

فصل ۱

کرومودینامیک کوانتومی (QCD)

مقدمه

این فصل مختصری به درون اتم و مدل کوارکی اشاره دارد. بعضی خصوصیات تقارن $SU(3)$ را بیان می کند، هدف دیگر این فصل آشنایی با کرومودینامیک کوانتومی (QCD)، آزادی مجانی و پدیده حبس رنگ است. لاگرانژی نظریه QCD را معرفی می کنیم و در نهایت در مورد تقارن کایرال توضیحاتی می دهیم.

۱-۱ درون اتم

با کشف الکترون به وسیله تامسون در سال ۱۸۹۷ فیزیک ذرات بنیادی متولد شد. تامسون می دانست که پرتوهای کاتدی را که از یک رشته داغ گسیل می شوند می توان با یک آهنربا منحرف کرد. این انحراف نشان می دهد پرتوها حامل بار الکتریکی اند، در واقع جهت خمیدگی ایجاب می کند که بار آن ها منفی باشد. بنابراین به نظر می رسد که آن ها اصلا پرتو نیستند بلکه جریانی از ذرات اند. با عبور آن ها از میدانهای الکتریکی و مغناطیسی عمود بر هم و تنظیم شدت میدان تا آنجا که انحراف خالص صفر شود، تامسون توانست سرعت ذرات و نسبت بار به جرمشان را تعیین کند. تامسون ذرات را ذره ریز و بار آن ها را الکترون نامید. به نظر می رسد که الکترون به راستی بنیادی است؛ اگر هم از خود ساختار درونی داشته باشد، هنوز آن را کشف نکرده ایم. اما هسته ی مرکزی از ذره های دیگری به نام های پروتون و نوترون ساخته شده است.

بار پروتون مثبت است؛ پروتون ها بار کل مثبت هسته را فراهم می کنند، هر چه تعداد پروتون های هسته بیشتر باشد بار هسته بیشتر است و در نتیجه، الکترون های بیشتری می توانند مانند ماهواره به دور آن بگردند و اتمی ساخته شود که بارهای منفی و مثبت آن با هم برابر و در کل بی بار است. اتم ساده ترین عنصر، هیدروژن، از یک پروتون و یک الکترون تشکیل شده است. تعداد پروتون های هسته چیزی است که یک عنصر را از دیگری متمایز می کند. یک خوشه ۶ پروتونی، هسته ی اتم کربن را می سازد. آهن ۲۶ و اورانیوم ۹۲ پروتون دارد.

به جز هیدروژن، هسته های اتمی همه ی عناصر دارای پروتون و نوترون اند. اساسا، نوترون گونه ای پروتون بدون بار الکتریکی است. همان اندازه را دارد و جرمش، با تقریب کسری از یک درصد، همان جرم پروتون است.

اگر نوترون و پروتون را هزار مرتبه بزرگ کنید می بینید که آن ها هم ساختار درونی پیچیده ای دارند. مثل یک گله زنبور که از دور چون نقطه ای سیاه به نظر می آید، ولی از نزدیک ابری پر جنب و جوش است؛ در تصویری با توان تفکیک کم، به لکه ی کوچکی می مانند. اما چون با میکروسکوپی با توان تفکیک زیاد دیده شوند، خوشه هایی هستند از ذرات کوچک تری به نام کوارک. الکترون ها و کوارک ها مانند حروف الفبای طبیعت اند؛ اجزای بنیادی که همه چیز را می توان از آن ها ساخت [۲].

۲-۱ کوارک ها و هادرون ها

کوارک ها دارای سه نوع (یا طعم) هستند. کوارک u حامل بار $2/3$ و شگفتی صفر، کوارک d حامل بار $1/3$ - و شگفتی صفر، کوارک s حامل بار $1/3$ - و شگفتی -1 است.^۱ برای هر کوارک (q) پاد کوارک (\bar{q}) با بار و شگفتی مخلف وجود دارد. بنا بر مدل کوارکی ارائه شده توسط گلمان، هادرون ها در واقع حالت های مقید کوارک ها می باشند و به صورت آزاد وجود دارند. هادرون ها دارای بار الکتریکی صحیح می باشند که به دو دسته باریونی و مزونی تقسیم می شوند.

۱. هر باریون از سه کوارک تشکیل شده است (و هر پاد باریون متشکل از سه پاد کوارک است).

۲. هر مزون مرکب از یک کوارک و یک پاد کوارک است.

با استفاده از این دو قاعده می توان ده تایی ی باریونی و هشت تایی ی مزونی را ساخت.

ترکیب های کوارک- پادکوارک جدول مزونی را می دهد.

جدول (۱-۱): چند مزون بطور نمونه با هم مقایسه شده اند [۱].

مزون	جرم (MeV)	عدد شگفتی
$\pi^+ (u\bar{d})$	139.47	0
$\pi^- (\bar{u}d)$	139.46	0
$\pi^0 (\bar{u}u)$	134.97	0
$K^+ (u\bar{s})$	493.677	+1
$D^+ (c\bar{d})$	1869.65	0

پاد مزون ها خود به خود در ابر چند تایی ی همانند مزون ها قرار می گیرند: $u\bar{d}$ پاد ذره $d\bar{u}$ است و بر عکس .

همین طور ترکیب سه کوارک جدول باریونی را می دهد.

¹ Up , Down , Strange

جدول (۲-۱): چند باریون بطور نمونه با هم مقایسه شده اند [۱].

باریون	جرم (MeV)	عدد شگفتی
$\Omega^- (sss)$	167245	-3
$\Lambda_c^+ (udc)$	228646	0
$\Sigma^+ (uus)$	118937	-1
$\Sigma^- (uds)$	119264	-1
$\Sigma^0 (dds)$	1197449	-1

بعد از کشف مزون Ψ در تابستان ۱۹۷۴ همه پذیرفتند که Ψ حالت مقیدی از کوارک جدید چهارم به نام C (افسون) و پاد کوارک آن است. بلافاصله کوارک پنجم b پا به میدان گذاشت و با کشف کوارک t ، اکنون شش طعم برای کوارک ها داریم که در سه نسل جای می گیرند، اما تلاش دانشمندان برای یافتن نسل چهارم ذرات هنوز در جریان است به این سه نسل در زیر اشاره می نماییم.

	اول	دوم	سوم
کوارک ها	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$
لپتون ها	$\begin{pmatrix} \bar{e} \\ \nu_e \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{\mu} \\ \nu_\mu \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{\tau} \\ \nu_\tau \end{pmatrix}$

در جدول (۳-۱) اندازه بار و جرم شش کوارک آورده شده است.

جدول (۳-۱): جرم و بار شش کوارک با هم مقایسه شده اند [۱].

نام	نشانه	جرم	بار (Q)
Up	u	2.49 MeV	$\frac{2}{3}$
Down	d	5.05 MeV	$-\frac{1}{3}$
Strange	s	101 MeV	$-\frac{1}{3}$
Charme	c	1.27 GeV	$\frac{2}{3}$
Top	t	1.72 GeV	$\frac{2}{3}$
Bottom	b	4.19 GeV	$-\frac{1}{3}$

یک ایراد نظری بر مدل کوآرکی وارد بود. به نظر می رسید که این مدل اصل طرد پائولی را نقض می کند. در فرمولبندی اولیه ی پائولی، اصل طرد اظهار می داشت که هیچ دو الکترونی نمی توانند یک حالت را اشغال کنند. به ویژه اصل طرد باید برای کوآرک ها نیز برقرار باشد که دارای اسپین ۱/۲ می باشند. برای مثال فرض می شود Δ^{++} از سه کوآرک یکسان u در یک حالت تشکیل شده باشد؛ به نظر می رسد این مورد (و همچنین Δ^- و Ω^-) با اصل پائولی ناسازگار باشد. در سال ۱۹۶۴، گرینبرگ راهی برای این معضل پیشنهاد کرد. او اظهار داشت کوآرک ها نه تنها در سه طعم (u, d, s) ظاهر می شود، بلکه می توانند یکی از سه رنگ (قرمز، آبی و سبز) را هم داشته باشند. برای ساختن یک باریون، به سادگی می توان یک کوآرک از هر رنگ را در نظر گرفت، پس دیگر u ها در Δ^{++} یکسان نیستند (یکی از آن ها قرمز، یکی آبی و دیگری سبز است) و مشکل حل می شود.

یک بردار ستونی c متشکل از سه جز که رنگ کوآرک ها را می دهد، به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ و قرمز} \qquad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ آبی} \qquad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ برای سبز}$$

لازم به ذکر است که واژه "رنگ" در اینجا هیچ ربطی به معنی لغوی معمول آن ندارد. قرمزی، آبی و سبزی فقط برچسب هایی برای نشان دادن سه ویژگی است که کوآرک ها علاوه بر بار و شگفتی دارند. یک کوآرک قرمز، حامل یک واحد قرمزی، صفر تا آبی و صفر تا سبزی است و پاد ذره آن حامل منهای یک واحد قرمزی و نظایر آن است. باید توجه کنیم که "ذرات در طبیعت بی رنگ اند"، که در قسمت پدیده حبس رنگ به طور کامل این موضوع را توضیح می دهیم.

۳-۱ نیروهای موجود در طبیعت

چهار نیروی بنیادی در طبیعت وجود دارد: قوی، الکترومغناطیسی، ضعیف و گرانشی. این نیروها در جدول (۴-۱) به ترتیب شدت نزولی فهرست بندی شده اند.

جدول (۴-۱): مقایسه قدرت نیروهای حاکم بر طبیعت را نشان می دهد [۳].

ذره واسطه	نظریه	شدت	نیرو
گلوئون	کرومودینامیک	10^0	قوی
فوتون	الکترومغناطیس	10^{-2}	الکترومغناطیسی
W و Z	الکتروضعیف	10^{-13}	ضعیف
گراویتون	گرانش	10^{-42}	گرانشی

برای هر یک از این نیروها یک نظریه وجود دارد. نظریه ی کلاسیک گرانی، قانون گرانش عمومی نیتون است. نظریه ی کوانتومی الکترودینامیک را توموگا، فایمن و شوئینگر در سال ۱۹۴۰ تکمیل کرده بودند. اولین نظریه ی نیروهای ضعیف را فرمی در سال ۱۹۳۳ ارائه کرد و لی و یانگ، فایمن، گلنمان و دیگران در دهه ی پنجاه آن را اصلاح کردند و سرانجام گلاشو، واینبرگ و سلام در دهه ی شصت آن را به شکل حاضر در آوردند. برای نیروهای قوی و رای کار پیشگامانه ی یوکاوا در ۱۹۳۴، تا ظهور فلیورودینامیک (نظریه واکنش های ضعیف را گاهی " فلیورودینامیک " می نامند) در نیمه ی دهه ی هفتاد، نظریه ای واقعی وجود نداشت.

هر یک از این نیروها با مبادله ی یک ذره رد و بدل می شوند. واسطه ی گرانش گراویتون نامیده می شود، نیروهای الکترومغناطیسی با فوتون، نیروهای قوی با گلوئون و نیروهای ضعیف با بوزون های برداری میانی Z و W و بدل می شوند. این واسطه ها نیرو را بین یک کوراک یا لپتون و دیگری منتقل می کنند.

۴-۱ گروه تقارنی $SU(3)$

گروه $SU(3)$ نقش مهمی را در زمینه ی واکنش های قوی بازی می کند. گروه $SU(3)$ را به صورت یک ماتریس 3×3 به نام U که یکانی و دارای دترمینال یک است را در نظر می گیریم. $(\det(U) = 1, UU^+ = 1)$

از لحاظ ریاضی $SU(3)$ یک پارامتر هشت تاییه دارد که به سادگی به گروه لی^۲ متصل می شود. به این معنی است که هر عنصر گروه را می توان توسط مجموعه ای از ۸ پارامتر مستقل که پارامترهای حقیقی هستند نشان داد $\Theta = (\Theta_1, \dots, \Theta_8)$.

$U(\Theta)$ در $SU(3)$ را به صورت تابع نمایی زیر تعریف می کنیم:

$$U(\Theta) = \exp\left(-i \sum_{a=1}^8 \Theta_a \frac{\lambda_a}{2}\right) \quad (1-1)$$

که در آن Θ_a عددهای حقیقی و λ_a ماتریس های هشت گانه گلنمان^۳ هستند که شرایط زیر بر آن حاکم است [۴]:

$$\frac{\lambda}{2} = i \frac{\partial U}{\partial \Theta_a} \quad (0, \dots, 0) \quad (2-1)$$

$$\lambda_a = \lambda_a^+ \quad (3-1)$$

$$Tr(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab} \quad (4-1)$$

$$Tr(\lambda_a) = 0 \quad (5-1)$$

ماتریس های گلنمان را به صورت زیر تعریف می کنیم:

² Lie Group

³ Gell-Mann matrix

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

جابجاگرهای ماتریس λ معرف " ثابت های ساختار " (f_{abc}) گروه $SU(3)$ هستند:

$$\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2} \right] = if_{abc} \frac{\lambda_c}{2} \quad (۶-۱)$$

ثابت‌های ساختار کاملاً پاد متقارن اند $f_{bac} = f_{acb} = -f_{abc}$. چون شاخص‌ها از ۱ تا ۸ تغییر می‌کنند، در کل $۸ \times ۸ = ۵۱۲$ ثابت ساختار وجود دارد، اما اغلب آن‌ها صفرند. یک مجموعه از ثابت‌ها را در جدول (۵-۱) آورده ایم و بقیه‌ی آن‌ها را می‌توان با توجه به شرط پاد متقارن بودن بدست آورد.

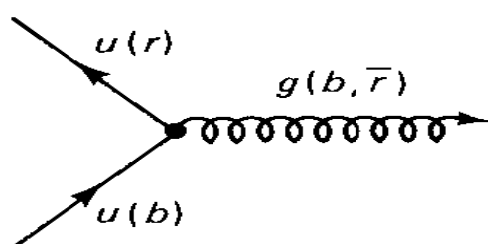
جدول (۵-۱): ثابت‌های ساختار گروه تقارنی $SU(3)$ [۴].

abc	123	147	156	246	257	345	367	458	678
f_{abc}	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$

۱-۵ کرومودینامیک کوانتومی (QCD)

در کرومودینامیک^۴، رنگ نقش بار را دارد و فرایند پایه کوارک \leftarrow کوارک + گلوئون است. نیروی بین دو کوارک با مبادله گلوئون^۵ "رد و بدل" می شود.

در کرومودینامیک سه نوع رنگ وجود دارد (قرمز، سبز و آبی) و در فرایند $q \rightarrow q + g$ رنگ کوارک می تواند تغییر کند. مثلاً یک کوارک بالای آبی به یک کوارک بالای قرمز تبدیل می شود. چون رنگ (مثل بار) همیشه پایسته است، باید این اختلاف رنگ را گلوئون حمل کند. در این مثال اختلاف رنگ برابر یک واحد آبی منهای یک واحد قرمز است.



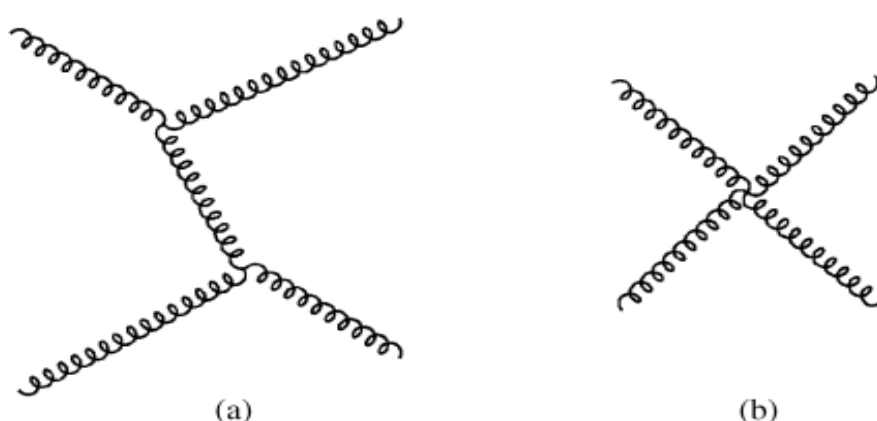
شکل (۱-۱): کوارک \leftarrow کوارک + گلوئون

پس گلوئون ها "دو رنگ" و حامل یک واحد رنگ مثبت و یک واحد رنگ منفی هستند.

چون گلوئون ها خودشان حامل رنگ هستند مستقیماً با بقیه ی گلوئون ها جفت می شوند. پس علاوه بر راس بنیادی گلوئون-کوارک، راس بنیادی گلوئون-گلوئون نیز وجود دارد. در واقع دو نوع راس سه گلوئونی و چهار گلوئونی داریم که در شکل (۱-۱) نشان داده شده است. این جفت شدگی مستقیم گلوئون-گلوئون نه تنها کرومودینامیک را بسیار پیچیده تر از الکتروودینامیک می کند، بلکه آن را غنی تر می سازد. برای مثال می توانیم گلوبال (حالت‌های مقیدی از گلوئون های بر هم کنش کننده که در آن هیچ کوارکی دیده نمی شود) داشته باشیم.

⁴ Quantum Chromo Dynamics (QCD)

⁵ Gluon



شکل (۲-۱): (a) گره سه گلوئونی و (b) گره چهار گلوئونی در نظریه کرومودینامیک.

تئوری QCD توصیف کننده بر هم کنش های قوی در مدل استاندارد است. یک نظریه کوانتومی است که به میزان زیادی با تجربه هم خوانی دارد. تقارن موجود در این تئوری $SU(3)_C$ می باشد و به همین دلیل نظریه QCD را تئوری پیمانه ای^۶ می گویند. میدان های موجود در آن کوارک ها هستند که دارای اسپین نیمه صحیح (فرمیون) می باشند. بوزون های پیمانه ای^۷ بدون جرم و بدون بار الکتریکی با اسپین یک به نام گلوئون نیرو را در بر هم کنش های قوی هدایت می کنند [۲].

۱-۵-۱ ویژگی های QCD

همانطور که در ابتدای فصل اشاره شد، کوارک ها حامل عدد کوانتومی رنگ هستند و چون رنگ مانند بار الکتریکی پایسته است لذا در بر هم کنش های قوی گلوئون ها هم می بایست حامل رنگ باشند. چون گلوئون ها بر خلاف فوتون ها حامل رنگ هستند پس می توانند با یکدیگر بر هم کنش کنند که در بخش قبلی به این نتیجه رسیدیم.

در ذرات بنیادی به هر رنگ یک عدد کوانتومی به نام Color charge نسبت می دهند. جدول (۱-۶) عدد مربوط به هر رنگ را نشان می دهد.

تنها حالت هایی در طیف هادرون ها به طور تجربی اتفاق می افتند که عدد کوانتومی مربوط به رنگ آن ها صفر باشد. ($I_3^c = Y^c = 0$) این همان پدیده حبس رنگ است. به طور تجربی به نظر می رسد که کوارک ها در بسته های بی رنگ دو تایی (مزون ها) و سه تایی (باریون ها و پاد باریون ها) محبوس اند.

⁶ Gauge Theory

⁷ Boson Gauge

جدول (۱-۶): Color charge مربوط به هر رنگ را نشان می دهد [۳].

	(a) Quarks		(b) Antiquarks		
	I_3^C	Y^C	I_3^C	Y^C	
r	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	\bar{r}	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
g	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	\bar{g}	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
b	0	$-\frac{2}{3}$	\bar{b}	0	$\frac{2}{3}$

با توجه به اینکه سه رنگ متفاوت برای کوارک ها وجود دارد می توان آنها را به صورت نه حالت نمایش داد. اما به موجب تقارن موجود $SU(3)_C$ می بایست ترکیب خطی از آنها در نظر گرفت که یک دسته هشت تایی ی رنگ را به قرار زیر می دهد:

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{b} + b\bar{r})$$

$$|2\rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}(r\bar{b} - b\bar{r})$$

$$|3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r} - b\bar{b})$$

$$|4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{g} + g\bar{r})$$

$$|5\rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}}(r\bar{g} - g\bar{r})$$

$$|6\rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}}(b\bar{g} + g\bar{b})$$

$$|7\rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}(b\bar{g} - g\bar{b})$$

$$|8\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(r\bar{r} + b\bar{b} - 2g\bar{g})$$

و یک تک تایی ی رنگ را تشکیل می دهند :

$$|9\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(r\bar{r} + b\bar{b} + g\bar{g})$$

آن دسته هشت تایی از نظر رنگ تک رنگ نیستند، بنابراین به صورت آزاد قابل آشکارسازی نمی باشند. زیرا همان طور که گفته شد تنها ترکیب هایی به طور تجربی وجود دارند که عدد مربوط به رنگ آن ها صفر باشد در واقع بی رنگ باشند. حالت $|9\rangle$ یک تک تایی ی رنگ است و اگر آن را به صورت یک واسطه در نظر بگیریم. باید به صورت یک ذره آزاد وجود داشته باشد افزون بر این می توانیم آن را بین دو تک تایی ی رنگ (مثلا یک پروتون و یک نوترون) مبادله و سبب پیدایش نیروی بلند برد با جفت شدگی قوی شود. در حالی که می دانیم نیروی قوی با برد کم وجود دارد و به این ترتیب می توانیم بگوییم در دنیای ما فقط هشت نوع گلوئون موجود می باشد.

به لحاظ تجربی ثابت جفت شدگی مربوط به نیروی قوی α_s ، از نیروی بین دو پروتون محاسبه می شود، بزرگتر از ۱ است. بزرگی این عدد مدتهاست که فیزیکدانان ذرات را آزار می دهد. زیرا به جای آنکه سهم نمودارهای پیچیده تر کمتر و کمتر شود،

بیشتر و بیشتر می شود. یکی از پیروزی های QCD کشف این مهم بود که در این نظریه عددی که نقش " ثابت " جفت شدگی را دارد، اصلا ثابت نیست، بلکه به فاصله بین ذرات بر هم کنش کننده بستگی دارد. در فاصله های نسبتا بزرگ مشخصه ی فیزیک هسته ای، این عدد بزرگ است و در فاصله های کوتاه (کمتر از اندازه ی پروتون) کاملا کوچک می شود. به این رفتار α در فواصل کم آزادی مجانبی^۸ گفته می شود.

همان طور که گفته شد، دیاگرام ها در QCD علاوه بر داشتن گره های کوآرک-کوآرک-گلوئون (که خود به افزایش قدرت جفتیدگی در فواصل کوتاه می انجامد) دارای گره های گلوئون-گلوئون-گلوئون (که باعث کاهش قدرت جفتیدگی در فواصل کوتاه می شود) می باشد که در شکل (۳-۱) نمایش داده شده است.



شکل (۳-۱): گره های گلوئون-گلوئون-گلوئون

لذا رقابتی میان این دیاگرام ها وجود دارد و برنده شدن در این رقابت به شمار نسبی رنگ و طعم بستگی دارد. در این میان پارامتر بحرانی a را تعریف می کنیم.

$$a \equiv 2f - 11n \quad (۷-۱)$$

اگر این عدد مثبت باشد، اثر جفت شدگی در فاصله های کوتاه افزایش می یابد و اگر منفی باشد جفت شدگی کم می شود. در مدل استاندارد $n=3, f=6, a = -21$ می شود پس جفت شدگی QCD در فاصله های کوتاه کاهش می یابد. (منظور از f طعم و n رنگ است) به طور کیفی، این منشا آزادی مجانبی است [۲].

⁸ Asymptotic Freedom

۶-۱ لاگرانژی نظریه QCD

ابتدا به لاگرانژی نظریه QED (الکترودینامیک کوانتومی) اشاره می‌کنیم و آن را با نظریه QCD مقایسه می‌کنیم.

لاگرانژی برای الکترون آزاد در الکترودینامیک کوانتومی (QED) به صورت زیر است:

$$\Psi \rightarrow \exp(-i\Theta)\Psi \quad : \quad L_{eff} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi \rightarrow L_{eff} \quad (۸-۱)$$

پارامتر $0 \leq \Theta \leq 2\pi$ است. (از تقارن سراسری $U(1)$ برای توصیف لاگرانژی استفاده شده است).

لاگرانژی بالا را با استفاده از یک میدان برداری A_μ به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$L_{QED} = \bar{\Psi} [i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) - m] \Psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (۹-۱)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (۱۰-۱)$$

که A_μ میدانی جدید (موسوم به میدان پیمانه ای) است که تحت تبدیل های پیمانه ای به صورت زیر تبدیل می شود:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \Theta \quad (۱۱-۱)$$

مشتق هموردا^۹ را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$D_\mu \Psi \equiv (\partial_\mu - ieA_\mu) \Psi \quad (۱۲-۱)$$

$$\Psi(x) \rightarrow \exp[-i\Theta(x)] \Psi(x) \quad (۱۳-۱)$$

تبدیل پیمانه ای مشتق هموردا به صورت زیر می شود:

$$D_\mu \Psi(x) \rightarrow \exp[-i\Theta(x)] D_\mu \Psi(x) \quad (۱۴-۱)$$

که این نشان می‌دهد لاگرانژی تحت تبدیلات پیمانه ای ناورد است.

در QCD با $SU(3)$ رنگ سرو کار داریم و میدان های بنیادی کوآرک هایی با اسپین ۱/۲ هستند. پس با استفاده از این قاعده لاگرانژی در QCD به صورت زیر می شود [۵]:

$$L_{QCD} = \sum_{\substack{f=u,d,s \\ c,b,t}} \bar{q}_f (iD - m_f) q_f - \frac{1}{4} G_{\mu\nu,a} G_a^{\mu\nu} \quad (۱۵-۱)$$

جمله اول لاگرانژی دینامیک کوآرک ها را نشان می‌دهد و جمله دوم دینامیک بوزون های پیمانه ای را نشان می‌دهد. برای هر کوآرک طعم f ، کوآرک میدان q_f شامل سه رنگ (قرمز، سبز و آبی) است.

^۹covariant derivative

$$q_f = \begin{pmatrix} q_{f,r} \\ q_{f,g} \\ q_{f,b} \end{pmatrix} \quad (۱۶-۱)$$

لذا لاگرانژی ارائه شده در QCD تحت این تقارن ناورد است. تقارن یاد شده در واقع تقارن $SU(3)$ در فضای رنگ است یعنی برای هر کوآرک طعم می توانیم چرخش را روی سه رنگ در نظر بگیریم.

۱-۶-۱ کوآرک های سبک و سنگین

شش کوآرک طعم معمولاً به دو گروه سبک u, d, s و سنگین c, b, t تقسیم می شوند. که این دسته بندی بر اساس جرم آن ها صورت گرفته:

$$\begin{pmatrix} m = 0.005 \text{Gev} \\ m = 0.009 \text{Gev} \\ m = 0.175 \text{Gev} \end{pmatrix} \leq 1 \text{Gev} \leq \begin{pmatrix} m_c = (1.15 - 1.35) \text{Gev} \\ m_b = (4.0 - 1.4) \text{Gev} \\ m_t = 174 \text{Gev} \end{pmatrix} \quad (۱۷-۱)$$

جرم کوآرک های سبک^{۱۰} را $m_u, m_d, m_s \rightarrow 0$ تقریباً صفر در نظر می گیریم. لاگرانژی QCD در حد کایرال عبارت است از:

$$L_{QCD}^0 = \sum_{l=u,d,s} \bar{q}_l (iD) q_l - \frac{1}{4} G_{\mu\nu,a} G_a^{\mu\nu} \quad (۱۸-۱)$$

که یک شروع خوب برای بحث در انرژی های پایین در QCD است. اگر به رابطه بالا توجه کنید تقارن طعم هم در آن دیده می شود زیرا روی طعم های کوآرک جمع بسته شده است.

۷-۱ تقارن کایرال $SU(3)_L \times SU(3)_R$ در لاگرانژی QCD

قبل از اینکه تقارن کایرال را توضیح دهیم با مفهوم چپ گردی و راست گردی آشنا می شویم؛ عملگر هلسیتی را به این صورت می نویسیم:

$$h = \frac{1}{2} \sigma \cdot \hat{p} \quad (۱۹-۱)$$

اگر اسپین و سرعت در یک جهت باشند هلسیتی +۱ و راستگرد، اگر در خلاف جهت یگدیگر باشند هلسیتی -۱ و چپگرد است. که در شکل (۴-۱) نمایش داده شده است.

¹⁰ Light quark



شکل (۴-۱): (a) راست‌گردی، (b) چپ‌گردی

عملگر چپ‌گردی و راست‌گردی را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$p_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \quad p_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \quad (۲۰-۱)$$

و $\gamma_5^2 = 1, \gamma_5 = \gamma^5 = i\lambda^0\lambda^1\lambda^2\lambda^3$ ماتریس کایرالیته است.

میدان کوارک تشکیل شده است از دو کوارک چپ و راست:

$$q = \begin{pmatrix} q_L \\ q_R \end{pmatrix} \quad q_R = p_R q \quad , \quad q_L = p_L q \quad (۲۱-۱)$$

با استفاده از رابطه (۲۰-۱) و (۲۱-۱) می‌توان لاگرانژی (۱۸-۱) را به صورت زیر نوشت

$$L_{QCD}^0 = \sum_{l=u,d,s} (\bar{q}_{R,l} i \not{D} q_{R,l} + \bar{q}_{L,l} i \not{D} q_{L,l}) - \frac{1}{4} G_{\mu\nu,a} G_a^{\mu\nu} \quad (۲۳-۱)$$

اگر در لاگرانژی بر هم کنش‌های بوزون‌های پیمانه‌ای را در نظر نگیریم جمله دوم لاگرانژی حذف می‌گردد و می‌توان فقط جمله اول را برای لاگرانژی در نظر بگیریم.

$$L_{QCD}^0 = \sum_{l=u,d,s} (\bar{q}_{R,l} i \not{D} q_{R,l} + \bar{q}_{L,l} i \not{D} q_{L,l}) \quad (۲۴-۱)$$

تبدیلات زیر را در نظر بگیرید:

$$q_R \rightarrow U q_R \rightarrow e^{i\Theta_R} q_R \quad , \quad q_L \rightarrow U q_L \rightarrow e^{i\Theta_L} q_L \quad (۲۵-۱)$$

تحت تبدیلات (۲۵-۱) لاگرانژی (۲۴-۱) ناورد است. این همان تقارن کایرال است، که به صورت $SU(3)_L \times SU(3)_R$ نمایش می‌دهیم. وقتی تقارن محوری^{۱۱} به صورت خود به خودی شکسته شود، $[SU(3)_L \times SU(3)_R \rightarrow SU(3)_V]$ در این صورت انتظار داریم هشت گلدستون بوزون بدون جرم ایجاد گردد اما در واقعیت این گلدستون بوزون‌ها دارای جرم می‌باشند.

^{۱۱} Axial Symmetry

باشند و این به دلیل تقارن تقریبی اولیه است چون ما در ابتدا جرم کوآرک ها را صفر در نظر گرفتیم در حالی که در واقعیت این ذرات دارای جرم می باشند. پس تقارن کایرال اولیه یک تقارن تقریبی است و صد در صد نمی باشد [۶].

حال اگر جرم کوآرک ها را صفر در نظر نگیریم، ماتریس جرم را می توانیم به این صورت تعریف کنیم:

$$M = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix} = \frac{m_u + m_d + m_s}{\sqrt{6}} \lambda_0 + \frac{1}{2} \frac{(m_u + m_d) - m_s}{\sqrt{6}} \lambda_8 + \frac{m_u - m_d}{2} \lambda_3 \quad (26-1)$$

لاگرانژی جرم که قسمت دوم معادله (۱-۱۵) هست را می توان بر حسب کوآرک های چپ و راست نوشت:

$$L_M = \bar{q} M q = -(\bar{q}_R M q_L + \bar{q}_L M q_R) \quad (27-1)$$

که با در نظر گرفتن جرم کوآرک ها این تقارن به صورت صریح شکسته می شود و تحت تبدیلات (۱-۲۵) دیگر ناوردا نیست. نامبو^{۱۲} اولین بار شکست خود به خودی تقارن کایرال را در مباحث مربوط به ابررسانایی ارائه داد و از این طریق توانست مشکلات پیش آمده در آن مباحث را رفع نماید. که به سبب این فعالیت جایزه نوبل سال ۲۰۰۸ را از آن خود نماید [۷].

¹² Yoichiro Nambu

فصل دوم

نظریه اختلالی کایرال (ChPT)^۱

مقدمه

در این فصل با توجه به تقارن های اشاره شده در فصل قبل، نظریه ای ارائه می دهیم که علاوه بر دارا بودن تقارن مورد نظر بتواند روشی اختلالی برای حل مسائل فصل سوم ارائه دهد. در این فصل ابتدا با کلیات نظریه و سپس با مفاهیم فیزیکی کمیت های استفاده شده در آن آشنا می شویم.

۱-۲ نظریه اختلالی کایرال

در انرژی های بالا و یا فاصله های کوتاه از نظریه پیمانه ای QCD استفاده می کنیم. در انرژی های پایین و یا فاصله های زیاد مشکل است که نتایج تجربی را از QCD استخراج کنیم. نظریه اختلالی کایرال (ChPT)، یک نظریه میدان موثر^۲ است. در واقع این نظریه به عنوان یک نظریه میدان موثر برای نظریه کرومودینامیک است و یک روش سیستماتیک برای محاسبه مشاهده پذیرها در انرژی های پایین می باشد. این نظریه در ابتدا توسط واینبرگ ارائه شده بود [۱۰]. بعد گسر^۳ و لوتویلر^۴ به صورت اصولی نظریه را گسترش دادند.

این نظریه برای لاگرانژی، تقارن کایرال (راست و چپ) را در نظر می گیرد، همان طور که در فصل اول اشاره شد در محدوده انرژی ۱ GeV می توان از جرم کوارکهای سبک (u,d,s) در لاگرانژی کرومودینامیک صرف نظر کرد و تقارن کایرال را برای این لاگرانژی در نظر گرفت. پس ما در پی لاگرانژی موثری هستیم که دارای تقارن $SU(3)_L \times SU(3)_R$ باشد.

¹ Chiral Perturbation Theory

² Effective field theory

³ Gasser

⁴ Leutwyler

در انرژی های پایین فقط اعضای هشت تایی (π, k, η) را داریم که وابسته هستند به گلدستون بوزون هایی که از شکست خود به خودی تقارن کایرال به وجود آمده اند. هدف ما ساختن یک نظریه میدان مؤثر برای توصیف دینامیک این گلدستون بوزون هاست [۸].

۲-۲ لاگرانژی مؤثر کایرال

در چارچوب نظریه اختلالی مزونی کایرال، به طور کلی لاگرانژی از گلدستون بوزون ها به عنوان میدان های دینامیکی سازماندهی شده است و به صورت یک رشته از جمله هایی که تعداد مشتقات و جمله های جرم کوارکی در آن افزایش پیدا می کند.

لاگرانژی مؤثر به صورت رشته زیر در نظر گرفته می شود:

$$L_{eff} = L_2 + L_4 + L_6 + \dots \quad (۱-۲)$$

که زیر نویس ها در رابطه بالا به مرتبه اندازه حرکت و بسط جرم کوارکی اشاره دارد. برای مثال شاخص ۲، به دو مشتق یا یک جمله جرم کوارکی اشاره دارد. L_2 و L_4 در واقع جملاتی هستند که مرتبه کایرال آن ها $O(p^2)$ و $O(p^4)$ می باشد که متناظر با تعداد مشتقات و جملات جرم کوارکی است. مرتبه کایرال در بخش های مزونی همیشه به صورت توان زوج از تکانه $O(p^{2n})$ می باشد زیرا سهم جملات فرد به خاطر وجود جملات همیوگ بار صفر می شود پس فقط جملات زوج را برای لاگرانژی در نظر می گیریم.

پایین ترین مرتبه، $O(p^2)$ ، مطابق است با دیاگرام های درختی با ورتکس L_2 ، مرتبه بعدی $O(p^4)$ یا NLO، اشاره دارد به دیاگرام های درختی با ورتکس L_4 یا نمودارهای یک حلقه با ورتکس L_2 ، و به همین ترتیب مرتبه های دیگر. ما در این تز تا تصحیحات مرتبه $O(p^4)$ پیش می رویم [۸].

۱-۲-۲ لاگرانژی مؤثر در پایین ترین مرتبه

همان طور که در فصل اول اشاره شد لاگرانژی کرومودینامیک در فضای $SU(3)$ می باشد، برای همین منظور ماتریس های سازنده لاگرانژی می بایست در این فضا باشند. ما می خواهیم لاگرانژی مؤثر در حد کایرال را بنویسیم، که تحت انتقال سراسری $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ ناوردا باشد. تابع نمایی $U(x)$ در $SU(3)$ را به صورت زیر می نویسیم:

$$U(x) = \exp\left(i \frac{\Phi(x)}{F_0}\right) \quad (۱-۲)$$

$$\Phi(x) = \sum_{a=1}^8 \lambda_a \Phi_a(x) \equiv \begin{pmatrix} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}k^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta & \sqrt{2}k^0 \\ \sqrt{2}k^- & \sqrt{2}k^0 & \frac{-2}{\sqrt{3}}\eta \end{pmatrix} \quad (۲-۲)$$

$$\Phi_a(x) = \frac{1}{2} Tr(\lambda_a \Phi(x)) \quad (۳-۲)$$

چگالی لاگرانژی مؤثر با کمترین تعداد مشتق را به صورت زیر در نظر می‌گیریم (از پایین ترین مرتبه شروع می‌کنیم):

$$L_{eff} = \frac{F_0^2}{4} Tr(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) \quad (۴-۲)$$

$F_0 = 93 MeV$ یک پارامتر آزاد است که به واپاشی پایون $\mu^+ \rightarrow \pi^+ \nu_\mu$ مربوط می‌شود (ثابت واپاشی است).

لاگرانژی می‌بایست نسبت به تقارن $SU(3)_L \times SU(3)_R$ ناوردا باشد زیرا تئوری اختلالی کایرال، لاگرانژی مؤثری را در نظر می‌گیرد که دارای تقارن کایرال باشد. برای اثبات این ناوردایی، ابتدا گروه‌های زیردر نظر می‌گیریم.

$$G = SU(N) \times SU(N) = \{(L, R) \mid L \in SU(N), R \in SU(N)\} \quad (۵-۲)$$

$$\tilde{g} = (\tilde{L}, \tilde{R}) \in G \quad (۶-۲)$$

$$H = \{(V, V) \mid V \in SU(N)\} \quad (۷-۲)$$

با در نظر گرفتن دو رابطه بالا می‌توان رابطه (۸-۲) را تعریف کرد.

(۸-۲)

$$\tilde{g}H = \{(\tilde{L}V, \tilde{R}V) \mid V \in SU(N)\}$$

اگر رابطه زیر را در نظر بگیریم می‌توانیم $\tilde{g}H$ را به شکل رابطه (۹-۲) بنویسیم.

$$(\tilde{L}V, \tilde{R}V) = (\tilde{L}V, \tilde{R}\tilde{L}^+\tilde{L}V) = (1, \tilde{R}\tilde{L}^+)(\tilde{L}V, \tilde{L}V)$$

$$\tilde{g}H = (1, \tilde{R}\tilde{L}^+)H \quad (۹-۲)$$

$\tilde{g}H$ را تحت g انتقال می‌دهیم.

$$g\tilde{g}H = (L, R\tilde{R}\tilde{L}^+)H = (1, R\tilde{R}\tilde{L}^+L^+)(L, L)H = (1, R(\tilde{R}\tilde{L}^+)L^+) \quad (۱۰-۲)$$

تابع $U(x)$ در $SU(N)$ را به صورت $U = \tilde{R}\tilde{L}^+$ می‌نویسیم، با استفاده از رابطه (۹-۲) و (۱۰-۲)، U را تحت g انتقال می‌دهیم:

$$U = \tilde{R}\tilde{L}^+ \rightarrow U' = R(\tilde{R}\tilde{L}^+)L^+ = RUL^+ \quad (۱۱-۲)$$

در نهایت روابط زیر را با کمک رابطه (۱۱-۲) می نویسیم:

$$U \rightarrow RUL^+$$

$$\partial_\mu U \rightarrow \partial_\mu (RUL^+) = \partial_\mu RUL^+ + R\partial_\mu UL^+ + RU\partial_\mu L^+ = R\partial_\mu UL^+$$

$$U^+ \rightarrow LU^+R^+$$

$$\partial_\mu U^+ \rightarrow L\partial_\mu U^+R^+$$

با استفاده از روابط بالا لاگرانژی را تحت g انتقال می دهیم و ثابت می کنیم که نسبت به تقارن کایرال ناورد است.

$$L_{eff} \rightarrow \frac{F^2}{4} Tr(R\partial_\mu UL^+L\partial_\mu U^+R^+) = \frac{F^2}{4} Tr(R^+R\partial_\mu U\partial^\mu U^+) = L_{eff} \quad (۱۲-۲)$$

در معادله بالا از ویژگی رد^۵ استفاده کردیم $Tr(AB) = Tr(BA)$. چون عدد باریونی گلدستون بوزون ها صفر است تحت انتقال سراسری $U(1)_V$ ، $\Phi \rightarrow \Phi$ و در نتیجه $U \rightarrow U$ تبدیل می کند و لاگرانژی تحت این انتقال نیز همیشه ناورد است.

هدف از آوردن ضریب $\frac{F_0^2}{4}$ در لاگرانژی رسیدن به جمله استاندارد جنبشی، $\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi_a \partial^\mu \Phi_a$ است که برای به دست آوردن آن تابع نمایی را بسط می دهیم.

$$U = 1 + i \frac{\Phi}{F} + \dots$$

$$\partial_\mu U = i \frac{\partial_\mu \Phi}{F} + \dots$$

در نتیجه لاگرانژی (۲-۴) به صورت زیر می شود:

$$\begin{aligned} L_{eff} &= \frac{F^2}{4} Tr \left[\frac{i\partial_\mu \Phi}{F} \left(-\frac{i\partial^\mu \Phi}{F} \right) \right] + \dots = \frac{1}{4} Tr(\lambda_a \partial_\mu \Phi_a \lambda_b \partial^\mu \Phi_b) + \dots \\ &= \frac{1}{4} \partial_\mu \Phi_a \partial^\mu \Phi_b Tr(\lambda_a \lambda_b) + \dots = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi_a \partial^\mu \Phi_a + L_{int} \end{aligned} \quad (۱۳-۲)$$

که از رابطه $Tr(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab}$ استفاده کردیم. هشت میدان Φ_a وابسته است به هشت ذره بدون جرم موسوم به گلدستون بوزون ها.

می توان عملگر رد را در پایین ترین مرتبه به صورت دیگری هم نوشت:

$$Tr[(\partial_\mu \partial^\mu U)U^+] = \partial_\mu [Tr(\partial^\mu U U^+)] - Tr(\partial_\mu U \partial^\mu U^+) \quad (۱۴-۲)$$

⁵ Trace

جمله اول $Tr(\partial^\mu U U^+)$ صفر می شود. برای اثبات، عبارت داخل پراتنز تابع نمایی (۲-۱) را φ نام گذاری می کنیم و تابع نمایی را بسط می دهیم:

$$U = 1 + i\varphi + \frac{1}{2}(i\varphi)^2 + \frac{1}{3!}(i\varphi)^3 + \dots$$

از رابطه بالا مشتق می گیریم:

$$\partial_\mu U = i\partial_\mu \Phi + \frac{1}{2}(i\partial_\mu \varphi i\varphi + i\varphi i\partial_\mu \varphi) + \frac{1}{3!}[i\partial_\mu \varphi (i\varphi)^2 + i\varphi i\partial_\mu \varphi i\varphi + (i\varphi)^2 \partial_\mu \varphi] + \dots$$

و در نهایت می شود:

$$\begin{aligned} Tr(\partial^\mu U U^+) &= Tr[i\partial_\mu \varphi U^+ + \frac{1}{2}(i\partial_\mu \varphi i\varphi + i\varphi i\partial_\mu \varphi) U^+ + \dots] \\ &= Tr[i\partial_\mu \varphi U^+ + i\partial_\mu \varphi i\varphi U^+ + \frac{1}{2}i\partial_\mu \varphi (i\varphi)^2 U^+ + \dots] \\ &= Tr(i\partial_\mu \varphi U U^+) = Tr(i\partial_\mu \varphi) = i\partial_\mu \varphi_a Tr(\lambda_a) = 0 \end{aligned}$$

پس به دلایلی مشابه سهم بسیاری از جملات صفر می گردد و در نهایت لاگرانژی مؤثر به صورت معادله (۲-۴) می گردد.

یک روش تست لاگرانژی، استفاده از زوج یا فرد بودن پارامتر ذاتی است. میدان های گلدستون بوزون ها و تابع نمایی تحت پارامتر به شکل زیر تبدیل می شوند.

$$\Phi_a(\vec{x}, t) \xrightarrow{P} -\Phi_a(-\vec{x}, t) \quad \text{و} \quad U(\vec{x}, t) \xrightarrow{P} U^+(-\vec{x}, t)$$

اگر این تغییرات را در لاگرانژی اعمال کنیم لاگرانژی تحت پارامتر زوج می شود [۴].

۲-۲-۲ جمله جرمی در لاگرانژی

هنگامی که تقارن کایرال بصورت صحیح شکسته می شود گلدستون بوزون های کم جرم به وجود می آید. در قسمت ۱-۶ دیدیم که لاگرانژی جرم را می توان به صورت زیر نوشت که نشان دهنده شکست تقارن است:

$$L_M = \bar{q} M q = -(\bar{q}_R M q_L + \bar{q}_L M q_R) \quad (۱۵-۲)$$

$$M = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix} \quad (۱۶-۲)$$

برای اینکه معادله (۲-۱۵) را با چارچوب لاگرانژی مؤثر ترکیب کنیم، باید لاگرانژی تحت انتقال سراسری $G = SU(3)_L \times SU(3)_R$ ناوردا باشد. M تحت انتقال به صورت زیر تبدیل می شود:

$$M \rightarrow RML^+ \quad (۱۷-۲)$$

لاگرانژی را به صورت $L(U, M)$ در نظر می گیریم که تحت انتقال سراسری G ناورداست. در پایین ترین مرتبه لاگرانژی به صورت زیر می شود:

$$L_{s.b} = \frac{F_0^2 B_0}{2} Tr(MU^+ + UM^+) \quad (۱۸-۲)$$

زیر نویس s.b به شکست تقارن^۶ اشاره دارد. برای اینکه پارامتر جدید B_0 را معرفی کنیم، به چگالی انرژی در حالت پایه توجه کنید.

$$\langle L_{eff} \rangle = -F^2 B_0 (m_u + m_d + m_s) \quad (۱۹-۲)$$

اگر جرم سه نوع کوارک Up, Down, Strang را برابر در نظر بگیریم در این صورت عبارت بالا برابر معادله (۲-۲۰) می گردد.

$$(۲۰-۲)$$

$$\langle L_{eff} \rangle = -3F_0^2 B_0$$

با توجه به (۲-۲۰) دیمانسیون B_0 از نوع انرژی است. به همان ترتیب که قبلا اشاره شده می دانیم که در محاسبات فیزیک ذرات جرم، انرژی و اندازه حرکت دارای یک دیمانسیون می باشند.

$$\left. \frac{\partial \langle 0 | L_{QCD} | 0 \rangle}{\partial m_q} \right|_{m_u=m_d=m_s} = \frac{1}{3} \langle 0 | q\bar{q} | 0 \rangle = \frac{1}{3} \langle q\bar{q} \rangle \quad (۲۱-۲)$$

$$\langle q\bar{q} \rangle = \langle u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s} \rangle \neq 0$$

است. با استفاده از معادله (۲-۲۰) و (۲۱-۲) معادله زیر بدست می آید [۹]:

$$3F_0^2 B_0 = - \langle q\bar{q} \rangle \quad (۲۲-۲)$$

برای اینکه جرم گلدستون بوزون ها را تعیین کنیم، جمله های مرتبه دوم میدان ها را در لاگرانژی $L_{s.b}$ در نظر می گیریم:

$$L_{s.b} = -\frac{B_0}{2} Tr(\Phi^2 M) + \dots \quad (۲۳-۲)$$

در نهایت با استفاده از معادله (۲-۱) و (۲-۲) رابطه زیر را داریم:

$$Tr(\Phi^2 M) = 2(m_u + m_d) \pi^+ \pi^- + 2(m_u + m_s) k^+ k^- + 2(m_d + m_s) k^0 \bar{k}^0 + (m_u + m_d) \pi^0 \pi^0$$

⁶ Symmetry breaking