بسم الله الرحمن الرحیم

۱۳۸۴۴۷

دانشگاه ارومیه

عملگرهای حافظ انفصال بین جبرهای لیپشیتس کوچک

نیلوفر صدیقی

دانشکده‌ی علوم

گروه ریاضی

پاییز ۱۳۸۷

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

استاد راهنما:

دکتر سعید استادباشی

پایان نامه خانم سلوی صوتی به تاریخ ۸۷/۸/۲۹ شماره   مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه عالی

و نمره ۱۸/۰ قرار گرفت.

(هیجده)

۱- استاد راهنما و رئیس هیئت داوران: دکتر سعید استادباشی

۲- استاد مشاور:

۳- داور خارجی: دکتر علی عبادیان

٤- داور داخلی: دکتر رسول آقالاری

٥- نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر خیراله هوشیار قرمانلو

تقدیم به اولین و بزرگترین استادم، پدرم

به عزیزترینم ، مادرم

به خواهر و برادران عزیزم

و به تمام کسانی که دوستشان دارم.

تقدیر و تشکر

شکر و سپاس بر درگاه پروردگار و دوست مهربانم که در طول کار با این پایان نامه ، وجود بیکران و دست یاریش را بیش از پیش باور کردم. صدایش زدم و چه نیکو آنچنان که در لیاقت مقام اوست یاریم رساند.

بی تردید اتمام این مجموعه مرهون زحمات بی دریغ استاد گرانقدرجناب آقای دکتر سعید استادباشی می باشد. که بر خویش فرض می دانم تا مراتب سپاس و امتنان قلبی خود نسبت به ایشان ابراز دارم.

همچنین از آقایان دکتر آقالاری، دکترعبادیان، دکتر شمس، دکتر قهرمانلو، دکتر اذانچیلر و سایر اساتید گروه ریاضی و تمام دوستان و همکلاسی هایم تشکر می نمایم.

همچنین از خانواده عزیزم که همواره همراهم بوده اند، سپاسگزارم.
برای تمامی این بزرگواران و تمامی رهروان راه علم و دانش آرزوی سلامتی و توفیق روزافزون دارم.

فهرست مندرجات

۱.۰ پیشگفتار

متن این پایان‌نامه بر اساس مرجع [۷] نوشته شده و لازم به ذکر است که مرجع [٦] یکی از مراجع اصلی برای این پایان‌نامه به شمار می‌رود. در زیر خلاصه‌ی آنچه را که انجام داده‌ایم بیان می‌کنیم.

هرگاه X و Y دو مجموعه ناتهی و $A(X)$ و $B(Y)$ به ترتیب جبر توابع اسکالر مقدار روی X و Y نسبت به ضرب نقطه‌ای باشند، آن‌گاه نگاشت خطی $T : A(X) \to B(Y)$ را حافظ انفصال گوئیم هرگاه

$$f.g = \circ \qquad \Rightarrow \qquad Tf.Tg = \circ, \qquad (f, g \in A(X)).$$

"Beckenstein, Narici, Todd" در مرجع [۲] برای اولین بار مفهوم نگاشت حافظ انفصال را با نام نگاشت جدا کننده روی جبر $C(X)$ که متشکل از توابع اسکالر مقدار پیوسته روی فضای توپولوژیکی، هاسدورف و فشرده X می‌باشد را مطرح کردند. در ادامه "Jarosz" با اعمال شرط دوسوئی بر نگاشت خطی حافظ انفصال T روی جبر $C(X)$، با نشان دادن این مطلب که T به فرم یک عملگر ترکیبی می‌باشد، خاصیت مهمّ پیوستگی خودکار را برای T ثابت کرد. در سال‌های اخیر نگاشت حافظ انفصال روی تعدادی از جبرها از جمله جبر توابع مشتق‌پذیر، جبرهای فوریه، $L^{1}(G)$ و $C_{\circ}(X)$ نیز بررسی شده است.

همچنین جبرهای لیپشیتس توسط "Donald. R. Sherbert" برای اولین بار معرفی گردید. با وجودی که مدت‌های مدیدی از شناسائی این جبرها می‌گذرد، لکن هنوز هم مسائل باز بسیاری در این باب وجود دارند که تعدادی از این مسائل در فصل هفتم مرجع [۱۴] گنجانده شده است.

۲.۰ خلاصه

در این پایان‌نامه عملگرهای حافظ انفصال و خواص آن روی جبرهای لیپ شیتس کوچک که توسط "A. Jiménez. Vargas" در سال ۲۰۰۸ مطرح شده است را بررسی می‌کنیم.

این پایان نامه مشتمل بر سه فصل است که به طور مختصر قسمت‌های مختلف آن را در اینجا شرح می‌دهیم:

در فصل اوّل مقدّماتی از آنالیز تابعی و تعاریف و قضایای اساسی در مورد جبرهای باناخ را یادآور می‌شویم. به این دلیل که اکثر مباحث این فصل در دروس آنالیز حقیقی و تابعی تدریس می‌شود، اثبات قضایای مربوطه را به مراجع مناسب ارجاع داده‌ایم.

در فصل دوّم جبر های لیپشیتس را معرفی کرده و برخی از خواص آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در فصل سوم نمایش ضربی و خاصیت مهّم پیوستگی خودکار برای نگاشت خطّی حافظ انفصال $T : lip_\alpha(X) \longrightarrow lip_\alpha(Y)$، که X و Y فضاهای متریک فشرده و $\alpha \in (0,1)$ می‌باشد را بررسی می‌کنیم. نشان می‌دهیم که این نوع عملگرها اساساً عملگر ترکیبی وزن‌دار می‌باشند. یعنی h ناصفری در $lip_\alpha(Y)$ و نگاشت پیوسته‌ی φ بر Y موجودند به طوری که

$$Tf = h.(f \circ \varphi).$$

بعلاوه با اعمال شرط دوسوئی برای T، خاصیت پیوستگی خودکار برای T و خاصیت حافظ انفصال برای T^{-1} را ثابت خواهیم کرد. در ادامه تعدادی از ایده‌آل‌های جبر $lip_\alpha(X)$ را شناسائی کرده و به کمک آن نشان می‌دهیم همیشه تابعی خطی حافظ انفصال ناپیوسته روی $lip_\alpha(X)$ وجود دارد. شایان ذکر است که اغلب اثبات‌های استفاده شده در قسمت نمایش ضربی و پیوستگی خودکار این فصل منسوب به روش‌های اثبات "Jarosz" در مرجع [٦] می‌باشد.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدّماتی

۱.۱ مفاهیمی مقدّماتی از آنالیز تابعی و حقیقی

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری و d نیز یک متر بر X باشد، d را یک متر پایا بر X می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y, z \in X$ ، داشته باشیم

$$d(x+z, y+z) = d(x, y).$$

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنیم d یک متر بر مجموعه‌ی X باشد، مجموعه‌ی $E \subset X$ را کراندار گوئیم اگر عددی مانند $M < \infty$ چنان موجود باشد، که به ازای هر $x, y \in E$ ، $d(x, y) < M$.

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنیم d یک متر بر مجموعه‌ی X باشد. دنباله‌ی $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ در X یک دنباله‌ی کشی است اگر به ازای هر $\epsilon > 0$ یک عدد صحیح مانند N چنان نظیر باشد که هرگاه $n, m > N$، $d(x_n, x_m) < \epsilon$. هرگاه هر دنباله‌ی کشی در X به نقطه‌ای از X همگرا باشد، آن‌گاه گوئیم d یک متر تام بر X است.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنیم X یک مجموعه و τ یک توپولوژی بر X باشد. (X, τ) یک فضای هاسدورف [۱] و τ یک توپولوژی هاسدورف است اگر نقاط متمایز X، همسایگی‌های از هم جدایی

[۱] Hausdorff

داشته باشند.

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنیم τ یک توپولوژی بر فضای برداری X باشد به طوری که

الف) به ازای هر $x \in X$ مجموعه یکانی $\{x\}$ بسته باشد،

ب) اعمال فضای برداری نسبت به τ پیوسته باشند.

در این شرایط τ یک توپولوژی برداری بر X است و X را یک فضای برداری توپولوژیکی [۲] $t.\ v.\ s$ می‌نامیم.

قضیه ۶.۱.۱ هر فضای برداری توپولوژیک، هاسدورف است.

برهان : به قضیهٔ ۱۲.۱، مرجع [۱۰] مراجعه شود. □

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری باشد. یک پایه‌ی موضعی فضای برداری توپولوژیک X گردایه‌ای مانند β از همسایگی‌های صفر، است به طوری که هر همسایگی صفر، شامل عضوی از β می‌باشد. در این صورت مجموعه‌های باز X درست آنهائی هستند که اجتماعی از انتقالهای اعضای β می‌باشند.

قضیه ۸.۱.۱ فرض کنیم V یک همسایگی از صفر در فضای برداری توپولوژیک X باشد.

الف) هرگاه $\dots < r_۲ < r_۱ < ۰$ و وقتی $n \longrightarrow \infty$، $r_n \longrightarrow \infty$، آن‌گاه

$$X = \bigcup_{k=۱}^{\infty} r_n V.$$

ب) هر زیر مجموعه‌ی فشرده از X کراندار است.

ج) هرگاه $\dots > \delta_۲ > \delta_۱$ و وقتی $n \longrightarrow \infty$، $\delta_n \longrightarrow ۰$ ، و نیز V کراندار باشد، آن‌گاه گردایه‌ی $\{\delta_n V \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ یک پایه‌ی موضعی برای X می‌باشد.

برهان : به قضیه ۱۵.۱، مرجع [۱۰] مراجعه شود. □

---

[۲] topological vector space

تعریف **۹.۱.۱** فرض کنیم (X,τ) یک فضای برداری توپولوژیک باشد، X را یک $F-$ فضا می‌نامیم هرگاه توپولوژی τ به وسیله‌ی یک مترپایای تام مانند d، القا شده باشد.

تعریف **۱۰.۱.۱** فرض کنیم (X,τ) یک فضای برداری توپولوژیک باشد،X موضعاً فشرده است، اگر صفر همسایگی با بست فشرده داشته باشد.

تعریف **۱۱.۱.۱** فرض کنیم (X,τ) یک فضای برداری توپولوژیک و d نیز یک متر بر X باشد، هرگاه توپولوژی τ به وسیله‌ی متر d القا شده باشد، گوئیم τ با متر d سازگار است و X متر پذیر است.

تعریف **۱۲.۱.۱** فرض کنیم (X,τ) یک فضای برداری توپولوژیک باشد. زیرمجموعه‌ی $E \subset X$ را کراندار گوئیم اگر به هر همسایگی V از صفر، عددی مانند $s > 0$ چنان نظیر باشد که به ازای هر $t > s$، $E \subset tV$.

قضیه **۱۳.۱.۱** دو خاصیت زیر از مجموعه‌ی E در یک فضای برداری هم‌ارزند :

الف) E کراندار است،

ب) هرگاه $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای در E بوده و $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای از اسکالرها باشد به طوری که وقتی $n \longrightarrow \infty$ ، $\alpha_n \longrightarrow 0$، آن‌گاه وقتی $n \longrightarrow \infty$، $\alpha_n x_n \longrightarrow 0$.

برهان : به قضیه ۳۰.۱، مرجع [۱۰] مراجعه شود. □

تعریف **۱۴.۱.۱** فرض کنیم X و Y دو فضای برداری توپولوژیک و $\Lambda : X \longrightarrow Y$ خطی باشد. در این صورت Λ را کراندار می‌گوئیم هرگاه به ازای هر مجموعه‌ی کراندار $E \subset X$، $\Lambda(E)$ زیرمجموعه‌ی کرانداری از Y باشد.

قضیه **۱۵.۱.۱** اگر Y,X دو فضای برداری توپولوژیکی و $\Lambda : X \longrightarrow Y$ یک تبدیل خطی باشد که در صفر پیوسته باشد، آن‌گاه Λ پیوسته است.

برهان : به قضیه ۱۷.۱ مرجع [۱۰] مراجعه شود. □

قضیه ۱۶.۱.۱ فرض کنیم X و Y فضاهای برداری توپولوژیکی باشند و $\Lambda : X \longrightarrow Y$ یک تبدیل خطی باشد در این صورت (ج)$\Rightarrow$ (ب) $\Rightarrow$ (الف)

الف) Λ پیوسته است،

ب) Λ کراندار است،

ج) اگر $\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = 0$ آن‌گاه $\left\{\Lambda x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$ کراندار است،

و در حالت متریک پذیری X موارد بالا با حکم زیر معادلند

د) اگر $\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = 0$ آن گاه $\lim_{n\longrightarrow\infty} \Lambda x_n = 0$.

برهان : به قضیه ۳۲.۱، مرجع [۱۰] مراجعه شود. □

قضیه ۱۷.۱.۱ اگر X یک فضای برداری توپولوژیکی و $\Lambda : X \longrightarrow \mathbb{F}$ یک تابعک خطی ناصفر باشد، آن‌گاه موارد زیر معادلند:

الف) Λ پیوسته است،

ب) $\ker \Lambda$ بسته است،

ج) $\ker \Lambda$ در X چگال نیست،

د) Λ در یک همسایگی از صفر مانند V کراندار است.

برهان : به قضیه ۱۸.۱، مرجع [۱۰] مراجعه شود. □

تعریف ۱۸.۱.۱ فضای برداری مختلط X را فضای نرمدار می‌نامیم اگر به هر $x \in X$ یک عدد حقیقی نامنفی $\|x\|$ (نرم x) متناظر شود چنان که

الف) به ازای هر $x, y \in X$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$،

ب) به ازای هر $x \in X$ و هر اسکالر α، $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$،

ج) به ازای هر $x \in X$، اگر $x \neq 0$ آن‌گاه $\|x\| > 0$.

با تعریف $d(x, y) = \|x - y\|$، d یک متر بر X است.

تعریف ۱۹.۱.۱ فضای نرم‌داری که نسبت به متریک حاصل از نرم، تام باشد را فضای باناخ می‌نامیم.

قضیه ۲۰.۱.۱ فرض کنیم X و Y فضاهای نرمدار و $B(X,Y)$ فضای همه تبدیلات خطی و کراندار از X به Y باشد. به ازای هر $\Lambda \in B(X,Y)$ تعریف می‌کنیم

$$\|\Lambda\| = \sup\left\{\|\Lambda x\|_Y : x \in X, \|x\| \leq ۱\right\}.$$

در این صورت، $B(X,Y)$ با نرم تعریف شده یک فضای نرمدار است. اگر Y فضای باناخ باشد، آن‌گاه $B(X,Y)$ نیز چنین است.

برهان : به قضیه ۱.۴، مرجع [۱۰] مراجعه شود. □

تعریف ۲۱.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای نرمدار باشد. فضای همه تابعک‌های خطّی کراندار روی X را فضای دوگان[۳]، X می‌نامیم و با X^* نمایش می‌دهیم. یعنی

$$X^* = \left\{\Lambda : X \to \mathbb{F} \quad | \quad \text{خطی است،}\ \Lambda\ \ \|\Lambda\| < \infty\right\}.$$

که در آن $\mathbb{F}$ میدان اسکالر X ($\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$) می‌باشد. جمع و ضرب اسکالر در X^* به صورت زیر تعریف می‌شوند :

$$(\alpha\Lambda)(x) = \alpha.\Lambda x \quad , \quad (\Lambda_۱ + \Lambda_۲)(x) = \Lambda_۱ x + \Lambda_۲ x, \qquad (x \in X).$$

واضح است که این اعمال X^* را به یک فضای برداری تبدیل می‌کند. در واقع $X^* = B(X,\mathbb{F})$ و طبق قضیه ۲۰.۱.۱، با نرم $\|\Lambda\| = \sup\limits_{\|x\|\leq ۱} \|\Lambda x\|$ ، یک فضای باناخ است. اگر X^* نقاط بر X را جدا کند، آن‌گاه X^*- توپولوژی روی X را توپولوژی ضعیف[۴] روی X می‌نامیم که ضعیف‌ترین توپولوژی است که نسبت به آن هر $\Lambda \in X^*$ پیوسته است، و متشکل از تمام اجتماع‌ها از اشتراک‌های متناهی از مجموعه‌های $\Lambda^{-۱}(V)$ می‌باشد، به طوری که $\Lambda \in X^*$ و V در $\mathbb{F}$ باز است. دوگان X^* را

[۳] Duality
[۴] Weak Topology

با X^{**} نمایش می‌دهیم. به ازای هر $x \in X$ تابعک خطی f_x را به صورت $f_x(\Lambda) = \Lambda(x)$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $\{f_x : x \in X\}$ نقاط بر X^* را جدا می‌کند. توپولوژی را که خانواده‌ی $\{f_x\}_{x\in X}$ روی X^* القا می‌کند، یا به طور معادل X روی X^* القا می‌کند به طوری که هر f_x پیوسته باشد، توپولوژی ضعیف—ستاره روی X^* می‌نامیم.

قضیه **۲۲.۱.۱** (قضیه نگاشت باز) [۵] اگر X و Y فضاهای باناخ باشند و $T : X \to Y$ یک نگاشت خطی پیوسته و پوشا باشد، آن‌گاه به ازای مجموعه باز U از X، $T(U)$ در Y باز است.

برهان : به قضیه III.۱۲.۱، مرجع [۴] مراجعه شود. □

قضیه **۲۳.۱.۱** (قضیه نگاشت معکوس) [۶] اگر X و Y فضاهای باناخ و $T : X \to Y$ یک نگاشت خطی پیوسته و دوسوئی باشد، آن گاه T^{-1} پیوسته است.

برهان : به قضیه III.۱۲.۵، مرجع [۴] مراجعه شود. □

نتیجه **۲۴.۱.۱** اگر X و Y فضاهای باناخ باشند و T از X به Y پیوسته، خطی و یک‌به‌یک باشد، آن‌گاه اعداد حقیقی مثبت α و β موجودند به طوری که به ازای هر $x \in X$،

$$\alpha\|x\| \le \|T(x)\| \le \beta\|x\|.$$

برهان : به نتیجه ۱۲.۲ (پ)، مرجع [۱۰] مراجعه شود. □

قضیه **۲۵.۱.۱** (قضیه گراف بسته) [۷]: اگر

الف) X و Y دو $F-$ فضا باشند،

ب) $\Lambda : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت خطی باشد،

---

[۵] Open Mapping Theorem

[۶] Inverse Mapping Theorem

[۷] Closed Graph Theorem

ج) $G_\Lambda = \Big\{(x, \Lambda x) \ : \ x \in X\Big\}$ در $X \times Y$ بسته باشد،
آن‌گاه Λ پیوسته است.

برهان : به قضیه ۱۵.۲، مرجع [۱۰] مراجعه شود. □

قسمت (ج) در قضیه قبلی معادل باحکم زیر است:

اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای از نقاط X باشد که $x_n \longrightarrow x \ , \ \Lambda x_n \longrightarrow y$، آن‌گاه $\Lambda x = y$.

۲.۱ مفاهیمی از جبرهای باناخ

۱.۲.۱ تعاریف مقدّماتی

در این بخش به ذکر تعاریف و قضایایی از جبرهای باناخ می‌پردازیم.

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنیم A یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط باشد. هرگاه یک عمل ضرب بر A تعریف شده باشد به طوری که به ازای تمام x، y و z هایی که $x \in A$، $y \in A$ و $z \in A$ و هر اسکالر $\alpha \in \mathbb{C}$،

الف) $x(yz) = (xy)z$،

ب) $(x+y)z = xz + yz\ ,\ x(y+z) = xy + xz$،

ج) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$،

در این صورت A را یک جبر مختلط می‌نامیم. هرگاه میدان فضای برداری، مجموعه‌ی اعداد حقیقی باشد، A را یک جبر حقیقی می‌نامیم.

جبر A را یک جبر خودالحاق گوییم، هرگاه به ازای هر $f \in A$، $\overline{f} \in A$.

تعریف ۲.۲.۱ A را یک جبر مختلط نرمدار می‌نامیم در صورتی که A جبر مختلط باشد و یک نرم بر A مانند $\|\cdot\|$ موجود باشد به طوری که،

$$\forall\, x, y \in A \quad : \quad \|xy\| \leq \|x\|\|y\| \,.$$

جبر مختلط نرمدار تام را یک جبر باناخ می‌گوئیم.

جبر باناخ A را تعویض پذیر گوئیم هرگاه به ازای همه‌ی x و y هایی که $x \in A$ و $y \in A$، داشته باشیم:

$$xy \;=\; yx.$$

تذکر ۳.۲.۱ اگر $(A, \|\cdot\|)$ یک جبر باناخ یکدار با واحد e باشد، به طوری که $\|e\| \neq 1$، آن‌گاه با تعریف $|||x||| = \sup\limits_{\|y\|\leq 1} \|xy\|$، $(A, |||\cdot|||)$ یک جبر باناخ است و $|||e||| = 1$ و همچنین $|||\cdot|||$ و $\|\cdot\|$ با هم معادلند.

تذکر ۴.۲.۱ در این فصل منظور از جبر همان جبر مختلط است و در حالت کلّی بنا به تذکر قبلی، اگر $(A, \|\cdot\|)$ یک جبر باناخ یکدار باشد فرض می‌کنیم که $\|e\| = 1$.

تعریف ۵.۲.۱ زیر فضای B از جبر A را یک زیر جبر A می‌نامیم در صورتی که نسبت به عمل ضرب بسته باشد.

مثال ۶.۲.۱ فرض کنیم X یک فضای هاسدورف و ناتهی باشد و $C_b(X)$ گردایه‌ی تمام توابع مختلط مقدار، پیوسته و کراندار با قلمرو X باشد. در این صورت $C_b(X)$، با اعمال جمع و ضرب اسکالر و ضرب معمولی توابع (اعمال نقطه‌ای) یک جبر می‌باشد. همچنین به هر $f \in C_b(X)$ نرم سوپریمم یا نرم یکنواخت آن یعنی

$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|$$

را مربوط می‌کنیم.چون f کراندار فرض شده، پس $\|f\| < \infty$. با این نرم $C_b(X)$ یک جبر باناخ تعویض‌پذیر یکدار می‌باشد.توجّه شود که در حالت فشردگی X، کراندار بودن زائد است. لذا اگر X فشرده باشد، مجموعه‌ی مذکور را با $C(X)$ نمایش می‌دهیم که متشکل از جمیع توابع مختلط مقدار پیوسته بر X خواهد بود.

مثال ۷.۲.۱ فرض کنیم X و Y فضاهای فشرده و $\tau : Y \longrightarrow X$ نگاشت پیوسته‌ای باشد. نگاشت A را روی $C(X)$ با ضابطه

$$(Af)(y) = f(\tau(y)) \qquad (f \in C(X), y \in Y)$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت $A \in B(C(X), C(Y))$ و $\|A\| = 1$.

قضیه **۸.۲.۱** (قضیه‌ی باناخ – استون)[۸] فرض کنیم X و Y فضاهای فشرده و $T : C(X) \longrightarrow C(Y)$ یک ایزومتری [۹] پوشا باشد، در این صورت یک همسانریختی $\tau : Y \longrightarrow X$ و نگاشتی مانند α در $C(Y)$ موجود است به طوری که به ازای هر $y \in Y$، $|\alpha(y)| = ۱$ و به ازای هر $y \in Y$ و $f \in C(X)$

$$(Tf)(y) = \alpha(y).f(\tau(y)).$$

برهان : به قضیه‌ی ۲.۱ VI، مرجع [۴] مراجعه شود. □

گزاره **۹.۲.۱** فرض کنیم X یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده و $C_\circ(X)$ گردایه ی توابع پیوسته‌ی مختلط مقدار بر X باشد ، به طوری که به ازای هر $\epsilon > ۰$ ، مجموعه $\{x \in X : |f(x)| \geq \epsilon\}$ فشرده باشد. در این صورت $C_\circ(X)$ یک زیر فضای بسته از $C_b(X)$ می‌باشد، از این رو یک جبر باناخ است. $C_\circ(X)$ را اصطلاحاً گردایه همه‌ی توابع پیوسته f بر X که در بی‌نهایت صفر می‌شوند نیز می‌نامند. هرگاه $X = \mathbb{R}$، آن‌گاه به ازای هر $f \in C_\circ(X)$ ، $\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = ۰$ و اگر X فشرده باشد، آن‌گاه $C_\circ(X) = C_b(X) = C(X)$.

برهان : به گزاره ۱.۷، مرجع [۴] مراجعه شود. □

۲.۲.۱ همریختی‌ها و ایده‌آل‌ها

تعریف **۱۰.۲.۱** فرض کنیم A و B دو جبر باناخ و $\varphi : A \longrightarrow B$ یک نگاشت خطی باشد. φ را یک همریختی [۱۰] گوئیم، در صورتی که برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. هرگاه

[۸] Banach - Stone Theorem

[۹] Isometry

[۱۰] Homomorphism

φ یک به یک و بروی باشد، آن را یک یکریختی [۱۱] از A بروی B می‌نامیم و می‌گوئیم A با B یکریخت است. اگر $B = \mathbb{C}$ و $\varphi \neq 0$، φ را یک همریختی مختلط می‌نامیم.

قضیه ۱۱.۲.۱ اگر A یک جبر باناخ باشد و $x \in A$، به طوری که $\|x\| < 1$، آن‌گاه:

الف) $e - x$ معکوس پذیر است،

ب) $\|(e-x)^{-1} - e - x\| \leq \frac{\|x\|^2}{1-\|x\|}$،

ج) به ازای هر همریختی مختلط φ بر A، $|\varphi(x)| < 1$.

برهان : به قضیه ۷.۱۰، مرجع [۱۰] مراجعه شود. □

نتیجه ۱۲.۲.۱ اگر φ یک همریختی مختلط بر جبر باناخ A باشد، آن‌گاه φ پیوسته است و $\|\varphi\| \leq 1$.

برهان : به گزاره ۳.۱۶، مرجع [۳] مراجعه شود. □

قضیه ۱۳.۲.۱ (قضیه گلیسون [۱۲]، کاهانه [۱۳]، زلاسکو [۱۴]):

اگر φ یک تابعک خطی بر جبر باناخ A باشد به طوری که $\varphi(e) = 1$ و به ازای هر عضو معکوس‌پذیر $x \in A$، $\varphi(x) \neq 0$، آن‌گاه به ازای هر x, y که $x, y \in A$، $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.

برهان : به قضیه ۹.۱۰، مرجع [۱۰] مراجعه شود. □

تعریف ۱۴.۲.۱ زیرمجموعه J از جبر باناخ تعویض‌پذیر A را ایده‌آل گوئیم هرگاه،

الف) J زیرفضائی از A باشد،

ب) برای هر $x \in A$ و $y \in J$، $xy \in A$ $(yx \in A)$،

اگر $J \neq A$، J را ایده‌آل سره می‌نامیم. ایده‌آل ماکسیمال، ایده‌آل سره‌ی A است که مشمول هیچ ایده‌آل سره‌ی دیگری نباشد. ایده‌آل سره‌ی P را ایده‌آل اول می‌نامیم، هرگاه به ازای هر $x, y \in A$،

[۱۱] Isomorphism
[۱۲] Gleason
[۱۳] Kahane
[۱۴] Zelazko