بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

موضوع :

مشتقات درجه دوم ساده از دو متغیر

نگارش :

فرشید عدالتی فرد

استاد راهنما:

دکتر محمد اخوی زادگان

استاد مشاور:

دکتر شیرویه پیروی

رساله برای دریافت درجه کارشناسی ارشد دررشته ریاضی محض (گرایش جبر)

دانشگاه بین المللی امام خمینی

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

جلسه دفاع از پایان نامه ی **آقای فرشید عدالتی فرد** دانشجوی مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض، گرایش جبر، در تاریخ ۱۳۸۷/۱۰/۸ تحت **عنوان مشتقات درجه دوم ساده از دو متغیر**، در دانشگاه تشکیل گردید و مورد تایید نهایی هیات محترم داوران به شرح ذیل قرارگرفت:

۱- استاد راهنما : **آقای دکتر محمد اخوی زادگان**

۲- استاد مشاور : **آقای دکتر شیرویه پیروی**

۳- داورخارجی : **آقای دکتر سید احمد موسوی**

۴- داور داخلی : **آقای دکتر علی آبکار**

۵- نماینده تحصیلات تکمیلی : **آقای دکترعزیزا... عزیزی**

اداره تحصیلات تکمیلی
حوزه آموزشی
دانشگاه بین المللی امام خمینی

تقدیم به

او که سرآغاز هر چیز است

تقدیم به پدر دلسوزم

پدری که طلوع تمام خوبی هاست

به بزرگی آسمان، به مهربانی خورشید و به سخاوت ابر

آغاز مهربانی هایش برایم گم شده و پایانش ناپیداست

تقدیم به مادر فداکارم

که آغاز نگاهش شروع زندگی ام بود و تبسم لبانش شروعی دیگر

مقدس است و پاک و زلال

مادر از تو آموختم صبوری و خوب زیستن را

تقدیم به همسر مهربانم

او که شکوه لحظاتم را در زلال نگاهش می بینم

تقدیر و تشکر

شکر و سپاس فراوان، خداوند را که یگانگی، صفت او، و جلال و عظمت و مجد و بها، خاصیت اوست و از کمال وی هیچ آفریده آگاه نیست و جز وی هیچ کس را به حقیقت معرفت وی راه نیست.

بر خود لازم می دانم از استاد فرزانه جناب آقای دکتر محمد اخوی زادگان که در سرتاسر این پایان نامه با صبوری و نبوغ خود مرا یاری دادند، کمال تشکر را داشته باشم. همچنین از استاد ارجمند جناب آقای دکتر شیرویه پیروی که مشاوره ی این پایان نامه را قبول فرمودند و از جناب آقای دکتر موسوی که این پایان نامه را بدقت مطالعه نموده و در اصلاحات نهایی، اینجانب را راهنمایی فرمودند نیز کمال تشکر را دارم.

در آخر از دو خواهر عزیزم به خاطر زحماتی که در تایپ این پایان نامه کشیدند، کمال تشکر را دارم.

فهرست مطالب

عنوان صفحه

نمادها

و

اصطلاحات

تعاریف پایه ای در فصل ۱ بیان شده است.

در این پایان نامه، K یک میدان به طور جبری بسته از مشخصه ی صفر می باشد، مگر آن که به صراحت ذکر گردد.

همچنین F ، L ، M و N نشان دهنده ی میدان می باشند. $R = K[x_1, \ldots, x_n]$، یک حلقه ی چندجمله ای تعویض پذیر یکدار از n متغیر روی میدان K می باشد. اگر R یک حلقه، و $r_1, \ldots, r_n$ عناصری از R باشند، ایده آلی از R که به وسیله ی این اعضا تولید می شوند را به صورت $r_1R + r_2R \ldots + r_nR$ یا $\sum r_i R$ یا $\left(r_1, \ldots, r_n\right)$ نشان می دهیم.

$\mathbb{N}$، $\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Q}$ ، $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ به ترتیب نشان دهنده ی مجموعه ی اعداد طبیعی، حلقه ی اعدادصحیح، میدان اعداد گویا، میدان اعدادحقیقی و میدان اعداد مختلط می باشد.

تصویر هر عنصر x تحت نگاشت f به صورت $f(x)$ نشان داده می شود، نه $(x)f$. ترکیب نگاشت های $f: X \longrightarrow Y$ و $g: Y \longrightarrow Z$ نیز به صورت $g \circ f$ می باشد. نگاشت $f: X \longrightarrow Y$ یک به یک است اگر $f(x_1) = f(x_2)$ ، آن گاه $x_1 = x_2$ برای هر $x_1, x_2 \in X$. اگر $f(X) = Y$، f پوشا و اگر f هم پوشا، هم یک به یک باشد f را دوسویی نامند.

رابطه ی شمول از مجموعه ها را با $\subseteq$ نشان می دهیم. همچنین $\subset$ ، رابطه ی شمول اکید می باشد. بنابراین $A \subset B$ به این معنی است که A مشمول در B و مساوی B نیست. نماد $\in$، به معنای متعلق بودن و نماد $\notin$، نشان دهنده ی متعلق نبودن می باشد. ازاینرو $a \in A$، یعنی عنصر a متعلق به مجموعه ی A می باشد و $b \notin B$، یعنی عنصر b متعلق به مجموعه ی B نمی باشد.

پایان اثبات ها با ■ علامت گذاری شده اند.

چکیده

فرض کنید $K[x,y]$ یک حلقه ی چندجمله ای از دو متغیر روی یک میدان به طورجبری بسته ی K، از مشخصه ی صفر باشد. مشتقی از این حلقه به صورت

$$\frac{\partial}{\partial x} + \left(y^{2} + a(x)y + b(x)\right)\frac{\partial}{\partial y}$$

مشتق درجه دوّم نامیده می شود، که در آن $a(x)$ و $b(x) \in K[x]$.

در این پایان نامه مشتقاتی ساده از این نوع را مورد بررسی قرار می دهیم. هر چنین مشتقی هم ارز با

$$\Delta_p = \frac{\partial}{\partial x} + (y^{2} - p(x))\frac{\partial}{\partial y}$$

به ازای یک p مناسب، در $K[x]$ می باشد. به ازای یک p می توانیم ساده بودن Δ_p را نتیجه بگیریم. اگر درجه ی p فرد باشد آن گاه Δ_p ساده است. اگر درجه ی p برابر ۲ باشد آن گاه Δ_p ساده است اگر و تنها اگر p دریک شرط حسابی صدق نماید.

تاریخچه

خواص مشتق درحساب دیفرانسیل که از قدیم شناخته شده بود، توجه ریاضی دانان را به خود جلب کرد. دراینجا بود که آنان یک مشتق روی یک حلقه را، نگاشتی جمعی درنظرگرفتند که که خاصیت لایب نیتزی را برای ضرب دو عنصر حلقه دارد.

دردهه ۱۹۵۰ میلادی ریت[۱] و کلوچین[۲] شاخه ی جدیدی درجبرپایه گذاری کردند که آن را جبردیفرانسیل نامیدند. هم چنین درسال ۱۹۵۷، کاپلانسکی[۳] نیز دراین زمینه کتابی را به رشته ی تحریر درآورد. این شاخه ازجبر بابررسی مشتق حلقه ها، نتایجی را درهندسه بدست می آورد. بااین وجود جبردانان تمام فعالیت خود را در زمینه ی جبرمحض متمرکز کرده اند. دراین راستا نویکی[۴] دردانشگاه کوپرنیک لهستان، تحقیقات خودرا برروی حلقه ی چندجمله ای متمرکز کرده است که می توان آن هارا درمقالات و کتاب های ایشان یافت. درسال ۲۰۰۱ میلادی، نویکی به همراه دوتن ازاساتید دیگر، درمقاله ی خود که بیشترکاراین پایان نامه نیز برروی این مقاله بوده است، به بررسی مشتقات ساده درجه دوم از دومتغیر می پردازد.

---

[۱] Ritt
[۲] klochin
[۳] Kaplansky,I.
[۴] Nowicki

پیش گفتار

این پایان نامه در ۴ فصل و ۱۰ بخش تدوین گردیده است.

فصل اول با عنوان تعاریف و قضایای پایه ، شامل ۳ بخش می باشد. در بخش اول به تعاریف، بیان قضایا واثبات قضایای اساسی در رابطه با مشتق ها و مشتق های حلقه ی چندجمله ای می پردازیم.

در بخش دوم، مشتقات ساده و چندجمله ای داربوکس[۱] از یک مشتق را معرفی می کنیم.

در بخش سوم به تعریف میدان شکافنده و گروه گالوا می پردازیم که نقش اساسی در فصل سوم این پایان نامه دارد.

فصل دوم با عنوان چند جمله ای های داربوکس، دارای دو بخش است. در بخش اول به اثبات قضایایی می پردازیم که رابطه ی میان وجود جواب معادلات دیفرانسیل مرتبه اول با ضرایب در $K(x)$ و وجود چندجمله ای داربوکس مشتقاتی از $K[x,y]$، را نشان می دهد.

در بخش دوم این فصل، مشتق Δ_p از $K[x,y]$ به صورت

$$\begin{cases} \Delta_p(x) = ۱ \\ \Delta_p(y) = y^{۲} - p(x) \end{cases}$$

تعریف می شود. سپس به بررسی وجود چندجمله ای های داربوکس از مشتق Δ_p می پردازیم.

فصل سوم با عنوان معادلات ریکاتی شامل یک بخش است که درآن به دنبال جواب های جبری، از حالت خاصی از معادلات ریکاتی[۲] به صورت

$$y' = y^{۲} - p(x)$$

هستیم که در آن $p = p(x)$ چندجمله ای متعلق به $K[x]$ است. در واقع دراین بخش نشان می دهیم که جواب های جبری این گونه معادلات به صورت گویا می باشند.

[۱]Darboux
[۲]Riccati

فصل چهارم با عنوان مشتقات ساده، شامل ۴ بخش است. در بخش اول، ابتدا قضیه ای ثابت می کنیم که نشان می دهد اگر مشتق Δ_p ساده نباشد، یک چندجمله ای داربوکس درجه ی یک از Δ_p وجود دارد. در ادامه ی این بخش ساده بودن مشتق Δ_p رابررسی می کنیم. درحقیقت نشان می دهیم اگر چندجمله ای $p(x)$ در تعریف Δ_p، از درجه ی فرد باشد، آن گاه Δ_p ساده است. سپس قضیه ای ثابت می کنیم که نشان می دهد هر مشتق $d: K[x,y] \longrightarrow K[x,y]$، به صورت

$$\begin{cases} d(x) = ۱ \\ d(y) = y^۲ \pm x^n, \quad ۰ \neq n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ساده است.

در بخش دوم این فصل به تعریف مشتقات هم ارز، بررسی ساده بودن مشتقات و ارتباط آن با هم ارز بودن مشتقات می پردازیم.

در بخش سوم حالتی را درنظر می گیریم که درآن $deg p(x) = ۲$. یعنی مشتق Δ_p را وقتی $p = Ax^۲ + Bx + C$، که درآن $A, B, C \in K$ و $A \neq ۰$.

مشتق $\delta_e = \Delta_{x^۲ - e}$ را به صورت

$$\begin{cases} \delta_e(x) = ۱ \\ \delta_e(y) = y^۲ - x^۲ + e \end{cases}$$

معرفی می کنیم.

درنتیجه با استفاده از چندین لم دررابطه با این مشتقات، ثابت می کنیم که $e \in K$، یک عدد صحیح فرد است اگر و تنها اگر مشتق δ_e ساده نباشد.

در بخش چهارم این فصل به اثبات قضیه ای مهم از شمس الدین[1] در مورد ساده بودن مشتقات می پردازیم که ازنتایج آن، در بررسی ساده بودن مشتقات از حلقه های چندجمله ای n متغیره استفاده می شود.

[1] shamsuddin,A.

فصل اول

تعاریف و قضایای پایه

بخش اول

مشتقات حلقه ها و حلقه های چندجمله ای

بخش دوم

مشتقات ساده و چندجمله ای داربوکس

بخش سوم

نظریه گالوا

بخش اول : مشتق های حلقه ها و حلقه های چندجمله ای

دراین بخش به تعاریف اساسی مشتق ها روی حلقه ها و حلقه های چندجمله ای می پردازیم .

تعریف ۱. ۱. ۱ : فرض کنید R یک حلقه و $d: R \longrightarrow R$ یک نگاشت جمعی از R باشد. آن گاه d را یک مشتق R گوییم اگر برای هر x و y در R داشته باشیم :

$$d(xy) = xd(y) + d(x)y$$

مجموعه ی همه ی مشتق های R را با نماد $Der(R)$ نمایش می دهیم.

فرض کنید d،$d_۱$،$d_۲$ در $Der(R)$ باشند. آن گاه

$$\left(d_۱ + d_۲\right)(xy)$$

$$= d_۱(xy) + d_۲(xy)$$

$$= xd_۱(y) + d_۱(x)y + xd_۲(y) + d_۲(x)y$$

$$= x\left(d_۱ + d_۲\right)(y) + \left(d_۱ + d_۲\right)(x)y$$

بنابراین $d_۱ + d_۲$ ، متعلق به $Der(R)$ است. فرض کنید x،y،z متعلق به R باشند، داریم :

$$xd(yz) = x(yd(z) + d(y)z)$$

بنابراین اگر R حلقه جابه جایی باشد آن گاه xd یک مشتق از R و درنتیجه xd متعلق به $Der(R)$ است. پس اگر R یک حلقه جابه جایی باشد ، $Der(R)$ یک $R-$ مدول است . اگر R یک حلقه جابه جایی باشد و اگر برای $d_۱$ و $d_۲$ در $Der(R)$ داشته باشیم :

$$[d_1, d_2] = d_1 d_2 - d_2 d_1$$

آن گاه

$$\begin{aligned}
&[d_1, d_2](xy) \\
&= d_1 d_2(xy) - d_2 d_1(xy) \\
&= d_1(x d_2(y) + d_2(x) y) - d_2(x d_1(y) + d_1(x) y) \\
&= x d_1 d_2(y) + d_1(x) d_2(y) + d_2(x) d_1(y) + d_1 d_2(x) y \\
&- x d_2 d_1(y) - d_2(x) d_1(y) - d_1(x) d_2(y) - d_2 d_1(x) y \\
&= x\Big(d_1 d_2(y) - d_2 d_1(y)\Big) + \Big(d_1 d_2(x) - d_2 d_1(x)\Big) y \\
&= x [d_1, d_2](y) + [d_1, d_2](x) y
\end{aligned}$$

در نتیجه $[d_1, d_2]$ یک مشتق از R می باشد.

تعریف ۱. ۱. ۲ : فرض کنید K یک حلقه و R یک $K-$ جبر باشد. آن گاه مشتق $d: R \longrightarrow R$ را یک $K-$ مشتق R گوییم ، هرگاه برای هر عضو K مانند α و هر عضو R مانند x داشته باشیم :

$$d(\alpha . x) = \alpha . d(x)$$

مجموعه ی همه ی $K-$ مشتق های R رابا نماد $Der_K(R)$ نمایش می دهیم.

گزاره ۱. ۱. ۳ : فرض کنید d و d' در $Der(R)$ باشند و

$$A = \{x \in R | d(x) = d'(x)\}$$

آن گاه A زیرحلقه ی R است. اگر R یک میدان باشد آن گاه A زیر میدانی از R است.

برهان:

اگر x و y متعلق به A باشند، آن گاه $d(x) = d'(x)$ و $d(y) = d'(y)$. چون d و d' توابعی جمعی هستند، بنابراین $x - y$ متعلق به A است. از طرف دیگر

$$d(xy) = xd(y) + d(x)y$$

$$= xd'(y) + d'(x)y$$

$$= d'(xy)$$

درنتیجه xy متعلق به A است. همچنین ۰ متعلق به A است، بنابراین A زیرحلقه R است.

اگر R یک میدان باشد چون

$$d(۱_R) = d(۱_R . ۱_R)$$

$$= ۲d(۱_R)$$

$$\Longrightarrow d\left(۱_R\right) = ۰$$

درنتیجه $d'\left(۱_R\right) = ۰ = d\left(۱_R\right)$ و ۱_R متعلق به A است. اکنون داریم :

$$۰ = d\left(۱_R\right) = d\left(x . x^{-۱}\right) = xd(x^{-۱}) + d(x)x^{-۱}$$

$$۰ = d'\left(۱_R\right) = d'\left(x . x^{-۱}\right) = xd'(x^{-۱}) + d'(x)x^{-۱}$$

چون x متعلق به A است، درنتیجه

$$d\left(x^{-1}\right) = d'(x^{-1}) \Rightarrow x^{-1} \in A$$

بنابراین A یک زیر میدان R است.■

درقسمت دوم این بخش به تعریف و اثبات قضایایی برای مشتق های حلقه های چند جمله ای

می پردازیم.

فرض کنید $R[X] = R[x_i | i \in I]$ حلقه ی چند جمله ای روی $K-$ جبر R باشد به طوری که I مجموعه ای از اعداد صحیح نامنفی است. می دانیم که مشتق های جزیی $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ، $R-$ مشتق های $R[X]$ هستند. فرض کنید d یک مشتق از $R[X]$ باشد به طوری که

$$\begin{cases} d(x_i) = 1 \\ d(x_j) = 0 \qquad i \neq j \end{cases}$$

مشتق d بنا برگزاره ی (۱. ۱. ۳) یکتاست. اگر $d: R \longrightarrow R$ یک $K-$ مشتق R باشد آن گاه $\tilde{d}$ را می توان به صورت زیر تعریف کرد :

$$\begin{cases} \tilde{d}: R[X] \to R[X] \\ \tilde{d}(f) = \sum d\left(a_{q_1 q_2 \dots q_n}\right) x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_n^{q_n} \end{cases}$$

که درآن $f = \sum a_{q_1 q_2 \dots q_n} x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_n^{q_n}$. چون d یک $K-$مشتق از R است، پس $\tilde{d}$ یک مشتق است و برای هر i در I داریم $\tilde{d}(x_i) = 0$. فرض کنید $f: I \to R[X]$ یک تابع باشد.

مشتق

$$\begin{cases} D: R[X] \to R[X] \\ D(w) = \tilde{d}(w) + f\left(i_۱\right)\frac{\partial w}{\partial x_{i_۱}} + f\left(i_۲\right)\frac{\partial w}{\partial x_{i_۲}} + \cdots + f(i_n)\frac{\partial w}{\partial x_{i_n}} \end{cases} \qquad (۱.۱.۱)$$

که در آن w متعلق به $R\left[x_{i_۱}, x_{i_۲}, \dots, x_{i_n}\right]$ باشد را درنظر می گیریم. چون مشتق های $\tilde{d}$ و $\frac{\partial}{\partial x_i}$ یکتا هستند بنابراین D منحصر به فرد است.

قضیه۱. ۱ .۴: فرض کنید $K[X] = K\left[x_۱, x_۲, \dots, x_n\right]$ یک حلقه ی چند جمله ای روی K باشد.

۱) اگر $f_۱$، ...، f_n عناصری از $K[X]$ باشند، K- مشتق یکتای $d: K[X] \to K[X]$ موجود است به طوری که $d\left(x_۱\right) = f_۱$، ...، $d(x_n) = f_n$ و

$$d = f_۱\frac{\partial}{\partial x_۱} + f_۲\frac{\partial}{\partial x_۲} + \cdots + f_n\frac{\partial}{\partial x_n}$$

۲) $Der_k(K[X])$ یک $R-$مدول آزاد باپایه $\left\{\frac{\partial}{\partial x_۱}, \frac{\partial}{\partial x_۲}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ است.

۳) اگر d متعلق به $Der_k(K[X])$ و f عنصر دلخواهی از $K[X]$ باشد آن گاه

$$d(f) = \sum_{i=۱}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}d(x_i)$$

برهان:

۱) چون $K \to K$: ۰ یک مشتق است، بنابراین $\tilde{d} = ۰$. تابع

$$\begin{cases} F:\{۱ و ۲ و \dots و n\} \to K[X] \\ F(i) = f_i \end{cases}$$

را درنظر می گیریم. بنابرآنچه گفته شد، K- مشتق منحصر به فرد D از $K[X]$ وجود دارد به طوری که

$$\begin{cases} D: K[X] \to K[X] \\ D = f_۱ \frac{\partial}{\partial x_۱} + f_۲ \frac{\partial}{\partial x_۲} + \cdots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n} \end{cases}$$

بنابراین برای هر $۱ \leq i \leq n$ داریم :

$$D(x_i) = f_i \frac{\partial(x_i)}{\partial x_i} = f_i$$

۲) می دانیم $K[X]$ یک حلقه ی جابه جایی است، لذا $Der_k(K[X])$ یک $R-$ مدول است.

فرض کنید d عنصر دلخواهی از $Der_k(K[X])$ باشد. بنابر (۱ . ۱ . ۱) برای هر $۱ \leq i \leq n$

$$d(x_i) \in K[X] \Longrightarrow \exists\, f_i \in K[X], \qquad d(x_i) = f_i$$

بنابراین طبق بند (۱) مشتق منحصر به فرد D از $K[X]$ وجود دارد به طوری که

$$D = d\left(x_۱\right) \frac{\partial}{\partial x_۱} + d\left(x_۲\right) \frac{\partial}{\partial x_۲} + \cdots + d(x_n) \frac{\partial}{\partial x_n}$$

فرض کنید

$$A = \{f \in K[X] | d(f) = D(f)\}$$

برای هر $۱ \leq i \leq n$ داریم $D(x_i) = d(x_i)$ ، درنتیجه x_i در A است. برای هر α در K

$$D(\alpha) = d(\alpha) = ۰ \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in A$$