق در عملیات این نوع مسائل به عنوان مسائل تصمیم‌گیری چند معیاره (MCDM) [۵۵]

[۵۴] Michael R. Benjamin
[۵۵] Multiple Criteria Decision Making

شناخته شده است.

با توجه به مسائل بالا در می‌یابیم که تصمیم‌گیری چند معیاره در زندگی بشر کاربردهای زیادی دارد و انسان به طور ناخواسته در شبانه روز تعداد زیادی از این‌گونه تصمیمات می‌گیرد که برخی از آنها نیاز به بررسی و دقت بیشتری دارد، چون خطا در آنها هزینه‌ی بالایی خواهد داشت.

مسائل تصمیم‌گیری از نظر ساختار به دو گروه تقسیم می‌شوند:

- تصمیم‌گیری چند مشخصه‌ای (MADM) [۵۶] : در این گروه، مسئله‌ی تصمیم‌گیری دارای چند گزینه‌ی مشخص است و تصمیم بر اساس چند مشخصه‌ی معلوم اتخاذ می‌شود. مدلهای گسسته یعنی مدلهایی که در آن گزینه ها بطور صریح تعریف شده‌اند، مانند انتخاب یك منزل مناسب از بین چند منزل و یا انتخاب یك فناوری مناسب از بین چند فناوری موجود، در این گروه قرار می‌گیرند.

- تصمیم‌گیری چند هدفی (MODM) [۵۷] : در این گروه، برای مسئله‌ی تصمیم‌گیری مجموعه‌ای از اهداف مختلف و محدودیتها تعریف می‌شود. مدلهای پیوسته یعنی مدلهایی که در آن گزینه ها به طور ضمنی (تلویحی) تعریف شده‌اند در این گروه قرار می‌گیرند. مانند تعیین عمر بهینه‌ی یك قطعه برای تعویض، به طوری که هزینه کاهش یافته و قابلیت اطمینان بیشتر گردد.

بهینه‌سازی چند هدفی (MOO) [۵۸] بخشی از رویکرد تصمیم‌گیری چندهدفی است. مسئله-ی بهینه‌سازی چندهدفی همانند مسئله‌ی بهینه‌سازی تک هدفی مجموعه محدودیت‌هایی دارد که ناحیه‌ی شدنی را تعیین می‌کند.

مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی چندهدفی(MOLP) [۵۹]، نوع خاصی از مسائل بهینه‌سازی چندهدفی می‌باشد که در آن توابع هدف و همچنین قیدهایی که ناحیه‌ی شدنی را می‌سازند توابع خطی

[۵۶] Multiple Attribute Decision Making
[۵۷] Multiple Objecvive Decision Making
[۵۸] Multiple Objective Optimization
[۵۹] Multiple Objective Linear Programming

هستند. ساختار کلی چنین مسائلی به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
(MOLP) \quad & \min\{c^{1}\mathbf{x} = z_{1}(\mathbf{x})\} \\
& \min\{c^{2}\mathbf{x} = z_{2}(\mathbf{x})\} \\
& \quad \vdots \\
& \min\{c^{r}\mathbf{x} = z_{r}(\mathbf{x})\} \\
& s.t. \quad \mathbf{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^{n}
\end{aligned}
$$

یا:

$$
\text{"}\min\text{"} \ \{C\mathbf{x} = \mathbf{z} \ : \ \mathbf{x} \in X\}
$$

که در آن r تعداد اهداف، c^k گرادیان k امین تابع هدف، و z_k مقدار k امین تابع هدف می‌باشد. به فضای n بعدی اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ فضای تصمیم گفته می‌شود و X ناحیه‌ی شدنی در این فضاست. "$\min$" نشان می‌دهد که هدف، کمینه‌کردن همه‌ی اهداف به طور همزمان می‌باشد. C ماتریس ضرایب توابع هدف، ماتریسی $r \times n$ با سطر k ام c^k، و $\mathbf{z}$ برداری در $\mathbb{R}^r$ با مولفه‌ی k ام z_k است.

در یک مسئله‌ی (MOLP) که X ناحیه‌ی شدنی آن در فضای تصمیم است، فضای معیار (Z) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$
Z = \{ \ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^r \mid \mathbf{z} = C\mathbf{x} \ \ , \ \ \mathbf{x} \in X\}
$$

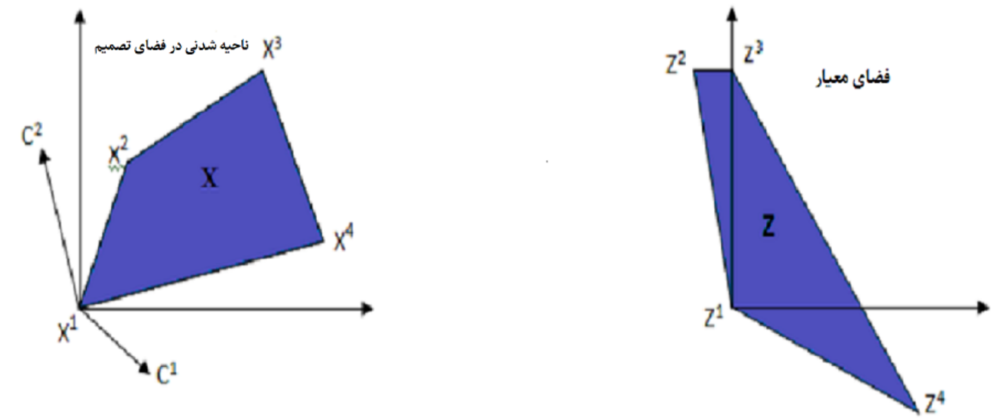
هر $\mathbf{x} \in X$ یک بردار جواب و $\mathbf{z} = (z_1(\mathbf{x}), ..., z_r(\mathbf{x}))^T$ بردار معیار آن نام دارد. در واقع فضای معیار مجموعه‌ی تمام بردارهای معیار شدنی می‌باشد. به ازای هر نقطه در ناحیه‌ی شدنی X، یك نقطه در فضای معیار Z وجود دارد.

مثال ۱.۴.۱. مسئله‌ی $MOLP$ با گرادیان‌های توابع هدف $c^1 = (1, -1)$ و $c^2 = (-1, 2)$ را در نظر بگیرید. نقاط فرین ناحیه‌ی شدنی X و بردارهای معیار نظیر عبارتند از:

$$
\mathbf{x}^1 = (0, 0) \quad , \quad \mathbf{x}^2 = (1, 2) \quad , \quad \mathbf{x}^3 = (3, 3) \quad , \quad \mathbf{x}^4 = (4, 1)
$$

$$
\mathbf{z}^1 = (0, 0) \quad , \quad \mathbf{z}^2 = (-1, 3) \quad , \quad \mathbf{z}^3 = (0, 3) \quad , \quad \mathbf{z}^4 = (3, -2).
$$

همانطور که در شکل ۱.۱ ملاحظه می‌شود، نقاط فرین فضای معیار Z، تصویر نقاط فرین



شکل ۱.۱: ارتباط بین فضای تصمیم و فضای معیار

ناحیه‌ی شدنی X در فضای تصمیم می‌باشند.

یکی از راههای برخورد با مسائل چندهدفی تبدیل r تابع هدف به یک تابع هدف توسط نگاشتی به صورت $U : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ به نام تابع مطلوبیت [۶۰] است. در واقع تابع مطلوبیت فضای معیار را به گونه‌ای بر روی خط حقیقی تصویر می‌کند، به طوری که بردار معیار دارای ترجیح بیشتر، روی مقادیر بزرگتر تصویر می‌شود. انتخاب تابع مطلوبیت به نظر تصمیم‌گیرنده وابسته است. برای ملاحظه‌ی انواع توابع مطلوبیت و خواص آن‌ها می‌توان به عنوان مثال به [۴۰] مراجعه نمود.

۵.۱ جواب بهینه‌ی پارتو

اگر مفهوم بهینگی برای مسئله‌ی تک‌هدفی را مستقیماً برای برنامه‌ریزی چندهدفی بکار بریم، به مفهوم جواب بهینه‌ی کامل زیر خواهیم رسید.

تعریف ۱.۵.۱. $\mathbf{x}^* \in X$ جواب بهینه‌ی کامل [۶۱] مسئله‌ی (MOLP) گفته می‌شود اگر

[۶۰] Utility function
[۶۱] Complete optimal solution