بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده فیزیک

بررسی آنتروپی درهم تنیدگی و موتور زیلارد کوانتومی

رساله‌ی کارشناسی ارشد فیزیک، گرایش ذرات بنیادی

مرضیه مرادزاده

استاد راهنما

دکتر بهروز میرزا

۱۳۹۳

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده ی فیزیک

رساله‌ی کارشناسی ارشد فیزیک ذرات بنیادی خانم مرضیه مرادزاده
تحت عنوان

بررسی آنتروپی درهم تنیدگی و موتور زیلارد کوانتومی

در تاریخ ۱۳۹۳/۰۶/۲۴ توسط کمیته‌ی تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت.

۱-استاد راهنما پایان‌نامه	دکتر بهروز میرزا
۲-استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر احمد شیرزاد
۳-استاد ممتحن	دکتر مسلم زارعی
۴-استاد ممتحن	دکتر رضا خسروی
سرپرست تحصیلات دانشکده‌ی فیزیک	دکتر مجتبی اعلائی

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر بهروز میرزا، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

همچنین از جناب آقای دکتر احمد شیرزاد که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان نامه را تقبل فرمودند، کمال تشکر را دارم.

تقدیم به :

پدر و مادر عزیزم

و

همه ی آنهایی که

می خواهند بیشتر بدانند.

فهرست مطالب

چکیده

امروزه مفهوم اطلاعات نقش برجسته ای در توصیف سیستم های فیزیکی دارد. در دیدگاه عمل گرایانه به مفهوم اطلاعات، وجود و حضور ماهیت های فیزیکی در طبیعت، وابسته به مفهوم اطلاعات است. در این دیدگاه اطلاعات مفهومی است که می توان آن را درک کرد. به این ترتیب معنی اطلاعات وابسته به تشخیص (موجود زنده) است.

ابتدا چگونگی ورود مفهوم اطلاعات به فیزیک بررسی می شود. با طرح آزمایش ذهنی ماکسول و زیلارد به بررسی این پرسش می پردازیم که آیا دخالت موجود هوشمند در سیستم های ترمودینامیکی می تواند منجر به نقض قانون دوم ترمودینامیک شود یا خیر؟ راه ورود مفوم اطلاعات به دنیای فیزیک و ارتباط آن با آنتروپی ترمودینامیکی، ناشی از تلاش هایی است که برای پاسخ به این پرسش شده است. وجود رابطه ی میان آنتروپی و اطلاعات و تحلیل چگونگی این رابطه، از موضوعات مورد علاقه ی اکثر دانشمندان در زمینه علوم بنیادی است. این رابطه را می توان از دیدگاه های مختلفی بررسی کرد. در این تحقیق سعی کرده ایم تا با بررسی آزمایش ذهنی ماکسول به تحلیل این رابطه بپردازیم. ماکسول موجود خیالی (شیطانک) را برای نشان دادن ماهیت آماری قانون دوم ترمودینامیک مطرح کرد. از آن جایی که این شیطانک در ابتدا می توانست به نقض قانون دوم ترمودینامیک منجر شود، تعداد زیادی از دانشمندان از زمان طرح این ایده تا زمان حال سعی کردند به طریقی این موجود را شکست دهند تا قانون دوم را حفظ کنند. برای حفظ این قانون آنتروپی اطلاعات معرفی شد. در قسمت دوم این تحقیق دیدگاه های اولیه زیلارد و ماکسول در مورد شیطانک مطرح می شود. نظریه اطلاعات کوانتومی با بهره گیری از ویژگی های صرفاً کوانتومی، مانند درهم تنیدگی در مواردی برتری هایی بر نظریه کلاسیکی دارد. مفهوم درهم تنیدگی یکی از مفهوم های اساسی مکانیک کوانتومی است. در بخش سوم با استفاده از خاصیت درهم تنیدگی، میزان افزایش آنتروپی اطلاعات و همچنین افزایش کار در موتور زیلارد تعمیم یافته را بررسی می کنیم. در بخش آخر نیز با استفاده از ایجاد درهم تنیدگی بین دو ناحیه در فضای دوسیته که بیشترین تقارن را دارد، می توانیم به آنتروپی درهم تنیدگی برای یک فضا دسترسی پیدا کنیم.

کلمات کلیدی:

شیطانک ماکسول، درهم تنیدگی، آنتروپی، اطلاعات کوانتومی

فصل ۱

مقدمه

از آغاز قرن بیستم دو واقعه مهم دیدگاه بنیادی ما را در مورد ساختار جهان متحول کرد. نظریه ی نسبیت به تصحیح قوانین نیوتون در سرعت های بالا و خمیدگی فضا-زمان در حضور گرانش و آثار ناشی از آن پرداخت و مکانیک کوانتومی فهم ما را از پدیده های میکروسکپی متحول کرد. پیشرفت های بشر در قرن بیستم بر پایه ی مکانیک کوانتومی استوار است. تلاش برای رمز نگاری کوانتومی که به ما امکان ارتباطات امن را می دهد از جمله کاربردهای نوین مکانیک کوانتومی و حالت های کوانتومی است. ریچارد فاینمن برای اولین بار ایده ساخت کامپیوترهای کوانتومی که اساس کارشان مکانیک کوانتومی است را پیشنهاد داد.

۱.۱ حالت های کوانتومی

قبل از وارد شدن به بحث محاسبات و اطلاعات کوانتومی بهتر است بعضی از مفاهیم پایه را مرور کنیم و به معرفی بیت های کوانتومی، حالت های خالص و آمیخته و ویژگی های مهم درهم تنیدگی و آنتروپی بپردازیم.

۱.۱.۱ کیوبیت

در دنیای کلاسیک به کوچکترین واحد اطلاعات بیت گفته می شود که یکی از دو مقدار ۰ و ۱ را می تواند اختیار کند. به طور مشابه کوچکترین واحد اطلاعات در دنیای کوانتومی را بیت کوانتومی یا کیوبیت[۱] می گویند. به طور ساده هر کیوبیت معرف یک بردار در فضای هیلبرت است و همچنین کوچکترین فضای هیلبرت غیر بدیهی، دو بعدی است. اگر $|1\rangle$، $|0\rangle$ بردارهای پایه ی این فضا باشد، یک کیوبیت بهنجار ساده به صورت بردار زیر می باشد:

$$\begin{aligned} |q\rangle &= \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \\ (|\alpha|^2) + (|\beta|^2) &= 1 \end{aligned} \tag{1.1}$$

[۱] Qubit

۲.۱.۱ نامساوی بل

یکی از ویژگی های حالات درهم تنیده [۱] این است که اندازه گیری روی قسمتی از یک سیستم درهم تنیده می تواند روی قسمتی دیگر مؤثر باشد، حتی اگر این دو بخش فاصله ی فضا گونه داشته باشند. فرض کنید دو کیوبیت در حالت $|\psi\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(|+-\rangle - |-+\rangle)$ تهیه کرده و سپس آنها را به اندازه ی کافی از هم دور کنیم تا مطمئن شویم که هیچ گونه تأثیر علی بر هم ندارند. یکی از کیوبیت ها را به آلیس (آزمایشگر اول) و دیگری را به باب (آزمایشگر دوم) می دهیم. اگر در این حالت آلیس اسپین یکی از این کیوبیت ها را در راستایی دلخواه اندازه بگیرد و مثلاً نتیجه + به دست آورد، از آن جایی که اسپین کل صفر است با قاطعیت می تواند بگوید که کیوبیت باب در حالت − قرار دارد. این پیش بینی هیچ تناقضی با نسبیت خاص و اصل موضعیت ندارد، زیرا آلیس تنها می تواند نتیجه ی باب را پیش بینی کند، ولی نمی تواند هیچ علامتی به او مخابره کند. یعنی آزمایش آلیس هیچ تأثیری بر ماتریس چگالی کیوبیت باب نمی گذارد. با این وجود این همبستگی بین حالات دو کیوبیت نتایجی را به دنبال دارد که منجر به ایجاد ابهاماتی در نظریه ی مکانیک کوانتومی شده است.

در ادامه به بیان این تناقضات و سپس به رفع آن می پردازیم.

جفت کیوبیت ذکر شده در بالا را در نظر بگیرید. فرض کنید آلیس در راستای z بر روی کیوبیت خودش اندازه گیری اسپین انجام دهد، در این صورت می تواند اسپین کیوبیت باب در راستای z را با قطعیت پیش بینی کند. پس می گوییم که اسپین در راستای z به صورت قطعی مشخص شده است، به این مفهوم که این خاصیت مستقل از مشاهده وجود دارد، مشاهده آن را خلق نمی کند بلکه آن را آشکار می کند. به همین ترتیب آلیس می تواند در هر راستای دلخواه دیگری اسپین کیوبیتش را اندازه گیری کند و به دنبال آن اسپین کیوبیت باب را پیش بینی کند. پس آیا می توان گفت که بردار اسپین $\overrightarrow{S}$ کاملاً مشخص است؟ در واقع مکانیک کوانتومی امکان اینکه اسپین ذره در هر سه راستای x و y و z قبل از اندازه گیری مقدار معینی داشته باشد را نمی دهد.

این آزمایش فکری سؤالی را در ذهن ایجاد می کند، که آیا این نظریه کامل است؟ به این مفهوم که آیا این نظریه قابلیت توصیف واقعیت را دارد؟ شاید می توان فرض کرد که دانستن این متغیرهای پنهان باعث پیش بینی دقیق آزمایش های فیزیکی می شود. بررسی دقیق تر این آزمایش نتایج اعجاب برانگیزی به دنبال داشت.

فرض کنید آلیس و باب به طور تصادفی یک زوج کیوبیت بین خودشان به اشتراک بگذارند. آلیس به طور تصادفی یکی از مشاهده پذیرهای A یا B و باب یکی از حالت های C یا D را روی کیوبیت خودش اندازه می گیرد. این مشاهده پذیرها به گونه ای انتخاب می شوند که ۱+ یا ۱− باشند. نتایج این اندازه گیری ها را به ترتیب با a, b, c, d نشان می دهیم. این آزمایشات بر روی یکدیگر اثر نمی گذارند زیرا فرض کرده ایم:

۱) این خواص عینی و واقعی هستند و مستقل از مشاهده مقدار خاصی دارند. پس هر دو خاصیت A و B به طور همزمان برای کیوبیت های آلیس وجود دارند. به همین ترتیب هر دو خاصیت C و D برای کیوبیت های باب

وجود دارند.

۲) آلیس و باب فاصله ی فضا گونه دارند لذا طبق اصل موضعیت این دو نمی توانند رابطه ی علی داشته باشند.

پس از پایان آزمایشات مقدار متوسط کمیت $(A+B)C+(A-B)D$ را محاسبه می کنیم. بدیهی است که چون خروجی آزمایش یکی از مقادیر ۱+ و ۱− است رابطه ی زیر همواره برقرار است

$$(a+b)c+(a-b)d=\pm ۲ \tag{۲.۱}$$

اگر $P(a,b,c,d)$ احتمال این باشد که قبل از اینکه روی هر جفت آزمایش انجام شود سیستم در حالت $A=a$ و $B=b$ و $C=c$ و $D=d$ قرار داشته باشد این مقدار متوسط به صورت زیر در می آید:

$$\langle (A+B)C+(A-B)D\rangle = \Sigma_{a,b,c,d}P(a,b,c,d)[(a+b)c+(a-b)d] \tag{۳.۱}$$

پس داریم:

$$\begin{aligned} |\langle (A+B)C+(A-B)D\rangle| &= |\Sigma_{a,b,c,d}P(a,b,c,d)[(a+b)c+(a-b)d]| \\ &\leqslant \Sigma_{a,b,c,d}P(a,b,c,d)[(a+b)c+(a-b)d] \\ &= ۲ \end{aligned} \tag{۴.۱}$$

نامساوی بالا را نامساوی بل می نامند. این نتیجه همچنین با عنوان نامساوی $CHSH$ نیز شناخته می شود. در واقع این نامساوی بخشی از یک نامساوی بزرگتر است که اولین بار توسط جان بل معرفی شد.

ولی تا کنون آزمایش های زیادی انجام شده که این نامساوی را نقض کرده است. یعنی طبیعت نامساوی بل را نقض می کند، پس حداقل یکی از فرض هایی که در بدست آوردن این نامساوی شده اشتباه است.

حال می خواهیم آزمایشی معرفی کنیم که در آن نامساوی بل نقض می شود. فرض کنید مشاهده پذیرهای A و B و C و D به شکل زیر هستند:

$$\begin{aligned} A &= S_x \\ B &= S_z \\ C &= \frac{(S_x+S_z)}{\sqrt{۲}} \\ D &= \frac{(-S_x+S_z)}{\sqrt{۲}} \end{aligned} \tag{۵.۱}$$

مطابق مکانیک کوانتومی مقدار متوسط $(A+B)C+(A-B)D$ نسبت به حالت اولیه ی $|\psi\rangle$ به شکل

زیر است:

$$\langle\psi|(S_x + S_z)\frac{(S_x + S_z)}{\sqrt{۲}} + (S_x - S_z)\frac{(-S_x + S_z)}{\sqrt{۲}}|\psi\rangle \qquad (۶.۱)$$

اگر حالت اولیه یک حالت یکتایی به شکل $|\psi\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(|+-\rangle - |-+\rangle)$ در نظر بگیریم، پس از کمی محاسبات

$$|\langle(A+B)C + (A-B)D\rangle| = ۲\sqrt{۲} \qquad (۷.۱)$$

که ناقض نامساوی بل است. در واقع بیشترین مقداری که برای این مقدار متوسط می توان بدست آورد همین $۲\sqrt{۲}$ است.این مقدار بیشینه به ازای هر یک از چهار حالت زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned}
&\frac{۱}{\sqrt{۲}}(|+-\rangle - |-+\rangle)\\
&\frac{۱}{\sqrt{۲}}(|+-\rangle + |-+\rangle)\\
&\frac{۱}{\sqrt{۲}}(|++\rangle + |--\rangle)\\
&\frac{۱}{\sqrt{۲}}(|++\rangle - |--\rangle)
\end{aligned} \qquad (۸.۱)$$

هر یک از حالات بالا به عنوان یک حالت بل شناخته می شود و بیشینه ی درهم تنیدگی در فضای دو کیوبیتی را دارند. نامساوی بل به ما نشان می دهد که درهم تنیدگی مفهوم جدیدی است که تفاوت زیادی مفاهیم کلاسیکی دارد.

در واقع یکی از وظایف اصلی شاخه ی محاسبات کوانتومی و اطلاعات کوانتومی استفاده از درهم تنیدگی در انجام محاسبات است. انتظار می رود محاسبات کوانتومی قابلیت و توانایی بیشتری در اختیار ما قرار دهند.

۳.۱.۱ پایه های بل

یکی از مفاهیم مکانیک کوانتومی که مشابه کلاسیکی ندارد، درهم تنیدگی[۱] است. حالت دو کیوبیتی زیر را در نظر بگیرید:

$$|S\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(|۱۰\rangle) - (|۰۱\rangle) \qquad (۹.۱)$$

[۱]Entanglement

که در آن $\langle 0|$حالتی است که اسپین در جهت مثبت محور Z قرار دارد و $\langle 1|$مربوط به جهت منفی آن است. فرض کنید که کیوبیت اول دست آلیس و کیوبیت دوم دست باب باشد. اگر آلیس اسپین کیوبیت خودش را در راستای Z اندازه بگیرد، احتمال بدست آوردن اسپین بالا یا پایین ۱/۲است ولی اگر آلیس تشخیص دهد که اسپین ذره اش در حالت بالا (پایین) است، اسپین کیوبیت باب حتما در حالت پایین (بالا) است. این موضوع بیانگر نوعی همبستگی بین دو کیوبیت است. به طوری که حتی اگر آلیس و باب فاصله ی فضاگونه از هم داشته باشند، این همبستگی وجود دارد. اما این همبستگی کلاسیک نیست. برای روشن شدن مطلب رابطه ی بالا را در پایه X می نویسیم، با توجه به روابط زیر داریم:

$$\begin{aligned} |0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) \\ |1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle) \end{aligned} \tag{۱۰.۱}$$

بنابراین:

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle) \tag{۱۱.۱}$$

حال اگر آلیس به طور دلخواه S_x و S_z را اندازه گیری کند ولی باب تنها توانایی اندازه گیری S_x را داشته باشد دو حالت ممکن است رخ دهد:

الف)آلیس و باب هر دو S_x را اندازه گیری کنند در این صورت اگر نتیجه ی اندازه گیری آلیس + باشد نتیجه ی اندازه گیری باب حتما - است، یعنی یک همبستگی کامل بین آلیس و باب وجود دارد.

ب)آلیسS_x و S_z را اندازه گیری کند، در این صورت مستقل از اندازه گیری آلیس، باب با احتمال ۱/۲، S_x ذره اش را + یا - بدست می آورد. وهیچ همبستگی بین نتیجه ی اندازه گیری آلیس و باب دیده نمی شود. بنابراین وجود همبستگی بین نتایج، بستگی به این دارد که آلیس و باب چه اندازه گیری هایی انجام بدهند. در مکانیک کوانتومی اندازه گیری یک فرآیند گزینشی است. یعنی وقتی که آلیس حالت کیوبیت خود را $\langle +|$ می بیند کل سیستم حالت $\langle -+|$ را گزینش کرده است و بنابراین اگر باب S_xکیوبیتش را اندازه بگیرد حتما - بدست خواهد آورد.

اگر $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_a|1\rangle_b + |1\rangle_a|1\rangle_b)$ باشد و همچنین بتوان این حالت را به صورت $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_a + |1\rangle_a) \otimes |1\rangle_b$ نوشت این حالت جدایی پذیر و در غیر اینصورت درهم تنیده است. آن چه که واضح است که اگر بخواهیم برای انتقال اطلاعات از ویژگی های مکانیک کوانتومی استفاده کنیم باید حالت های درهم تنیده را به کار ببریم و احتمالا بیشترین تفاوتی که با حالت کلاسیکی حاصل می شود ناشی از به کارگیری حالت هایی با بیشینه ی درهم تنیدگی است.

۴.۱.۱ حالت های خالص و آمیخته

حالت یک سیستم کوانتومی را همیشه نمی توان با یک بردار حالت خاص نشان داد. بعضی از سیستم های کوانتومی آمیزه ای از حالت هایی هستند که با بردارهای حالت $\langle\psi_i|$ توصیف می شوند. لذا برای توصیف این سیستم ناگزیر از ماتریسی به صورت زیر استفاده می کنیم:

$$\rho = \Sigma_i(\alpha_i)(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|) \qquad (۱۲.۱)$$

که در آن α_i احتمال حضور $\langle\psi_i|$ در آنسامبل حالت هاست. ماتریس فوق ماتریس چگالی سیستم خوانده می شود. بنابراین می توان گفت که به طور کلی در مکانیک کوانتومی حالت یک سیستم با یک ماتریس چگالی توصیف می گردد.

دسته ای از ماتریس های چگالی هستند که رابطه ی ρ= $\rho^۲$ برایشان صادق است. این ماتریس ها مربوط به حالت های خالص اند[۱] و دارای تریس یک هستند.

حالت های آمیخته[۲]: برای مثال آنسامبلی از حالت های خالص در نظر می گیریم که ۳۰ درصد آنها در راستای $\langle X_+|$ و ۷۰ درصد آنها در راستای $\langle Z_+|$ باشد. برای توصیف یک حالت از درون این آنسامبل که اصطلاحاً حالت آمیخته نامیده می شود باید این توزیع آماری را در نظر گرفت و ناگزیر حالت سیستم را با ماتریس چگالی زیر توصیف کرد:

$$\rho = ۰/۳(|X_+\rangle\langle X_+|) + ۰/۷(|Z_+\rangle\langle Z_+|) \qquad (۱۳.۱)$$

فرض کنید یک سیستم از دو جزء A و B تشکیل شده باشد مثلاً می توان یکی از آن ها را یک فوتون و دیگری را یک فیبر نوری در نظر گرفت. بنابر اصول مکانیک کوانتومی این سیستم متعلق به فضای هیلبرت $H_{AB} = (H_A) \otimes (H_B)$ می باشد که در آن H_A به معنای فضای هیلبرت فوتون و H_B به معنای فضای هیلبرت فیبر نوری است. فرض کنید $_A\langle i|$و $_B\langle\mu|$ به ترتیب پایه های فضای هیلبرت برای فضای Aو Bباشند. در اینصورت نمی توان به سیستم A بردار حالت مجزایی اختصاص داد بلکه باید آن را با ماتریس چگالی توصیف کرد. حالت سیستم کل در فضای هیلبرت $H_{AB} = (H_A) \otimes (H_B)$ به صورت زیر است:

$$|\psi_{AB}\rangle = \Sigma(a_{i\mu})|i_A\rangle|\mu_B\rangle \qquad (۱۴.۱)$$

---

[۱] Pure State

[۲] Mixed State

که ماتریس چگالی به صورت زیر است:

$$\rho_{AB} = |\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}| \tag{۱۵.۱}$$

برای بدست آوردن ماتریس چگالی A و B به طور مجزا می توان از روابط زیر استفاده کرد:

$$\begin{aligned} \rho_A &= Tr_B(\rho_{AB}) \\ \rho_B &= Tr_A(\rho_{AB}) \end{aligned} \tag{۱۶.۱}$$

۲.۱ انتقال اطلاعات کوانتومی

در این قسمت می خواهیم بدانیم که چگونه مکانیک کوانتومی می تواند به شیوه ی بسیار موثر در انتقال اطلاعات کوانتومی به کارگرفته شود. در مخابره ی اطلاعات کوانتومی چه از حیث نظری وچه از جنبه ی تجربی پیشرفت های به سزایی صورت گرفته است. آنچه که در انتقال اطلاعات کوانتومی نقش اساسی را دارد خاصیت غیر موضعی بودن مکانیک کوانتومی و وجود حالت های درهم تنیده است. در اینجا نمونه هایی از فرآیندهایی را خواهیم داشت که طی آنها حالت های درهم تنیده برای انتقال اطلاعات استفاده می شوند. قبل از بررسی این فرآیندها بهتر است چهار حالت بل با درهم تنیدگی بیشینه را معرفی کنیم. این حالات در انتقال کوانتومی اطلاعات نقش اساسی را دارند. حالت های بل برای کیوبیت ها عبارتند از:

$$\begin{aligned} |\phi_+\rangle &= \frac{۱}{\sqrt{۲}}(|۰۰\rangle + |۱۱\rangle) \\ |\psi_+\rangle &= \frac{۱}{\sqrt{۲}}(|۰۱\rangle + |۱۰\rangle) \\ |\phi_-\rangle &= \frac{۱}{\sqrt{۲}}(|۰۰\rangle - |۱۱\rangle) \\ |\psi_-\rangle &= \frac{۱}{\sqrt{۲}}(|۰۱\rangle - |۱۰\rangle) \end{aligned} \tag{۱۷.۱}$$

این حالت ها یک پایه متعامد یکه برای فضای دو کیوبیت تشکیل می دهند.

$$\begin{aligned} \langle\phi_{mn}|\phi_{kl}\rangle &= \delta_{mk}\delta_{nl} \\ \Sigma_{m,n}|\phi_{mn}\rangle\langle\phi_{mn}| &= I \end{aligned} \tag{۱۸.۱}$$

از این پس منظور از اندازه گیری در پایه ی بل یعنی اندازه گیری که حالت کوانتومی را روی یکی از چهار حالت بل تصویر کند. با این مقدمه ی کوتاه می توان به بیان فرآیندهای انتقال اطلاعات کوانتومی پرداخت.

در فرابرد کوانتومی [۱] هدف آن است که با مخابره ی اطلاعات کلاسیک که طبیعتاً باسرعت نور انجام می گیرد حالت کوانتومی یک شی را به نقطه ای دور دست انتقال دهیم. در ساده ترین حالت فرض کنید که آلیس (A) می خواهد حالت یک فوتون یا الکترون $|V\rangle_c = \alpha|۰\rangle_c + \beta|۱\rangle_c$ را به همکار خود باب (B) که در نقطه ی دور دست واقع است انتقال دهد. فرض ما این است که باب الکترونی دارد که در یک حالت معین قرار دارد و می خواهد با استفاده از اطلاعاتی که آلیس به او می دهد کاری کند که الکترونش حالت $|V\rangle$ را اختیار کند. مستقیم ترین راه برای این کار آن است که آلیس مقادیر دو عدد مختلط α و β را به باب مخابره کند و او با اعمال یک عملگر کوانتومی حالت الکترونش را به حالتی که دست آلیس است تبدیل کند. اما این کار دو اشکال اساسی دارد، اول اینکه مخابره ی دو عدد مختلط احتیاج به مخابره ی بینهایت اطلاعات دارد. دوم اینکه معلوم نیست که آلیس حالت الکترونی که در دست دارد بداند که بخواهد برای باب مخابره کند.

در فرابرد کوانتومی با استفاده از درهم تنیدگی این امکان به وجود می آید که بتوانیم حتی حالت های ناشناخته را با مخابره ی حداقل تعداد بیت به نقاط دور دست انتقال دهیم. حالت$|\phi_+\rangle_{AB} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(|۰۰\rangle + |۱۱\rangle)$ را که بین آلیس و باب به اشتراک گذاشته شده در نظر بگیرید، کیوبیت اول دست آلیس و کیوبیت دوم دست باب است.

همان گونه که گفتیم $\{|\phi_+\rangle, |\phi_-\rangle, |\psi_+\rangle, |\psi_-\rangle\}$ یک پایه ی متعامد یکه برای فضای دو کیوبیت A و B تشکیل می دهد.

از طرفی $\{|۰۰\rangle, |۰۱\rangle, |۱۰\rangle, |۱۱\rangle\}$ نیز یک پایه ی متعامد یکه برای فضای جدید است که بر حسب پایه های بل بیان می شوند:

$$\begin{aligned}
|۰۰\rangle &= \frac{۱}{\sqrt{۲}}(|\phi_+\rangle + |\phi_-\rangle)\\
|۱۱\rangle &= \frac{۱}{\sqrt{۲}}(|\phi_+\rangle - |\phi_-\rangle)\\
|۰۱\rangle &= \frac{۱}{\sqrt{۲}}(|\psi_+\rangle + |\psi_-\rangle)\\
|۱۰\rangle &= \frac{۱}{\sqrt{۲}}(|\psi_+\rangle - |\psi_-\rangle)
\end{aligned} \tag{۱۹.۱}$$

سیستم جدید ترکیبی از سه کیوبیت در حالت $|V\rangle_c \otimes |\phi^+\rangle_{AB}$ است که اگر سیستم CA را در پایه ی بل بنویسیم، داریم:

[۱] teleportation

$$
\begin{aligned}
|V\rangle_c \otimes |\phi^+\rangle_{AB} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|000\rangle_{CAB} + \alpha|011\rangle_{CAB} + \beta|100\rangle_{CAB} + \beta|111\rangle_{CAB}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|00\rangle_{CA}|0\rangle_B + \alpha|01\rangle_{CA}|1\rangle_B + \beta|10\rangle_{CA}|0\rangle_B + \beta|11\rangle_{CA}|1\rangle_B) \\
&= \frac{1}{2}[\alpha(|\phi_+\rangle + |\phi_-\rangle)_{CA}|0\rangle_B + \alpha(|\psi_+\rangle + |\psi_-\rangle)_{CA}|1\rangle_B \\
&+ \beta(|\psi_+\rangle - |\psi_-\rangle)_{CA}|0\rangle_B + \beta(|\phi_+\rangle - |\phi_-\rangle)_{CA}|1\rangle_B] \\
&= \frac{1}{2}[|\phi^+\rangle_{CA}(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)_B + |\phi^-\rangle_{CA}(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle)_B \\
&+ |\psi^+\rangle_{CA}(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)_B + |\psi^-\rangle_{CA}(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)_B]
\end{aligned}
\tag{۲۰.۱}
$$

به عبارت دیگر:

$$
\begin{aligned}
|V\rangle_c \otimes |\phi^+\rangle_{AB} = \frac{1}{2}[&|\phi^+\rangle_{CA} \otimes U_1|V\rangle_B + |\phi^-\rangle_{CA} \otimes U_2|V\rangle_B \\
&+ |\psi^+\rangle_{CA} \otimes U_3|V\rangle_B + |\psi^-\rangle_{CA} \otimes U_4|V\rangle_B]
\end{aligned}
\tag{۲۱.۱}
$$

آلیس دو کیوبیتی که در اختیار دارد را در پایه ی بل اندازه گیری می کند، که حاصل اندازه گیری یکی از چهار حالت بالا است. در نتیجه عملگرهای اندازه گیری آلیس عبارتند از:

$$
\begin{aligned}
M_1 &= |\phi^+\rangle\langle\phi^+| \qquad , \qquad M_2 = |\phi^-\rangle\langle\phi^-| \\
M_3 &= |\psi^+\rangle\langle\psi^+| \qquad , \qquad M_4 = |\psi^-\rangle\langle\psi^-|
\end{aligned}
\tag{۲۲.۱}
$$

پس کیوبیت باب به حالت $|V\rangle$ کاهش پیدا می کند. در واقع بسته به حاصل اندازه گیری آلیس، کیوبیت باب به یکی از حالت های زیر تبدیل می شود:

$$
\begin{aligned}
M_1 &\Longrightarrow U_1|V\rangle \qquad , \qquad M_2 \Longrightarrow U_2|V\rangle \\
M_3 &\Longrightarrow U_3|V\rangle \qquad , \qquad M_4 \Longrightarrow U_4|V\rangle
\end{aligned}
\tag{۲۳.۱}
$$

حال فرض کنید که آلیس بعد از اندازه گیری، حاصل را با تلفن به باب گزارش کند. اگر حاصل اندازه گیری توسط آلیس m باشد باب با اعمال U_m روی کیوبیت خود، $|V\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ را بدست می آورد. بنابراین در این روش اطلاعات با امنیت کامل ارسال می گردد.

۳.۱ نظریه اطلاعات کلاسیک

۱.۳.۱ آنتروپی شانون

آنتروپی شانون[۱] یکی از مهم ترین مفاهیم نظریه اطلاعات کلاسیک است [۲]. متغیر تصادفی x را در نظر بگیرید، آنتروپی شانون متغیر x، به طور متوسط بیانگر میزان اطلاعاتی است که ما با آگاه شدن از مقدار متغیر x، کسب می کنیم، یا اینکه می توان گفت آنتروپی متغیرx بیانگر میزان ناآگاهی ما از متغیر x، قبل از اندازه گیری مقدار آن است. این دو تعبیر کاملاً معادل اند. یعنی می توان آنتروپی را به عنوان ناآگاهی قبل از اندازه گیری متغیر x یا اطلاعات بدست آمده بعد از اندازه گیری آن تعبیر کرد. آنتروپی شانون به صورت زیر است:

$$S(x) = -\Sigma_x P_x \log P_x \tag{۲۴.۱}$$

که P_x ها احتمالات و $\log$هم در پایه ۲ است. تابع فوق تمام ویژگی هایی که برای یک تابع اطلاعات لازم است و متعاقباً ذکر می شود، داراست. اما این خواص تنها دلایلی نبودند که سبب شوند شانون این تابع را به عنوان تابع اطلاعات برگزیند، در حقیقت بهترین دلیل برای تعریف تابع اطلاعات به صورت معادله $S(x)$ بیانگر میزان حافظه ای است که برای ذخیره سازی اطلاعات متغیر تصادفیx لازم است. هرگاه دو متغیر تصادفی (x, y)داشته باشیم که لزوما از هم مستقل نباشند، تابع آنتروپی یا اطلاعات به طور طبیعی به شکل زیر تعریف می شود:

$$H(x,y) = -\Sigma_{i,j} P(x_i, y_j) \log_2 P(x_i, y_j) \tag{۲۵.۱}$$

در حالتی که دو متغیر تصادفی مستقل باشند یعنی $P(x_i, y_j) = p(x_i)q(y_j)$،رابطه ی بالا رابطه ی زیر را نتیجه می دهد:

$$H(x,y) = H(x) + H(y) \tag{۲۶.۱}$$

که این تعریف به بیش از دو متغیر هم می تواند تعمیم یابد.

۲.۳.۱ اطلاعات شرطی کلاسیکی

دو متغیر تصادفیX ، Y که توزیع آنها با تابع $P(X, Y)$ مشخص می شود در نظر می گیریم. فرض کنید که مقدار یکی از متغیرهای تصادفی مثل Yرا می دانیم و این مقدار برابر است باy_j . در این صورت توزیع تصادفی X عوض خواهد شد و تبدیل خواهد شد به توزیع $P(X|y_j)$ که در آن y_j یک پارامتر است و X مقادیر متغیر را به خود می گیرد. می دانیم که:

---

[۱] Shannon Entropy