دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

رده‌بندی گروه‌های متناهی
با زیرگروه‌های آبلی TI (یا QTI)

استاد راهنما

دکتر حمید موسوی

استاد مشاور

دکتر علیرضا مددی

پژوهشگر

زهرا رضازاده رحیم آبادی

خرداد ۸۹

نام خانوادگی: رضازاده رحیم آبادی نام: زهرا

عنوان پایان‌نامه: رده‌بندی گروه‌های متناهی با زیرگروه‌های آبلی TI (یا QTI)

استاد راهنما: دکتر حمید موسوی
استاد مشاور: دکتر علیرضا مددی

درجه: کارشناسی ارشد دانشکده: علوم ریاضی گرایش: جبر

دانشگاه: تبریز تاریخ فارغ‌التحصیلی: خرداد ۸۹ تعداد صفحات: ۹۷

کلمات کلیدی: p-گروه‌ها، TI-گروه‌ها، ATI-گروه‌ها، $AQTI$-گروه‌ها

چکیده

زیرگروه H از گروه متناهی G را TI-زیرگروه نامیم هرگاه به ازای هر $g \in G$، $H \cap H^g = H$ یا $H \cap H^g = 1$ باشد. همچنین زیرگروه H را QTI-زیرگروه نامیم هرگاه به ازای هر $x \in H$ $(\neq 1)$، $\mathcal{C}_G(x) \leq \mathcal{N}_G(H)$. گروه متناهی G را TI یا QTI-گروه نامیم هرگاه هر زیرگروه آن TI یا QTI باشد. همچنین گروه G را ATI یا $AQTI$ نامیم هرگاه هر زیرگروه آبلی آن TI یا QTI-زیرگروه باشد. هدف ما در این پایان‌نامه مطالعه‌ی TI، ATI و $AQTI$-گروه‌های متناهی و همچنین دسته‌بندی کاملی از آنها است.

فهرست مطالب

مقدمه

زیرگروه‌های آبلی از یک گروه اطلاعات زیادی در خصوص ساختار گروه بدست می‌دهند. به طور مثال زاسنهاوس در سال ۱۹۵۲ نشان داد که گروه G آبلی است اگروتنهااگر به ازای هر زیرگروه آبلی A از G داشته باشیم، $\mathcal{C}_G(A) \leq \mathcal{N}_G(A)$.
همچنین شیرانگ لی در سال ۲۰۰۱ گروه‌هایی مانند G که هر زیرگروه آبلی آن مانند A که در شرط، $\mathcal{C}_G(A) = A$ یا $\mathcal{C}_G(A) \leq \mathcal{N}_G(A)$، صدق می‌کنند را رده‌بندی کرده است.

یک موضوع بسیار جالب در رده‌بندی گروه‌های متناهی، رده‌بندی گروه‌هایی است که زیرگروه‌های آن TI یا ATI می‌باشند، یعنی مقطع هر زیرگروه (یا زیرگروه آبلی) آن با مزدوج‌هایش، بدیهی یا همان زیرگروه باشد. والز در سال ۱۹۷۹ گروه‌های متناهی که تمام زیرگروه‌های آن TI هستند و شیرانگ لی در سال ۲۰۰۰ گروه‌های متناهی غیرپوچتوان که زیرگروه‌های ماکسیمال دوم آنها TI هستند را رده‌بندی کردند.

یک زیرگروه را QTI نامیم هرگاه مرکزساز هر عضو نابدیهی آن مشمول نرمال‌ساز آن باشد. متناظراً گروه G را QTI ($AQTI$) نامیم هرگاه هر زیرگروه (زیرگروه آبلی) آن QTI باشد.

این پایان‌نامه از پنج فصل تشکیل گردیده است. در فصل اول تعاریف، لم‌ها و قضایایی که در اثبات احکام فصول بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند، آورده شده است. فصل دوم به بررسی TI- گروه‌های متناهی اختصاص دارد. در فصل‌های سوم و چهارم به ترتیب ATI، p- گروه‌های متناهی و ATI- گروه‌های متناهی را مورد مطالعه قرار داده و یک رده‌بندی از این گروه‌ها ارائه می‌دهیم و در نهایت در فصل پنجم به بررسی $AQTI$- گروه‌های متناهی می‌پردازیم.
این پایان‌نامه مبتنی بر منابع ۵، ۱۰، ۱۱ و ۱۵ می‌باشد.

فصل ۱
تعاریف، لم‌ها و قضایای مقدماتی

۱.۱ مفاهیم مقدماتی نظریه‌ی گروه‌ها

قضیه ۱.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه و H ، K دو زیرگروه از آن باشند به طوری که $H \trianglelefteq G$ و $K\ ch\ H$. در این صورت $K \trianglelefteq G$.*

برهان. به [۴]، قضیه ۲.۱.۲ رجوع شود. □

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه و X زیرمجموعه‌ای غیرتهی از آن باشد. در این صورت اشتراک تمام زیرگروه‌های نرمال شامل X را بستار نرمال X نامیم و با $\bar{X}$ نشان می‌دهیم. همچنین زیرگروه نرمال تولید شده توسط تمام زیرگروه‌های نرمال G که مشمول در Xاند را مغز X نامیم و با $Core_G(X)$ نشان می‌دهیم.

فرض کنیم G یک گروه باشد، $X \subseteq G$ و $H \leq G$. در این صورت $\bar{X}$ برابر است با زیرگروه تولید شده توسط $\{g^{-1}xg | x \in X, g \in G\}$ و $Core_G(H) = \bigcap_{g \in G} H^g$.

قضیه ۳.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه باشد و $H, K \leq G$. در این صورت داریم:*

(i) $H \trianglelefteq K$ اگروتنهااگر $H \leq K \leq \mathcal{N}_G(H)$ ، به عبارت دیگر $\mathcal{N}_G(H)$ بزرگترین زیرگروه G است که H در آن نرمال است. بالاخص $H \trianglelefteq G$ اگروتنهااگر $G = \mathcal{N}_G(H)$؛

(*ii*) اگر $H \leq K$ آنگاه $\mathcal{N}_K(H) = \mathcal{N}_G(H) \cap K$؛

(*iii*) $\mathcal{N}_G(H) \cap \mathcal{N}_G(K) \leq \mathcal{N}_G(H \cap K)$؛

(*iv*) اگر $x \in G$ آنگاه $\mathcal{N}_G(H^x) = \mathcal{N}_G(H)^x$؛

(*v*) اگر $H \leq \mathcal{N}_G(K)$ آنگاه $HK \leq G$؛

(*vi*) اگر $H \leq K$ آنگاه $\mathcal{C}_K(H) = \mathcal{C}_G(H) \cap K$؛

(*vii*) $\mathcal{C}_G(H) \cap \mathcal{C}_G(K) \leq \mathcal{C}_G(H \cap K)$؛

(*viii*) H آبلی است اگر و تنها اگر $H \leq \mathcal{C}_G(H)$.

برهان. به [۱۷]، قضایای ۴.۳.۲ و ۵.۳.۲ رجوع شود. □

قضیه ۴.۱.۱ (نرمال‌ساز-مرکزساز). *فرض کنیم G یک گروه باشد و $H \leq G$. در این صورت*

(*i*) $\mathcal{C}_G(H) \trianglelefteq \mathcal{N}_G(H)$؛

(*ii*) *گروه $\mathcal{N}_G(H)/\mathcal{C}_G(H)$ با زیرگروهی از $Aut(H)$ یکریخت است.*

برهان. به [۱۷]، قضیه ۶.۳.۲ رجوع شود. □

قضیه ۵.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. در این صورت*

$$G/Z(G) \ncong Q_8.$$

برهان. فرض کنیم $Z = Z(G)$ و $G/Z \cong Q_8$. چون Q_8 دارای دو زیرگروه ماکسیمال دوری از اندیس 2 است پس G/Z نیز دارای دو زیرگروه ماکسیمال دوری مانند H_1/Z و H_2/Z از اندیس 2 می‌باشد. لذا H_1 و H_2 زیرگروه‌های ماکسیمال و نرمال آبلی از G خواهند بود. از این رو $Z(G) = H_1 \cap H_2$. اکنون همریختی

$$G/H_1 \cap H_2 \hookrightarrow G/H_1 \times G/H_2,$$

موجب می‌شود که G/Z یک گروه آبلی مقدماتی از مرتبه‌ی حداکثر 4 باشد که تناقض است. $\square$

قضیه ۶.۱.۱. *فرض کنیم G یک p-گروه متناهی باشد به طوری که فقط یک زیرگروه از مرتبه‌ی p دارد. در این صورت داریم:*

(i) اگر $p > 2$، G دوری است؛

(ii) اگر $p = 2$، G دوری یا کواترنیون تعمیم یافته است.

برهان. به [۷]، قضیه ۳.۸.۲ رجوع شود. $\square$

قضیه ۷.۱.۱. *فرض کنیم G یک p-گروه متناهی غیرآبلی از مرتبه‌ی p^n باشد که دارای یک زیرگروه ماکسیمال دوری است. در این صورت:*

(i) اگر p فرد باشد آنگاه $G \cong M(p^n)$ با نمایش زیر است که $n \geq 3$ و $q = p^{n-2}$،

$$M(p^n) = \langle x, y | x^{pq} = y^p = 1, y^{-1}xy = x^{1+q} \rangle.$$

(ii) اگر $p = 2$ آنگاه G یکریخت است با D_{2^n}، Q_{2^n}، S_{2^n} و یا $M(2^n)$ که $n \geq 4$.
همچنین S_{2^n} دارای نمایشی به صورت زیر است که در آن $n \geq 4$ و $a = 2^{n-2}$،

$$S_{2^n} = \langle x, y | x^{2a} = y^2 = 1, y^{-1}xy = x^{-1+a} \rangle.$$

برهان. به [۱۴]، قضیه ۴.۴.۱ رجوع شود. $\square$

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنیم G یک p-گروه باشد. در این صورت به ازای هر $i \geq 0$، زیرگروه‌های $\Omega_i(G)$ و $\mho_i(G)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Omega_i(G) = \langle \{g | g \in G, g^{p^i} = 1\} \rangle, \ \mho_i(G) = \langle \{g^{p^i} | g \in G\} \rangle.$$

گروه‌های $\Omega_i(G)$ و $\mho_i(G)$ را به ترتیب با G_p و G^p نیز نشان می‌دهند.

قضیه ۹.۱.۱. *فرض کنیم G یک p-گروه غیرآبلی باشد که شامل یک زیرگروه نرمال دوری مانند H از مرتبه‌ی p^n است به طوری که $\mathcal{C}_G(H) = H$. در این صورت*

(i) *اگر $n = 2$ آنگاه G با $M_3(p)$، D_8 و یا Q_8 یکریخت است که در آن p یک عدد اول فرد است؛*

(ii) *اگر $n > 2$ آنگاه یکی از موارد زیر برقرار است:*

(a) G *با یکی از گروه‌های* D_{n+1}، Q_{n+1} *و یا* S_{n+1} *یکریخت است؛*

(b) $M = \mathcal{C}_G(\mho^1(H)) \cong M_{n+1}(p)$ و $\Omega_1(M)\ ch\ G$.

برهان. به [۴]، قضیه ۵.۴.۸ رجوع شود. □

تعریف ۱۰.۱.۱ . p- گروه آبلی متناهی G را مقدماتی گوییم هرگاه مرتبه‌ی هر عضو غیرهمانی آن عدد اول p باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت کوچکترین عدد صحیح و مثبت n را که به ازای هر $x \in G$ داشته باشیم $x^n = 1$، با نماد $Exp(G)$ نشان می‌دهند. اگر چنین nای موجود نباشد، $Exp(G) = \infty$.

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه غیرآبلی باشد. اگر تمام زیرگروههای G نرمال باشند آنگاه G را یک گروه هامیلتونی می‌نامیم.

قضیه ۱۳.۱.۱ (ددکیند). *فرض کنیم G یک گروه غیرآبلی باشد به طوری که تمام زیرگروه‌های آن نرمال هستند. در این صورت، $G = Q_8 \times A \times B$ که در آن Q_8، گروه کواترنیون‌ها از مرتبه‌ی 8، A یک گروه آبلی از مرتبه‌ی فرد و B یک 2- گروه آبلی مقدماتی می‌باشد. برعکس، اگر G چنین ساختاری داشته باشد آنگاه هر زیرگروه از G نرمال است.*

برهان. به [۷]، قضیه ۳.۷.۱۲ رجوع شود. □

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه متناهی از مرتبه‌ی n باشد و $n = p^{\alpha}n'$ که در آن α یک عدد صحیح نامنفی است و p عدد اولی است که $p \nmid n'$. در این صورت هر زیرگروه G از مرتبه‌ی p^{α} را یک p-زیرگروه سیلوی G می‌نامند. مجموعه‌ی همه‌ی p-زیرگروه‌های سیلوی G را با نماد $Syl_p(G)$ نشان می‌دهند.

قضیه ۱۵.۱.۱ (سیلو)**.** *فرض کنیم G یک گروه متناهی از مرتبه‌ی n باشد که در آن $n = p^{\alpha}n'$، $\alpha \geq 0$ و p عدد اولی است که $p \nmid n'$. در این صورت داریم:*

(*i*) *G حداقل یک p- زیرگروه سیلو دارد؛*

(*ii*) *هر p- زیرگروه مشمول در یک p- زیرگروه سیلوی G است؛*

(*iii*) *هر دو p- زیرگروه سیلوی G مزدوجند؛*

(*iv*) *تعداد همه‌ی p- زیرگروه‌های سیلوی G، همنهشت 1 به پیمانه‌ی p است.*

برهان. به [۱۷]، قضیه ۷.۱.۴ رجوع شود. □

قضیه ۱۶.۱.۱ (استدلال فراتینی)**.** *فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $H \trianglelefteq G$. در این صورت اگر $P \in Syl_p(H)$ آنگاه $G = \mathcal{N}_G(P)H$.*

برهان. به [۱۷]، قضیه ۱۲.۱.۴ رجوع شود. □

قضیه ۱۷.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و M, N دو زیرگروه از G باشند به طوری که $N \trianglelefteq G$ و $N \leq M \leq G$. در این صورت $M/N \in Syl_p(G/N)$ اگر و تنها اگر $M = PN$ که در آن $P \in Syl_p(G)$.*

برهان. به [۱۷]، قضیه ۱۹.۱.۴ رجوع شود. □

قضیه ۱.۱.۱۸. *فرض کنیم G یک گروه باشد و G_1، ...، G_n زیرگروه‌هایی از آن باشند به طوری که*

(i) *به ازای هر i که $1 \leq i \leq n$، $G_i \trianglelefteq G$؛*

(ii) $G = G_1 \dots G_n$؛

(iii) *به ازای هر i که $1 \leq i \leq n$، $G_i \cap G_1 \dots G_{i-1}G_{i+1} \dots G_n = 1$.*

در این صورت $G \cong G_1 \times \dots \times G_n$.

برهان. به [۱۷]، قضیه ۲.۱.۵ رجوع شود. □

لم ۱.۱.۱۹. *فرض کنیم G یک p-گروه آبلی مقدماتی از مرتبه‌ی p^n باشد. در این صورت یک فضای برداری مانند V روی میدان $\mathbb{Z}_p$ از بعد n وجود دارد به طوری که $G \cong V^+$، که در آن V^+ گروه جمعی فضای برداری V است. بعلاوه، $Aut(G) \cong GL(V)$.*

برهان. به [۱۷]، لم ۳.۲.۵ رجوع شود. □

تعریف ۱.۱.۲۰. فرض کنیم G یک گروه باشد. زیرگروه نرمال غیربدیهی H را یک زیرگروه نرمال مینیمال G گوییم هرگاه H حاوی هیچ زیرگروه نرمال G به جز خود و 1 نباشد. به عبارت دیگر، هرگاه $N \trianglelefteq G$ و $N \subseteq H$ آنگاه $N = H$ یا $N = 1$.

همچنین گروه غیربدیهی G را مشخصاً ساده گوییم در صورتی که تنها زیرگروه‌های مشخص آن 1 و G باشند.

قضیه ۱.۱.۲۱. *فرض کنیم G یک گروه آبلی متناهی غیربدیهی باشد. در این صورت G مشخصاً ساده است اگروتنهااگر p- گروه آبلی مقدماتی باشد.*

برهان. به [۱۷]، قضیه ۴.۲.۵ رجوع شود. □

قضیه ۲۲.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه متناهی غیربدیهی باشد. در این صورت G مشخصاً ساده است اگروتنهااگر G به حاصل ضرب مستقیم تعدادی متناهی از زیرگروه‌های ساده خود که دوبه‌دو یکریختند، تجزیه شود.*

برهان. به [۱۷]، قضیه ۵.۲.۵ رجوع شود. □

قضیه ۲۳.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه باشد. اگر H یک زیرگروه نرمال مینیمال G باشد آنگاه H یک p- گروه آبلی مقدماتی و یا به صورت حاصل ضرب مستقیم گروه‌های ساده و غیرآبلی یکریخت می‌باشد که p یک عدد اول است.*

برهان. به [۴]، قضیه ۲.۱.۵ رجوع شود. □

تعریف ۲۴.۱.۱. فرض کنیم F یک میدان و n عددی طبیعی باشد. مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های معکوس‌پذیر $n \times n$ را که درایه‌های هر یک از آنها در Fاند را با $GL(n, F)$ نمایش داده و آن را گروه خطی عام (از درجه‌ی n روی F) گوییم. همچنین مجموعه‌ی همه‌ی اعضایی از $GL(n, F)$ که دترمینان هر یک از آنها برابر 1 (عضو واحد میدان F) است، زیرگروهی از $GL(n, F)$ می‌باشد که آن را با $SL(n, F)$ نمایش داده و گروه خطی خاص (از درجه‌ی n بر F) نامیم. حال اگر میدان F متناهی باشد و $|F| = q$ آنگاه گروه‌های $GL(n, F)$ و $SL(n, F)$ را به ترتیب با علامات $GL(n, q)$ و $SL(n, q)$ نشان خواهیم داد.
گروه $SL(n, F)/Z(SL(n, F))$ را گروه خطی خاص تصویری (از درجه‌ی n بر F) می‌نامند و آن را با $PSL(n, F)$ نشان می‌دهند.

قضیه ۲۵.۱.۱. *فرض کنیم G گروهی آبلی مقدماتی از مرتبه‌ی p^m باشد. در این صورت $Aut(G) \cong GL(m, p)$. بنابراین $|Aut(G)| = (p^m - p^{m-1}) \dots (p^m - 1)$.*

برهان. به [۱۷]، قضیه ۵.۴.۶ رجوع شود. □

قضیه ۲۶.۱.۱. *فرض کنیم $G = G'$. همچنین فرض کنیم همه‌ی عضوهای مرتبه‌ی 2 از G، مزدوج بوده و به ازای هر عضو مرتبه‌ی 2 از G مانند x، $\mathcal{C}_G(x)$ آبلی از نوع $(2,2)$ ($\mathcal{C}_G(x) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$) باشد. در این صورت $G \cong A_5$.*

برهان. به [۶]، قضیه ۴۶.۳ رجوع شود. □

قضیه ۲۷.۱.۱. *فرض کنیم q توانی از عدد اول p باشد. در این صورت هر زیرگروه از $PSL(2,q)$، با یکی از گروه‌های زیر یکریخت است.*

(*i*) *گروه دووجهی از مرتبه‌ی $2(q\pm1)/d$ و زیرگروه‌هایش که در آن $d = (2, q-1)$.*

(*ii*) *گروهی مانند H از مرتبه‌ی $q(q-1)/d$ و زیرگروه‌هایش. اگر Q یک p-زیرگروه سیلوی H باشد آنگاه Q آبلی مقدماتی بوده و $Q \trianglelefteq H$، همچنین گروه خارج قسمتی H/Q، دوری از مرتبه‌ی $(q-1)/d$ می‌باشد.*

(*iii*) *A_4، S_4 یا A_5.*

(*iv*) *$PSL(2,r)$ یا $PGL(2,r)$ که در آن r توانی از p و $r^m = q$.*

برهان. به [۱۳]، قضیه ۳.۶.۲۵ رجوع شود. □

قضیه ۲۸.۱.۱. *گزاره‌های زیر برقرارند.*

(*i*) *$SL(2,q)$ شامل زیرگروه‌های دوری از مرتبه‌ی $q-1$ و $q+1$ است.*

(*ii*) *اگر q زوج باشد آنگاه هر 2-زیرگروه سیلوی $SL(2,q)$، آبلی مقدماتی و اگر q فرد باشد آنگاه هر 2-زیرگروه سیلوی آن، کواترنیون تعمیم یافته است.*

(*iii*) *اگر $p \geq 5$ یک عدد اول باشد آنگاه $SL(2,p)$ حل‌ناپذیر است.*

برهان. به [۴]، قضیه ۲.۸.۳ رجوع شود. □

قضیه ۲۹.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه باشد به طوری که $G = G'$. همچنین فرض کنیم $\tau \in G$ عضوی از مرتبه‌ی 2 باشد که $C_G(\tau)$، گروه دووجهی از مرتبه‌ی 8 است. در این صورت $G \cong PSL(2,7)$ از مرتبه‌ی 168 یا $G \cong PSL(2,9)$ از مرتبه‌ی 360 است.*

برهان. به [۹]، قضیه ۷.۱۰ رجوع شود. □

تعریف ۳۰.۱.۱. یک گروه غیرآبلی مینیمال G عبارت است از یک گروه غیرآبلی که همه‌ی زیر گروه‌های واقعی آن آبلی‌اند.

قضیه ۳۱.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه متناهی غیرآبلی باشد به طوری که همه‌ی زیرگروه‌های واقعی آن آبلی باشند. در این صورت*

(i) $|G|$ حداکثر دو عامل اول دارد؛

(ii) اگر G یک p- گروه نباشد آنگاه یکی از زیرگروه‌های سیلوی G دوری و دیگری نرمال و آبلی مقدماتی است.

برهان. به [۱۷]، قضیه ۵.۴.۱۱ رجوع شود. □

تعریف ۳۲.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه و H و K دو زیرگروه از G باشند به طوری که

(i) $H, K \trianglelefteq G$؛

(ii) $H \cap K \leq Z(G)$؛

(iii) $G = HK$.

در این صورت گوییم G، حاصل ضرب مرکزی H و K است و می‌نویسیم

$$G = H \star K.$$

قضیه ۳۳.۱.۱. *(i) اگر p یک عدد اول فرد باشد آنگاه به ازای هر عدد طبیعی k،* $Aut(\mathbb{Z}_{p^k}) \cong \mathbb{Z}_{p^{k-1}(p-1)}$؛
(ii) به ازای هر عدد طبیعی k که $k > 1$، $Aut(\mathbb{Z}_{2^k}) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^{k-2}}$.

برهان. به [۱۷]، قضیه ۴.۵.۶ رجوع شود. □

تعریف ۳۴.۱.۱. فرض کنیم G یک p-گروه باشد. گروه G را منظم خوانیم هرگاه به ازای هر $x, y \in G$ داشته باشیم:

$$x^p y^p = (xy)^p \prod_i d_i{}^p,$$

که در آن $d_i \in \langle x, y \rangle'$.

قضیه ۳۵.۱.۱. *فرض کنیم A یک گروه منظم از خودریختیهای یک p-گروه مانند P باشد. در این صورت هر q-زیرگروه سیلو از A به ازای $q = 2$، دوری یا کواترنیون تعمیم یافته است و به ازای $q > 2$، دوری است.*

برهان. به [۴]، قضیه ۵.۴.۱۱ رجوع شود. □

قضیه ۳۶.۱.۱. *فرض کنیم A یک گروه منظم از خودریختیهای یک p-گروه P باشد. در این صورت داریم:*

(i) A یک p'-گروه است؛

(ii) A شامل هیچ زیرگروه آبلی غیردوری نیست؛

(iii) هر زیرگروه A از مرتبه‌ی qr دوری است که در آن q و r اعداد اول متمایزند.

برهان. به [۴]، قضیه ۵.۳.۱۴ رجوع شود. □

قضیه ۳۷.۱.۱ (شور-زاسنهاوس). [۱] *فرض کنیم G گروهی متناهی و K زیرگروهی نرمال از آن باشد به طوری که $(|G : K|, |K|) = 1$. در این صورت G زیرگروهی از مرتبه‌ی $|G : K|$ دارد.*

برهان. به [۱۷]، قضیه ۱.۳.۸ رجوع شود. □

تعریف ۳۸.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه و H زیرگروهی از آن باشد. گوییم H در G دارای مکمل است هرگاه زیرگروهی از G مانند K موجود باشد به طوری که $G = HK$. اگر $H \cap K = 1$، K را متمم H در G نامیم.

قضیه ۳۹.۱.۱. *فرض کنیم P یک p-زیرگروه سیلوی گروه متناهی G باشد که در آن p کوچکترین عدد اولی است که $|G|$ را عاد می‌کند. در این صورت اگر P دوری باشد، P یک متمم نرمال در G دارد.*

برهان. به [۱۷]، قضیه ۵.۲.۱۲ رجوع شود. □

نتیجه ۴۰.۱.۱. *یک گروه ساده‌ی متناهی غیرآبلی نمی‌تواند دارای یک 2-زیرگروه سیلوی دوری باشد.*

برهان. به [۱۷]، نتیجه ۶.۲.۱۲ رجوع شود. □

قضیه ۴۱.۱.۱ (مدار-پایدارساز). *فرض کنیم گروه G بر مجموعه‌ی X عمل کند و $x \in X$. در این صورت تناظری یک به یک بین $Orb_G(x)$ و مجموعه‌ی همه‌ی همدسته‌های $St_G(x)$ وجود دارد. بالاخص، اگر $Orb_G(x)$ متناهی باشد آنگاه داریم:*

$$|G : St_G(x)| = |Orb_G(x)|.$$

[۱] Schur-Zassenhaus

برهان. به [۱۷]، قضیه ۲.۳.۲ رجوع شود. □

تعریف ۴۲.۱.۱. فرض کنیم گروه G بر مجموعه‌ی X عمل کند. در صورتی که X تنها مدار عمل باشد، عمل را متعدی گوییم. به عبارت دیگر، به ازای هر دو عضو X مانند x_1 و x_2، عضوی از G مانند g موجود باشد به طوری که $x_1g = x_2$.

تعریف ۴۳.۱.۱. گوییم گروه G بر مجموعه‌ی X به طور منظم عمل می‌کند هرگاه این عمل متعدی بوده و به ازای هر $x \in X$، $St_G(x) = 1$.

تعریف ۴۴.۱.۱. فرض کنیم گروه G روی گروه A عمل کند. این عمل را تحویل‌ناپذیر گوییم هرگاه A زیرگروهی پایا تحت این عمل نداشته باشد.

تعریف ۴۵.۱.۱. فرض کنیم H و K دو گروه دلخواه و $\varphi : H \longrightarrow Aut(K)$ یک همریختی باشد. (به ازای هر h از H، تصویر h تحت φ را با φ_h نشان می‌دهیم). در حاصل ضرب دکارتی $H \times K$ عمل دوتایی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$(h_1, k_1)(h_2, k_2) = (h_1h_2, k_1\varphi_{h_2}k_2).$$

مجموعه‌ی $H \times K$ با عمل فوق تشکیل یک گروه می‌دهد. این گروه را حاصل ضرب نیم‌مستقیم H و K تحت عمل φ می‌نامند و آن را با علامت $K \rtimes H$ نشان می‌دهند و اصطلاحاً می‌گویند گروه H بر گروه K تحت φ عمل می‌کند.

قضیه ۴۶.۱.۱. *فرض کنیم H و K زیرگروه‌هایی از گروه G باشند به طوری که $K \trianglelefteq G$، $G = HK$ و $H \cap K = 1$. در این صورت $G \cong K \rtimes H$.*

قضیه ۴۷.۱.۱ (برنساید). *فرض کنیم G یک گروه متناهی و P یک زیرگروه سیلوی G باشد. در این صورت اگر $P \leq Z(N_G(P))$ آنگاه P یک متمم نرمال در G مانند K دارد. بنابراین $G = K \rtimes P$.*

برهان. به [۱۷]، قضیه ۳.۲.۱۲ رجوع شود. □

تعریف ۴۸.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه و $\Lambda : G \longrightarrow GL(n,\mathcal{C})$ یک نمایش گروه G باشد. به ازای هر $g \in G$ تعریف می‌کنیم:

$$\chi\colon \underset{g\longmapsto Tr(\Lambda(g))}{G \longrightarrow \mathbb{C}}$$

χ را سرشت متناظر با نمایش Λ گوییم.

$\chi(1)$ را درجه‌ی سرشت χ نامیم و اگر $\chi(1) = 1$ آنگاه گوییم χ خطی است. سرشت χ را تحویل‌ناپذیر گوییم هرگاه نتوان آن را به صورت مجموع دو سرشت نوشت. همچنین مجموعه‌ی سرشت‌های تحویل‌ناپذیر G را با $Irr(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۴۹.۱.۱. فرض کنیم χ یک سرشت از G باشد. در این صورت

$$Z(\chi) = \{g \in G| \, |\chi(g)| = \chi(1)\},$$
$$Ker(\chi) = \{g \in G| \, \chi(g) = \chi(1)\}.$$

قضیه ۵۰.۱.۱. *فرض کنیم χ یک سرشت از G باشد. قرار می‌دهیم $Z = Z(\chi)$ و $f = \chi(1)$. همچنین فرض کنیم Λ نمایشی از G باشد که χ سرشت متناظر با آن است. در این صورت داریم:*

(i) $Z = \{g \in G| \, \exists\varepsilon \in \mathbb{C}, \; \Lambda(g) = \varepsilon I\}$؛

(ii) Z *زیرگروهی از G است؛*

(iii) $\chi_Z = f\lambda$ *که χ یک سرشت خطی از Z است؛*

(iv) $Z/\ker\chi$ *دوری است؛*

(v) $Z/\ker\chi \leq Z(G/\ker\chi)$؛

(vi) اگر $\chi \in Irr(G)$، $Z/\ker\chi = Z(G/\ker\chi)$.

برهان. به [۹]، قضیه ۲.۲۷ رجوع شود. □

نتیجه ۵۱.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت داریم:*

$$Z(G) = \bigcap_{\chi\in Irr(G)} Z(\chi).$$

برهان. به [۹]، نتیجه ۲.۲۸ رجوع شود. □

قضیه ۵۲.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه با سرشت تحویل‌ناپذیر $\chi \in Irr(G)$ باشد به طوری که $G/Z(\chi)$ آبلی است. در این صورت $|G:Z(\chi)| = \chi(1)^2$.*

برهان. به [۹]، قضیه ۲.۳۱ رجوع شود. □

قضیه ۵۳.۱.۱. *فرض کنیم $|G'| = p$ که در آن p یک عدد اول است. همچنین فرض کنیم $G' \leq Z(G)$. در این صورت به ازای هر سرشت غیرخطی χ از $Irr(G)$، $\chi(1)^2 = |G:Z(G)|$.*

برهان. چون $G' \leq Z(G) \leq Z(\chi)$ پس $G/Z(\chi)$ آبلی است. از این رو بنابر قضیه‌ی ؟؟، $|G:Z(\chi)| = \chi(1)^2$. ادعا می‌کنیم $Z(\chi) = Z(G)$. فرض کنیم چنین نباشد. عضو b متعلق به $Z(\chi)\backslash Z(G)$ را اختیار می‌کنیم. چون $b \notin Z(G)$ پس عضوی از G مانند a موجود است که $x = [a,b] \neq 1$ در نتیجه $x \in G' \subseteq Z(G)$ از طرفی $|G'| = p$ لذا $G' = \langle x\rangle$ از این رو بنابر بند (vi) از قضیه‌ی ؟؟ داریم:

$$b\ker\chi \in Z(\chi)/\ker\chi = Z(G/\ker\chi),$$

بنابراین $x = [a,b] \in \ker\chi$، از این رو $G' = \langle x\rangle \subseteq \ker\chi$. در نتیجه $G/\ker\chi$ آبلی است. در این صورت $Z(\chi)/\ker\chi = G/\ker\chi$ یعنی $G = Z(\chi)$ و درنتیجه $\chi(1) = 1$ که متناقض با فرض است. □

قضیه ۵۴.۱.۱. [ایتو][۲] *فرض کنیم G یک گروه و A یک زیرگروه نرمال آبلی از آن باشد. در این صورت به ازای هر $\chi \in Irr(G)$، $\chi(1) | |G : A|$.*

برهان. به [۹]، قضیه ۶.۱۵ رجوع شود. □

تعریف ۵۵.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد. یک سری نرمال G، زنجیری است متناهی از زیرگروه‌های نرمال G مانند

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_r = G.$$

سری فوق را مرکزی گوییم هرگاه به ازای هر i، $G_i/G_{i-1} \leq Z(G/G_{i-1})$.

تعریف ۵۶.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت سری نرمال

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_r = G,$$

را یک سری اصلی G می‌نامیم در صورتی که به ازای هر i که $1 \leq i \leq r$، G هیچ زیرگروه نرمالی مانند N_i نداشته باشد به طوری که $G_{i-1} < N_i < G_i$. هر گروه خارج‌قسمتی G_i/G_{i-1} را یک عامل اصلی G می‌نامیم.

قضیه ۵۷.۱.۱. *فرض کنیم گروه G دارای یک سری اصلی باشد. در این صورت عامل‌های اصلی G به طور مشخص ساده‌اند.*

برهان. به [۱۷]، قضیه ۴.۳.۹ رجوع شود. □

۲.۱ گروه‌های پوچتوان

تعریف ۱.۲.۱. گروه G را پوچتوان نامند در صورتی که یک سری مرکزی متناهی داشته باشد.

---
[۲] Ito