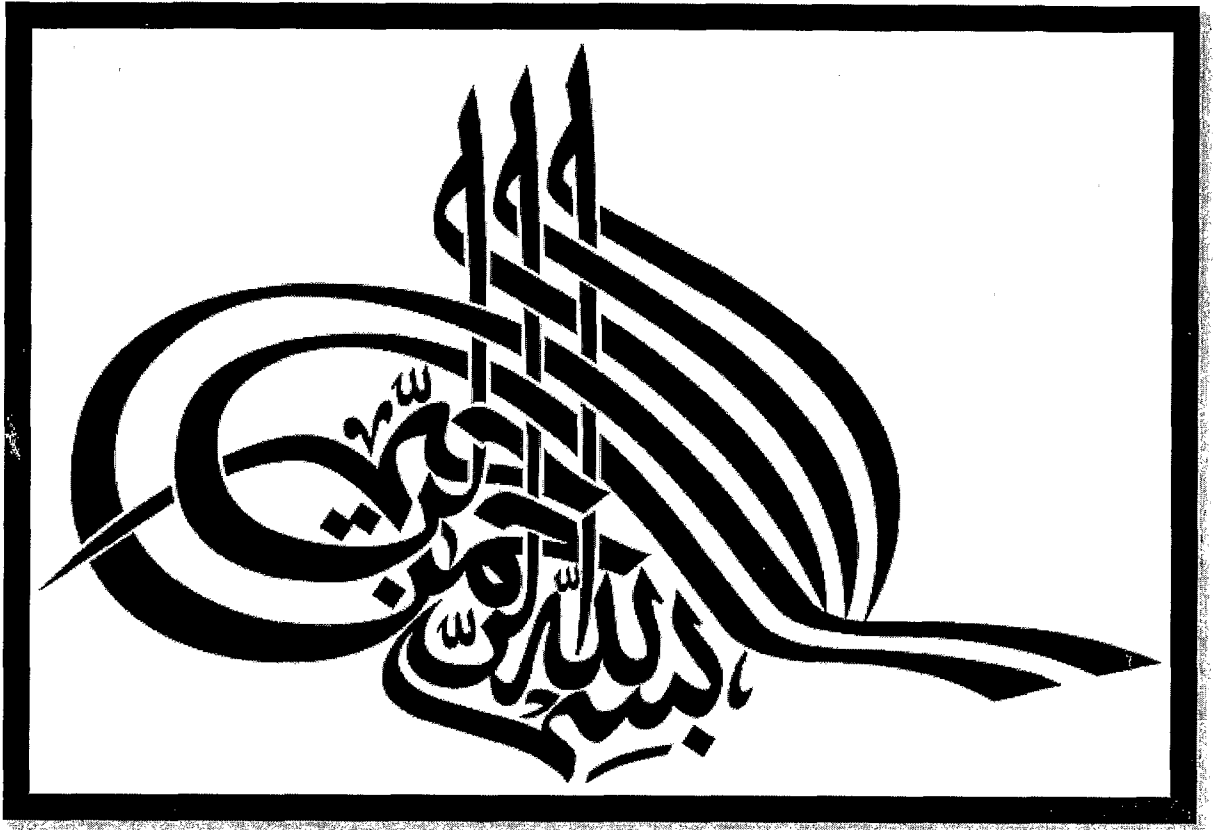
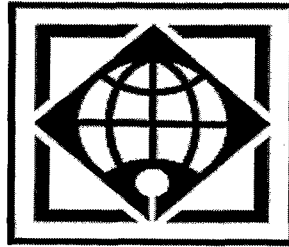


۱۸۷۱/۱۰۸۰۷
۱۸۷۱/۲۲



۱۱۱۰۸۰

۸۷/۱/۱۵۸۰۷۱
۸۸/۱/۵۵



دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

موضوع:

مشتقات درجه دوم ساده از دو متغیر

نگارش:

فرشید عدالتی فرد

کتابخانه
دانشگاه بین المللی امام خمینی
تهران

استاد راهنما:

دکتر محمد اخوی زادگان

۱۳۸۸ / ۱ / ۲۰

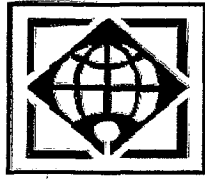
استاد مشاور:

دکتر شیرویه پیروی

رساله برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی

محض (گرایش جبر)

۱۱۱۰۸۰

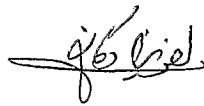


دانشگاه بین المللی امام خمینی

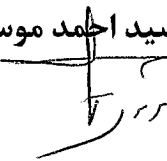
دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

جلسه دفاع از پایان نامه ی آقای فرشید عدالتی فرد دانشجوی مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض، گرایش جبر، در تاریخ ۱۳۸۷/۱۰/۸ تحت عنوان مشتقات درجه دوم ساده از دو متغیر، در دانشگاه تشکیل گردید و مورد تایید نهایی هیات محترم داوران به شرح ذیل قرار گرفت:

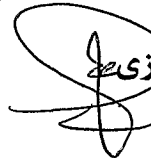
۱- استاد راهنما : آقای دکتر محمد اخوی زادگان 

۲- استاد مشاور : آقای دکتر شیرویه پیروی 

۳- داور خارجی : آقای دکتر سید احمد موسوی 

۴- داور داخلی : آقای دکتر علی آبکار 



۵- نماینده تحصیلات تکمیلی : آقای دکتر عزیزا... عزیزی 

تقدیم به

او که سر آغاز هر چیز است

تقدیم به پدر دلسوزم

پدری که طلوع تمام خوبی هاست

به بزرگی آسمان، به مهربانی خورشید و به سخاوت ابر

آغاز مهربانی هایش برایم گم شده و پایانش ناپیداست

تقدیم به مادر فداکارم

که آغاز نگاهش شروع زندگی ام بود و تبسم لبانش شروعی دیگر

مقدس است و پاک و زلال

مادر از تو آموختم صبوری و خوب زیستن را

تقدیم به همسر مهربانم

او که شکوه لحظاتم را در زلال نگاهش می بینم

تقدیر و تشکر

شکر و سپاس فراوان، خداوند را که یگانگی، صفت او، و جلال و عظمت و مجد و بها، خاصیت اوست و از کمال وی هیچ آفریده آگاه نیست و جز وی هیچ کس را به حقیقت معرفت وی راه نیست.

بر خود لازم می دانم از استاد فرزانه جناب آقای دکتر محمد اخوی زادگان که در سرتاسر این پایان نامه با صبوری و نبوغ خود مرا یاری دادند، کمال تشکر را داشته باشم. همچنین از استاد ارجمند جناب آقای دکتر شیرویه پیروی که مشاوره ی این پایان نامه را قبول فرمودند و از جناب آقای دکتر موسوی که این پایان نامه را بدقت مطالعه نموده و در اصلاحات نهایی، اینجانب را راهنمایی فرمودند نیز کمال تشکر را دارم.

در آخر از دو خواهر عزیزم به خاطر زحماتی که در تایپ این پایان نامه کشیدند، کمال تشکر را دارم.

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱.....	نماد ها و اصطلاحات
۲.....	چکیده فارسی
۳.....	تاریخچه
۴.....	پیشگفتار
۶.....	فصل اول : تعاریف و قضایای پایه
۷.....	۱-۱ مشتقات حلقه ها و حلقه های چندجمله ای
۱۵.....	۲-۱ مشتقات ساده و چندجمله ای های داربوکس
۱۹.....	۳-۱ نظریه گالوا
۲۶.....	فصل دوم : چندجمله ای های داربوکس
۲۷.....	۱-۲ چندجمله ای های داربوکس و جواب های جبری
۳۲.....	۲-۲ چندجمله ای های داربوکس از مشتق Δ_p
۳۸.....	فصل سوم : معادلات ریکاتی
۳۹.....	۱-۳ یک رده از معادلات ریکاتی
۴۷.....	فصل چهارم : مشتقات ساده

۴۸ ۱-۴ ساده بودن مشتق Δ_p

۵۱..... ۲-۴ ساده بودن و مشتقات هم ارز

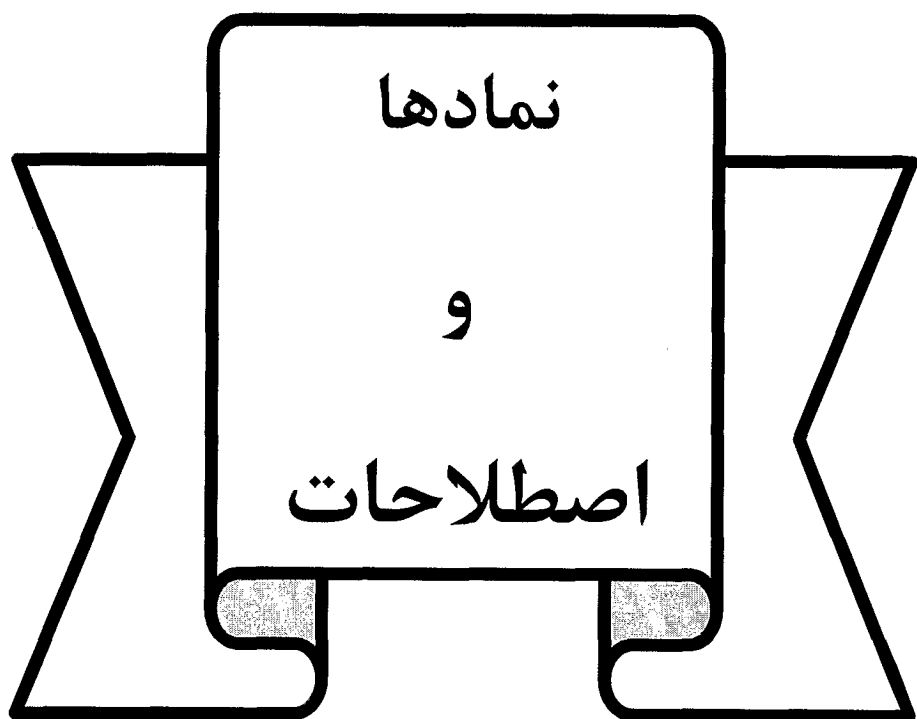
۵۴..... ۳-۴ حالت $\deg p(x) = 2$

۶۳..... ۴-۴ مثال هایی از n متغیر

۶۹..... منابع

۷۲..... واژه نامه

۷۷ چکیده انگلیسی



نمادها

و

اصطلاحات

تعاریف پایه ای در فصل ۱ بیان شده است.

در این پایان نامه، K یک میدان به طور جبری بسته از مشخصه $\neq 0$ باشد، مگر آن که به صراحت ذکر گردد.

همچنین F, L, M و N نشان دهنده ی میدان می باشند. $R = K[x_1, \dots, x_n]$ یک حلقه ی چندجمله ای تعویض پذیر یکدار از n متغیر روی میدان K می باشد. اگر R یک حلقه، و r_1, \dots, r_n عناصری از R باشند، ایده آلی از R که به وسیله ی این اعضا تولید می شوند را به صورت $r_1R + r_2R + \dots + r_nR$ یا $\sum r_i R$ نشان می دهیم.

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ و \mathbb{C} به ترتیب نشان دهنده ی مجموعه ی اعداد طبیعی، حلقه ی اعداد صحیح، میدان اعداد گویا، میدان اعداد حقیقی و میدان اعداد مختلط می باشد.

تصویر هر عنصر x تحت نگاشت f به صورت $f(x)$ نشان داده می شود، نه $f(x)$. ترکیب نگاشت های $f: X \rightarrow Y$ و $g: Y \rightarrow Z$ نیز به صورت $g \circ f$ می باشد. نگاشت $f: X \rightarrow Y$ یک به یک است اگر $f(x_1) = f(x_2)$ ، آن گاه $x_1 = x_2$ برای هر $x_1, x_2 \in X$. اگر $f(X) = Y$ ، پوشا و اگر f هم پوشا، هم یک به یک باشد f را دوسویی نامند.

رابطه ی شمول از مجموعه ها را با \subseteq نشان می دهیم. همچنین \subset ، رابطه ی شمول اکید می باشد. بنابراین $A \subset B$ به این معنی است که A مشمول در B و مساوی B نیست. نماد \in ، به معنای متعلق بودن و نماد \notin ، نشان دهنده ی متعلق نبودن می باشد. از اینرو $a \in A$ ، یعنی عنصر a متعلق به مجموعه ی A می باشد و $b \notin B$ ، یعنی عنصر b متعلق به مجموعه ی B نمی باشد.

پایان اثبات ها با ■ علامت گذاری شده اند.

چکیده

فرض کنید $K[x, y]$ یک حلقه ی چندجمله ای از دو متغیر روی یک میدان به طور جبری بسته ی K ، از مشخصه ی صفر باشد. مشتقی از این حلقه به صورت

$$\frac{\partial}{\partial x} + (y^2 + a(x)y + b(x)) \frac{\partial}{\partial y}$$

مشتق درجه دوّم نامیده می شود، که در آن $a(x)$ و $b(x) \in K[x]$.

در این پایان نامه مشتقاتی ساده از این نوع را مورد بررسی قرار می دهیم. هر چنین مشتقی هم ارز با

$$\Delta_p = \frac{\partial}{\partial x} + (y^2 - p(x)) \frac{\partial}{\partial y}$$

به ازای یک p مناسب، در $K[x]$ می باشد. به ازای یک p می توانیم ساده بودن Δ_p را نتیجه بگیریم.

اگر درجه ی p فرد باشد آن گاه Δ_p ساده است. اگر درجه ی p برابر ۲ باشد آن گاه Δ_p ساده است

اگر و تنها اگر p در یک شرط حسابی صدق نماید.

تاریخچه

خواص مشتق در حساب دیفرانسیل که از قدیم شناخته شده بود، توجه ریاضی دانان را به خود جلب کرد. در اینجا بود که آنان یک مشتق روی یک حلقه را، نگاشتی جمعی در نظر گرفتند که خاصیت لایب نیتزی را برای ضرب دو عنصر حلقه دارد.

در دهه ۱۹۵۰ میلادی ریت^۱ و کلوچین^۲ شاخه ی جدیدی در جبر پایه گذاری کردند که آن را جبر دیفرانسیل نامیدند. هم چنین در سال ۱۹۵۷، کاپلانسکی^۳ نیز در این زمینه کتابی را به رشته ی تحریر درآورد. این شاخه از جبر با بررسی مشتق حلقه ها، نتایجی را در هندسه بدست می آورد. باین وجود جبر دانان تمام فعالیت خود را در زمینه ی جبر محض متمرکز کرده اند. در این راستا نویکی^۴ در دانشگاه کوپرنیک لهستان، تحقیقات خود را بر روی حلقه ی چند جمله ای متمرکز کرده است که می توان آن ها را در مقالات و کتاب های ایشان یافت. در سال ۲۰۰۱ میلادی، نویکی به همراه دوتن از اساتید دیگر، در مقاله ی خود که بیشتر کار این پایان نامه نیز بر روی این مقاله بوده است، به بررسی مشتقات ساده درجه دوم از دومتغیر می پردازد.

^۱Ritt
^۲Klochin
^۳Kaplansky, I.
^۴Nowicki

پیش گفتار

این پایان نامه در ۴ فصل و ۱۰ بخش تدوین گردیده است.

فصل اول با عنوان تعاریف و قضایای پایه، شامل ۳ بخش می باشد. در بخش اول به تعاریف، بیان قضایا و اثبات قضایای اساسی در رابطه با مشتق ها و مشتق های حلقه ی چندجمله ای می پردازیم.

در بخش دوم، مشتقات ساده و چندجمله ای داربوکس^۱ از یک مشتق را معرفی می کنیم.

در بخش سوم به تعریف میدان شکافنده و گروه گالوا می پردازیم که نقش اساسی در فصل سوم این پایان نامه دارد.

فصل دوم با عنوان چند جمله ای های داربوکس، دارای دو بخش است. در بخش اول به اثبات قضایایی می پردازیم که رابطه ی میان وجود جواب معادلات دیفرانسیل مرتبه اول با ضرایب در $K(x)$ و وجود چندجمله ای داربوکس مشتقاتی از $K[x, y]$ ، را نشان می دهد.

در بخش دوم این فصل، مشتق Δ_p از $K[x, y]$ به صورت

$$\begin{cases} \Delta_p(x) = 1 \\ \Delta_p(y) = y^2 - p(x) \end{cases}$$

تعریف می شود. سپس به بررسی وجود چندجمله ای های داربوکس از مشتق Δ_p می پردازیم.

فصل سوم با عنوان معادلات ریکاتی شامل یک بخش است که در آن به دنبال جواب های جبری، از حالت خاصی از معادلات ریکاتی^۲ به صورت

$$y' = y^2 - p(x)$$

هستیم که در آن $p = p(x)$ چندجمله ای متعلق به $K[x]$ است. در واقع در این بخش نشان می دهیم که جواب های جبری این گونه معادلات به صورت گویا می باشند.

^۱Darboux

^۲Riccati

فصل چهارم با عنوان مشتقات ساده، شامل ۴ بخش است. در بخش اول، ابتدا قضیه ای ثابت می کنیم که نشان می دهد اگر مشتق Δp ساده نباشد، یک چندجمله ای داربوکس درجه ی یک از Δp وجود دارد. در ادامه ی این بخش ساده بودن مشتق Δp را بررسی می کنیم. درحقیقت نشان می دهیم اگر چندجمله ای $p(x)$ در تعریف Δp از درجه ی فرد باشد، آن گاه Δp ساده است. سپس قضیه ای ثابت می کنیم که نشان می دهد هر مشتق $d: K[x, y] \rightarrow K[x, y]$ ، به صورت

$$\begin{cases} d(x) = 1 \\ d(y) = y^2 \pm x^n, \quad \cdot \neq n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ساده است.

در بخش دوم این فصل به تعریف مشتقات هم ارز، بررسی ساده بودن مشتقات و ارتباط آن با هم ارز بودن مشتقات می پردازیم.

در بخش سوم حالتی را در نظر می گیریم که در آن $\text{deg}p(x) = 2$ یعنی مشتق Δp را وقتی $p = Ax^2 + Bx + C$ ، که در آن $A, B, C \in K$ و $A \neq 0$.

مشتق $\delta_e = \Delta_{x^2 - e}$ را به صورت

$$\begin{cases} \delta_e(x) = 1 \\ \delta_e(y) = y^2 - x^2 + e \end{cases}$$

معرفی می کنیم.

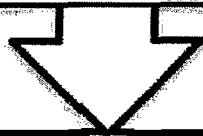
در نتیجه با استفاده از چندین لم در رابطه با این مشتقات، ثابت می کنیم که $e \in K$ ، یک عدد صحیح فرد است اگر و تنها اگر مشتق δ_e ساده نباشد.

در بخش چهارم این فصل به اثبات قضیه ای مهم از شمس الدین^۱ در مورد ساده بودن مشتقات می پردازیم که از نتایج آن، در بررسی ساده بودن مشتقات از حلقه های چندجمله ای n متغیره استفاده می شود.

^۱shamsuddin, A.

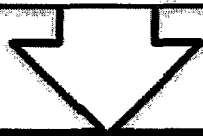
فصل اول

تعاريف و فضايای پایه



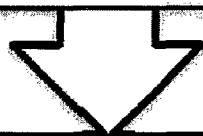
بخش اول

مشتقات حلقه ها و حلقه های چندجمله ای



بخش دوم

مشتقات ساده و چندجمله ای داربوکس



بخش سوم

نظریه گالوا

بخش اول : مشتق های حلقه ها و حلقه های چند جمله ای

در این بخش به تعاریف اساسی مشتق ها روی حلقه ها و حلقه های چند جمله ای می پردازیم .

تعریف ۱.۱.۱ : فرض کنید R یک حلقه و $d: R \rightarrow R$ یک نگاشت جمعی از R باشد. آن گاه

d را یک مشتق R گوئیم اگر برای هر x و y در R داشته باشیم :

$$d(xy) = xd(y) + d(x)y$$

مجموعه ی همه ی مشتق های R را با نماد $Der(R)$ نمایش می دهیم.

فرض کنید d, d_1, d_2 در $Der(R)$ باشند. آن گاه

$$\begin{aligned} & (d_1 + d_2)(xy) \\ &= d_1(xy) + d_2(xy) \\ &= xd_1(y) + d_1(x)y + xd_2(y) + d_2(x)y \\ &= x(d_1 + d_2)(y) + (d_1 + d_2)(x)y \end{aligned}$$

بنابراین $d_1 + d_2$ ، متعلق به $Der(R)$ است. فرض کنید x, y, z متعلق به R باشند، داریم :

$$xd(yz) = x(yd(z) + d(y)z)$$

بنابراین اگر R حلقه جابه جایی باشد آن گاه xd یک مشتق از R و در نتیجه xd متعلق به

$Der(R)$ است. پس اگر R یک حلقه جابه جایی باشد، $Der(R)$ یک $-R$ مدول است. اگر R

یک حلقه جابه جایی باشد و اگر برای d_1 و d_2 در $Der(R)$ داشته باشیم :

$$[d_\gamma, d_\delta] = d_\gamma d_\delta - d_\delta d_\gamma$$

آن گاه

$$\begin{aligned} & [d_\gamma, d_\delta](xy) \\ &= d_\gamma d_\delta(xy) - d_\delta d_\gamma(xy) \\ &= d_\gamma(xd_\delta(y) + d_\delta(x)y) - d_\delta(xd_\gamma(y) + d_\gamma(x)y) \\ &= xd_\gamma d_\delta(y) + d_\gamma(x)d_\delta(y) + d_\delta(x)d_\gamma(y) + d_\gamma d_\delta(x)y \\ &\quad - xd_\delta d_\gamma(y) - d_\delta(x)d_\gamma(y) - d_\gamma(x)d_\delta(y) - d_\delta d_\gamma(x)y \\ &= x(d_\gamma d_\delta(y) - d_\delta d_\gamma(y)) + (d_\gamma d_\delta(x) - d_\delta d_\gamma(x))y \\ &= x[d_\gamma, d_\delta](y) + [d_\gamma, d_\delta](x)y \end{aligned}$$

در نتیجه $[d_\gamma, d_\delta]$ یک مشتق از R می باشد.

تعریف ۲.۱.۱: فرض کنید K یک حلقه و R یک K -جبر باشد. آن گاه مشتق $d: R \rightarrow R$ را

یک K -مشتق R گوئیم، هرگاه برای هر عضو K مانند α و هر عضو R مانند x داشته باشیم:

$$d(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot d(x)$$

مجموعه K -مشتق های R را با نماد $Der_K(R)$ نمایش می دهیم.

گزاره ۳.۱.۱: فرض کنید d و d' در $Der(R)$ باشند و

$$A = \{x \in R \mid d(x) = d'(x)\}$$

آن گاه A زیرحلقه ی R است. اگر R یک میدان باشد آن گاه A زیر میدانی از R است.

برهان:

اگر x و y متعلق به A باشند، آن گاه $d(x) = d'(x)$ و $d(y) = d'(y)$. چون d و d' توابعی جمعی هستند، بنابراین $x - y$ متعلق به A است. از طرف دیگر

$$\begin{aligned} d(xy) &= xd(y) + d(x)y \\ &= xd'(y) + d'(x)y \\ &= d'(xy) \end{aligned}$$

در نتیجه xy متعلق به A است. همچنین \cdot متعلق به A است، بنابراین A زیرحلقه R است.

اگر R یک میدان باشد چون

$$\begin{aligned} d(1_R) &= d(1_R \cdot 1_R) \\ &= 2d(1_R) \\ \Rightarrow d(1_R) &= \cdot \end{aligned}$$

در نتیجه $d(1_R) = \cdot = d'(1_R)$ و 1_R متعلق به A است. اکنون داریم:

$$\cdot = d(1_R) = d(x \cdot x^{-1}) = xd(x^{-1}) + d(x)x^{-1}$$

$$\cdot = d'(1_R) = d'(x \cdot x^{-1}) = xd'(x^{-1}) + d'(x)x^{-1}$$

چون x متعلق به A است، در نتیجه

$$d(x^{-1}) = d'(x^{-1}) \Rightarrow x^{-1} \in A$$

بنابراین A یک زیر میدان R است. ■

در قسمت دوم این بخش به تعریف و اثبات قضایایی برای مشتق های حلقه های چند جمله ای

می پردازیم.

فرض کنید $R[X] = R[x_i | i \in I]$ حلقه ی چند جمله ای روی K - جبر R باشد به طوری که I

مجموعه ای از اعداد صحیح نامنفی است. می دانیم که مشتق های جزئی $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ، R - مشتق های

$R[X]$ هستند. فرض کنید d یک مشتق از $R[X]$ باشد به طوری که

$$\begin{cases} d(x_i) = 1 \\ d(x_j) = 0 \quad i \neq j \end{cases}$$

مشتق d بنا بر گزاره ی (۱.۱.۳) یکتاست. اگر $d: R \rightarrow R$ یک K - مشتق R باشد آن گاه \tilde{d} را

می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\begin{cases} \tilde{d}: R[X] \rightarrow R[X] \\ \tilde{d}(f) = \sum d(a_{q_1, q_2, \dots, q_n}) x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_n^{q_n} \end{cases}$$

که در آن $f = \sum a_{q_1, q_2, \dots, q_n} x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_n^{q_n}$. چون d یک K - مشتق از R است، پس \tilde{d} یک

مشتق است و برای هر i در I داریم $\tilde{d}(x_i) = 0$. فرض کنید $f: I \rightarrow R[X]$ یک تابع باشد.

مشتق

$$\begin{cases} D: R[X] \rightarrow R[X] \\ D(w) = \tilde{d}(w) + f(i_1) \frac{\partial w}{\partial x_{i_1}} + f(i_2) \frac{\partial w}{\partial x_{i_2}} + \dots + f(i_n) \frac{\partial w}{\partial x_{i_n}} \end{cases} \quad (1.1.1)$$

که در آن w متعلق به $R[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}]$ باشد را در نظر می گیریم. چون مشتق های \tilde{d} و $\frac{\partial}{\partial x_i}$ یکتا هستند بنابراین D منحصر به فرد است.

قضیه ۱.۱.۴: فرض کنید $K[X] = K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ یک حلقه ی چند جمله ای روی K باشد.

(۱) اگر f_1, \dots, f_n عناصری از $K[X]$ باشند، K -مشتق یکتای $d: K[X] \rightarrow K[X]$ موجود

است به طوری که $d(x_1) = f_1, \dots, d(x_n) = f_n$ و

$$d = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

(۲) $Der_K(K[X])$ یک R -مدول آزاد با پایه $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ است.

(۳) اگر d متعلق به $Der_K(K[X])$ و f عنصر دلخواهی از $K[X]$ باشد آن گاه

$$d(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} d(x_i)$$

برهان:

(۱) چون $\cdot: K \rightarrow K$ یک مشتق است، بنابراین $\tilde{d} = \cdot$ تابع

$$\begin{cases} F: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow K[X] \\ F(i) = f_i \end{cases}$$

را در نظر می گیریم. بنابراین چه گفته شد، $-K$ مشتق منحصر به فرد D از $K[X]$ وجود دارد به طوری که

$$\begin{cases} D: K[X] \rightarrow K[X] \\ D = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n} \end{cases}$$

بنابراین برای هر $1 \leq i \leq n$ داریم:

$$D(x_i) = f_i \frac{\partial(x_i)}{\partial x_i} = f_i$$

(۲) می دانیم $K[X]$ یک حلقه ی جابه جایی است، لذا $Der_K(K[X])$ یک $-R$ مدول است.

فرض کنید d عنصر دلخواهی از $Der_K(K[X])$ باشد. بنا بر (۱.۱.۱) برای هر $1 \leq i \leq n$

$$d(x_i) \in K[X] \Rightarrow \exists f_i \in K[X], \quad d(x_i) = f_i$$

بنابراین طبق بند (۱) مشتق منحصر به فرد D از $K[X]$ وجود دارد به طوری که

$$D = d(x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + d(x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + d(x_n) \frac{\partial}{\partial x_n}$$

فرض کنید

$$A = \{f \in K[X] \mid d(f) = D(f)\}$$

برای هر $1 \leq i \leq n$ داریم $D(x_i) = d(x_i)$ ، در نتیجه x_i در A است. برای هر α در K

$$D(\alpha) = d(\alpha) = \cdot \Rightarrow \alpha \in A$$