تعریف[chapter] قضیه[definition] لم[definition] نتیجه[definition] مثال[definition]

دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی محض

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض

بررسی عمق توانهای ایده‌آل یالی یک درخت

استاد راهنما

دکتر جعفر امجدی

استاد مشاور

دکترسید محمود شیخ الاسلامی

پژوهشگر

ذکیه توبچی‌زادگان

شهریور ۹۱

تبریز - ایران

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به مهربان فرشتگانی که:

لحظات ناب باور بودن، لذت وغرور دانستن، جسارت خواستن،
عظمت رسیدن و تمام تجربه های یکتا و زیبای زندگیم، مدیون حضور سبز
آنهاست

تقدیم به خانواده عزیزم. بخصوص جناب آقای مهندس بدلی زاده که در تمام عرصه های زندگی و تحصیل با تمام
وجود یاریگر و مشوق بنده بودند و دختر عزیزم کوثر و پسر کوچولویم امیررضا.

خدایا...

دستم را به ناپیدایی تو گشوده ام، چنان که در ذکری عالم گیر به سمت تو آمده اند!

آن قدر بزرگی، که هستی و همه ی اسبابش ملک کوچکی از املاک توست.

خدایا!

نمی دانم که کلمه را چگونه تقدیمت دارم، حال آن که کلمه آفریده توست، و چه موهبتی که تو نیز با کلمه با من سخن گفته ای...

بر انگشتانم که نگاه پر عطوفت خود را معطوف می داری توان نوشتن در آن ها جاری می شود!

خدایا!

اگر بخواهیم که مطلوب دیگران باشیم، تو اسبابش را به ما داده ای و ما را به سرعت به مقصد می رسانی، اما افسوس که این دلخوشی نه لذت بخش است و نه پایدار!

اما اگر بخواهیم مطلوب تو باشیم، سخت است و به دیده ای دست نیافتنی، اما آهسته آهسته شیرین است و پایدار...

خدایا!

مرا مطلوب خود گردان و از روی رحمت و فضل و بخشش ات با من مدارا کن!

خدایا!

در آستانه نیاز و فقر کامل خود به سویت رو کرده ام و می دانم که تو بی نهایت بی نیازی!

خدایا!

از نداشته هایم آن چه را که می دانم و نمی دانم و تو خوب به همه ی آن ها واقفی، نصیبم فرما...

به امید رحمت...

سپاس‌گزاری...

سپاس خدایی را که اولین معلم است.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌شائبه استاد راهنمای خود، جناب آقای **دکتر جعفر امجدی**، که شبانه‌روز وقت خود را با صبر و حوصله و متانت که نشانگر بار علمی سنگین ایشان می‌باشد در اختیار حقیر قرار داده‌اند تشکر و قدردانی کنم .

از جناب آقای **دکتر سید محمود شیخ الاسلامی** که زحمت مشاوره این پایان‌نامه را تقبل فرمودند کمال امتنان را دارم.

ذکیه توبچی‌زادگان

شهریور ۱۳۹۱

فهرست مطالب

چکیده

فرض کنید G یک گراف با n رأس و $I(G)$ ایده‌آل یالی آن از حلقه چند جمله ایهای، $R = k[x_1, \ldots, x_n]$، روی میدان k با n متغیر باشد. فرض کنید I، ایده‌آل یالی یک درخت یا یک جنگل می‌باشد. در این پایان نامه کرانهای پایینی برای دنبالهٔ $\{\operatorname{depth}\left(\frac{R}{I^t}\right)\}_{t\geqslant 1}$ بدست می‌آوریم و نشان می‌دهیم که این کرانهای پایین، نقطه ایستایی دنبالهٔ $\{\operatorname{depth}\left(\frac{R}{I^t}\right)\}_{t\geqslant 1}$ است هرگاه G یک درخت باشد.

کلمات کلیدی: ایده‌آل یالی، عمق ایده‌آل، به طور نرمال آزاد از تاب، گراف دوبخشی.

پیشگفتار

بررسی رفتار توانهای ایده‌آلها، نقش بسیار مهمی در شاخه های مختلف جبر جابجایی دارد.
بعنوان مثال می توان به نقش آنها در حلقه های ریس، حلقه های مدرج وابسته، بستار صحیح ایده‌آلها، رفتارهای مجانبی ایده‌آلها و عمق توانهای ایده‌آلها اشاره کرد.
در سالهای اخیر نتایج بسیاری در خصوص توانهای برخی از ایده‌آلها بدست آمده که ارتباط بسیار نزدیکی با دیگر شاخه های ریاضی نظیر نظریهٔ گراف، ترکیبیات وبهینه سازی دارد. یکی از این ایده‌آلها ایده‌آل یالی گراف است که اولین بار توسط ویلاریل [۱] [۱۷] و واسکانسیلیوس [۲] [۱۵] در دهه نود معرفی شده است.
فرض کنید G یک گراف با n رأس بوده و $R=k[x_۱,x_۲,\ldots,x_n]$ حلقهٔ چند جمله‌ایهای روی میدان k باشد. ایده‌آل یالی G ، $I(G)$ ، ایده‌آلی است که توسط چند جمله‌ایهای به صورت x_ix_j تولید میشود که در آن x_ix_j یالی از گراف G است.
برادمن [۳] [۲] عمق حلقه $\frac{R}{I^t}$را برای مقادیر مختلف tکه در آن ایده‌آل I ایده‌آل تک جمله‌ای حلقه $R=k[x_۱,x_۲,\ldots,x_n]$ است، مورد بررسی قرار داده است. وی ثابت کرده که به إزای مقادیر به دلخواه بزرگ t دنباله $\{\operatorname{depth}(\frac{R}{I^t})\}_{t\geqslant ۱}$ ، ایستا است و مقدار ایستایی از عدد $n-\ell(I)$ بیشتر نیست، که در آن $\ell(I)$ بعد تحلیلی ایده‌آل I و n تعداد متغیرهای مستقل حلقه R است.
هرزق [۴] [۱۰] ثابت کرده است که هرگاه R یک حلقه مدرج وابسته کوهن-مکولی ایده‌آل I باشد آنگاه مقدار ایستایی دنبالهٔ $\{\operatorname{depth}(\frac{R}{I^t})\}_{t\geqslant ۱}$ با $n-\ell(I)$ برابر است.

[۱] Villarreal

[۲] Vasconcelos

[۳] Brodmann

[۴] Herzog

اما در مورد کرانهای پایین دنباله فوق مطالب کمتری بیان شده است. در [۱۵]، وانسکانسیلیوس و ویلاریل، نشان داده‌اند که اگر G یک گراف دو بخشی بوده و I ایده‌آل یالی آن، بطور نرمال آزاد از تاب باشد (یعنی $\mathrm{Ass}\left(\frac{R}{I^t}\right) = \mathrm{Min}\left(\frac{R}{I}\right)$ آنگاه به إزای هر $t \geqslant ۱$، $\mathrm{depth}\left(\frac{R}{I^t}\right) \geqslant ۱$.

هدف اصلی این پایان نامه، که در آن I ایده‌آل یالی یک درخت یا جنگل است، تعیین کران پایین برای دنبالهٔ $\{\mathrm{depth}\left(\frac{R}{I^t}\right)\}_{t\geqslant ۱}$ می‌باشد. برای رسیدن به این هدف، این پایان نامه در سه فصل تنظیم گردیده است.

در فصل اول به ارائه تعاریف و مفاهیمی از جبر جابجایی ونظریهٔ گراف که در فصلهای بعدی مورد استفاده قرار می گیرند، می‌پردازیم. در فصل دوم ضمن بررسی عمق ایده‌آل یالی یک درخت، کران پایینی برای دنباله مورد بحث با استفاده از قطر درخت مزبور ارائه می‌شود. نهایتا در فصل سوم با تعیین عمق حلقه های حاصل از توانهای ایده‌آل یالی یک مسیر، کران پایینی برای عمق حلقه‌های حاصل از ایده‌آل یالی یک جنگل بدست می‌آوریم.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ تعاریف و مفاهیمی از جبر جابجایی

در این فصل، مفاهیم و مقدماتی از جبر جابجایی ، نظریه گراف و ترکیبیات که در اثبات قضایای اصلی بکار می روند، بیان می شود. کلیه حلقه ها جابجایی و یکدار فرض می شوند.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه و I یک ایده‌آل واقعی از آن باشد. ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ را ایده‌آل اول مینیمال I می‌نامیم هرگاه $I \subseteq \mathfrak{p}$ و ایده‌آل اولی از R مثل $\mathfrak{q}$ موجود نباشد که $I \subseteq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$. مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول مینیمال I را با علامت $\mathrm{Min}(I)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید I و J ایده‌آل‌هایی از حلقه R باشند. ایده‌آل خارج قسمت I و J، $(I : J)$، را به صورت $\{a \in R : \ aJ \subseteq I\}$ تعریف می‌کنیم. در حالت خاص اگر $I = 0$ آنگاه ایده‌آل $(0 : J)$ را پوچساز J می‌نامیم و با $\mathrm{Ann}_R\,(J)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۳.۱.۱. *فرض کنید I و $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ $(n \geqslant 2)$ ایده‌آلهایی از حلقه R باشند بطوریکه حداقل $n-2$ تا از $\mathfrak{p}_i$ ها اول هستند. فرض کنید $I \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$. در اینصورت $1 \leqslant j \leqslant n$ ای موجود است که $I \subseteq \mathfrak{p}_j$.*

برهان. به قضیهٔ ۶۱.۳ از [۱۳] مراجعه شود. □

تعریف و لم ۴.۱.۱. *فرض کنید R یک حلقه و I ایده‌آلی از آن باشد. در این صورت*

$$\sqrt{I} := \{r \in R \mid r^n \in I \text{ که } n \text{ای متعلق به } \mathbb{N} \text{ وجود داشته باشد}\}$$

ایده‌آلی از R شامل I است که آن را رادیکال I می‌نامیم.

برهان. به لم ۴۶.۳ از [۱۳] مراجعه شود. □

تعریف ۵.۱.۱. ایده‌آل $\mathfrak{q}$ از حلقه R را یک ایده‌آل اولیه گوئیم هرگاه:

i) $\mathfrak{q} \neq R$

ii) اگر $a, b \in R$ و $ab \in \mathfrak{q}$ آنگاه $a \in \mathfrak{q}$ یا $b \in \sqrt{\mathfrak{q}}$.

اگر $\mathfrak{q}$ ایده‌آل اولیه باشد و $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}$، آنگاه $\mathfrak{q}$ را $\mathfrak{p}$-اولیه گوئیم.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه و I یک ایده‌آل واقعی از آن باشد. تجزیه اولیه I عبارت است از اشتراک تعداد متناهی از ایده‌آل‌های اولیه R که برابر با I باشد. یعنی $I = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$، که در آن به ازای هر $1 \leqslant i \leqslant n$، $\mathfrak{q}_i$ یک ایده‌آل اولیه است. تجزیه فوق را تجزیه اولیه مینیمال کاهش یافته یا کاهش نیافتنی گوئیم هرگاه $\sqrt{\mathfrak{q}_i}$ها ایده‌آل‌های متمایز R باشند و به ازای هر $1 \leqslant i \leqslant n$، $\bigcap_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \mathfrak{q}_j \nsubseteq \mathfrak{q}_i$.
به عبارت دیگر، تجزیه اولیه I را تجزیه مینیمال کاهش یافته گوئیم هرگاه نتوان هیچکدام از جملات آن تجزیه را حذف کرد. ایده‌آل I را تجزیه‌پذیر گوئیم هرگاه I دارای یک تجزیه اولیه باشد.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه، I ایده‌آل تجزیه‌پذیری از آن و $I = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$، یک تجزیه اولیه مینیمال I باشد. در این صورت مجموعه n عضوی $\{\sqrt{\mathfrak{q}_1}, \dots, \sqrt{\mathfrak{q}_n}\}$ را مجموعه ایده‌آل‌های اول وابسته به I می‌نامیم و با $\operatorname{ass}(I)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه، M یک R-مدول باشد، ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ را ایده‌آل اول وابسته به M می نامیم هرگاه $0 \neq x \in M$ موجود باشد بطوریکه $\mathrm{Ann}_{\mathrm{R}}(m) = \mathfrak{p}$.
مجموعه ایده‌آل‌های اول وابسته به M را با نماد $\mathrm{Ass}_R(M)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۹.۱.۱. *فرض کنید I ایده‌آل تجزیه پذیری از حلقه R باشد و $\mathfrak{p} \in Spec(R)$. در این صورت $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اول مینیمال I است اگر و تنها اگر $\mathfrak{p}$ عضوی مینیمال در مجموعهٔ $ass\,(I)$ باشد. بنابراین تمام ایده‌آل‌های اول مینیمال I به مجموعهٔ $ass\,(I)$ تعلق دارند. از اینرو ایده‌آل‌های اول مینیمال I متناهی است و $Min(I) \subseteq ass\,(I)$.*

برهان. به قضیه ۲۴.۴ از [۱۳] مراجعه شود. □

قضیه ۱۰.۱.۱. *فرض کنید R یک حلقه نوتری و I ایده‌آل واقعی از R باشد و $\mathfrak{p} \in Spec(R)$. در این صورت $\mathfrak{p} \in ass\,(I)$ اگر و تنها اگر عضوی مانند a از R موجود باشد که $\mathfrak{p} = (I :_R a)$ و این معادل است با اینکه عضوی مانند b از $\frac{R}{I}$ موجود باشد بطوریکه $\mathfrak{p} = (0 :_R b)$.*

برهان. به قضیه ۲۲.۸ از [۱۱] مراجعه شود.

تبصره ۱۱.۱.۱. *فرض کنید I ایده‌آل واقعی از حلقهٔ نوتری R باشد. در این صورت طبق قضیه قبل، $\mathfrak{p} \in ass\,(I)$ اگر و تنها اگر $\mathfrak{p} \in Ass(\frac{R}{I})$. همچنین به ازای عدد صحیح مثبت n، اگر $\mathfrak{p} \in Ass(\frac{R}{I^n})$ آنگاه به ازای عنصر ناصفری مانند a از R داریم $\mathfrak{p} = (I^n :_R a)$، که در آن $a \notin I^n$.*

نتیجه ۱۲.۱.۱. *فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ نوتری R و $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول از حلقهٔ R باشد. در این صورت $\mathfrak{p} \in Ass_R(M)$ اگر و تنها اگر $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} \in Ass_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$.*

برهان. به نتیجه قضیهٔ ۶.۲ از [۹] مراجعه شود. □

لم ۱۳.۱.۱. *فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه R باشد. در اینصورت به ازای هر عدد صحیح مثبت n،*

$$Min(\frac{R}{I}) \subseteq Ass_R(\frac{R}{I^n}).$$

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم به ازای هر عدد صحیح و مثبت n، $Min(I^n) = Min(I)$. فرض کنید $\mathfrak{p} \in Min\,(I)$. طبق تعریف۱.۱.۱ $I \subseteq \mathfrak{p}$ و چون به ازای هر n، $I^n \subseteq I$ لذا $I^n \subseteq \mathfrak{p}$ ، از اینرو $\mathfrak{p} \in Min\,(I^n)$. حال فرض می‌کنیم $\mathfrak{p} \in Min\,(I^n)$. طبق تعریف ۱.۱.۱، $I^n \subseteq \mathfrak{p}$. ادعا می‌کنیم $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اول مینیمال I است . در غیر اینصورت ایده‌آل اولی از حلقه R مانند $\mathfrak{p}'$ وجود دارد به طوریکه $I \subseteq \mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}$. پس نتیجه می‌شود $I^n \subseteq I \subseteq \mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}$. بنابراین $\mathfrak{p}$ نمی‌تواند ایده‌آل اول مینیمال I^n باشد. لذا $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اول مینیمال I است. یعنی $\mathfrak{p} \in Min\,(I)$. در نتیجه $Min\,(I^n) = Min\,(I)$. طبق قضیهٔ ۹.۱.۱، $Min\,(I^n) \subseteq Ass\,(I^n)$ ، بنابراین $Min\,(I) \subseteq Ass\,(I^n)$. حال با توجه به تبصرهٔ ۱۱.۱.۱ و تعریف ۱.۱.۱ $Min(\frac{R}{I}) \subseteq Ass_R(\frac{R}{I^n})$. □

لم ۱۴.۱.۱. *فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ نوتری R و S زیر مجموعهٔ بسته ضربی از R باشد. در این صورت*

$$Ass_{S^{-1}R}(S^{-1}M) = \{^{-1}R \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset, \mathfrak{p} \in Ass_R(M)\},$$

($S^{-1}R$ نشان دهندهٔ حلقهٔ کسرهای R نسبت به S است).

برهان. به لم ۳۸.۹ از [۱۱] مراجعه شود. □

تعریف ۱۵.۱.۱. فرض کنید $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول حلقه R باشد. ارتفاع $\mathfrak{p}$، $\mathrm{ht}\,(\mathfrak{p})$ ، را برابر با کوچکترین کران بالای مجموعه طول زنجیره‌های $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$ از ایده‌آل‌های اول R است مشروط بر اینکه این مجموعه کوچکترین کران بالا داشته باشد. در غیر اینصورت آن را ∞ در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱۶.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه نوتری و I یک ایده‌آل واقعی از آن باشد. ارتفاع I، $\mathrm{ht}(I)$، را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mathrm{ht}(I) = \min\{\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \mid I \subseteq \mathfrak{p}\};$$

و بسادگی نتیجه می شود که

$$\mathrm{ht}(I) = \min\{\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(I)\} = \min\{\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\left(\tfrac{R}{I}\right)\}.$$

تعریف ۱۷.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه باشد. بُعد کرول R ، $\dim R$ ، عبارت است از

$$\sup \{n \in \mathbb{N}_0 \mid \text{زنجیری به طول } n \text{ از ایده‌آل‌های اول } R \text{ وجود داشته باشد}\},$$

مشروط بر اینکه مجموعه فوق کوچکترین کران بالا داشته باشد و در غیر این صورت آن را ∞ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۸.۱.۱. حلقه R را شبه موضعی گویند هرگاه نوتری بوده و تعداد متناهی ایده‌آل ماکسیمال داشته باشد. و آنرا موضعی گویند هرگاه نوتری بوده و دقیقا یک ایده‌آل ماکسیمال داشته باشد.

تعریف و لم ۱۹.۱.۱. *فرض کنید R یک حلقه، $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اول R و $S := R \setminus \mathfrak{p}$ باشد. حلقه کسرهای $S^{-1}R$ ، $R_{\mathfrak{p}}$ ، یک حلقه موضعی با ایده‌آل ماکسیمال*

$$\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} := \{\lambda \in R_{\mathfrak{p}} : \ \lambda = \frac{a}{s} \ , \ a \in \mathfrak{p} \ , \ s \in S\}$$

است. این حلقه را حلقه حاصل از موضعی سازی R نسبت به $\mathfrak{p}$ می‌نامیم.

برهان. به لم ۲۰.۵ از [۱۳] مراجعه شود. □

تعریف ۲۰.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه و M یک R-مدول باشد. مجموعه

$$\mathrm{Supp}_R(M) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}$$

را محمل[1] M گوییم.

تعریف ۲۱.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه و M یک R-مدول باشد. بُعد M، $\dim(M)$، برابر کوچکترین کران بالای مجموعه طول زنجیره‌های $\mathfrak{p}_0 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n$ از ایده‌آل‌های اول R است که در آن $\mathfrak{p}_i \in \mathrm{Supp}(M)$، مشروط بر اینکه این مجموعه کوچکترین کران بالا داشته باشد، در غیر این صورت بُعد M را ∞ تعریف می‌کنیم. بسادگی نتیجه می شود که هرگاه M متناهی مولد باشد، آنگاه

$$\mathrm{Supp}(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathrm{Ann}(M) \subseteq \mathfrak{p}\}$$

در نتیجه $\dim(M) = \dim\left(\frac{R}{\mathrm{Ann}_R(M)}\right)$.

[1] Support

تعریف ۲۲.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه و M یک R-مدول باشد. گوئیم $r \in R$ یک مقسوم علیه صفر روی M است هرگاه $m\,(\neq 0)$ای از M وجود داشته باشد بطوریکه $rm = 0$. مجموعه همه مقسوم علیه‌های صفر روی M را با $\mathrm{Zd}_R(M)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۳.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه نوتری و M یک R-مدول غیر صفر متناهی مولد باشد. همچنین فرض کنید a_1 و ... و a_n عناصری از حلقه R باشند. در این صورت a_1 ، ... ، a_n را یک M-رشته (M-رشته منظم) گوئیم هرگاه:

i) $(a_1, \dots, a_n)M \neq M$

ii) به ازای هر $1 \leqslant i \leqslant n$ ، $a_i \notin \mathrm{Zd}_R(\dfrac{M}{(a_1, \dots, a_{i-1})M})$

$a_1, \dots, a_n$ رایک M-رشته ضعیف گوییم هرگاه شرط i رانداشته باشد.

تعریف ۲۴.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه نوتری ، M یک R-مدول غیر صفر متناهی مولد و I ایده‌آلی از R باشد بطوریکه $M \neq IM$. رشته $(a_i)_{i=1}^n$ را یک M-رشته ماکسیمال در I گوئیم هرگاه $(a_1, \dots, a_n)$ ، یک M-رشته بوده و $(a_1, \dots, a_n) \subseteq I$ و

$$I \subseteq \mathrm{Zd}_R(\frac{M}{(a_1, \dots, a_n)M}).$$

تعریف و لم ۲۵.۱.۱. *فرض کنید R یک حلقه نوتری ، M یک R-مدول غیر صفر متناهی مولد و I ایده‌آلی از R باشد. در این صورت طول همه M-رشته‌های ماکسیمال در I با هم برابرند. این عدد را درجه I روی M گوئیم و با نماد $\mathrm{grad}_M I$ نمایش می‌دهیم. اگر $M = R$ آنگاه درجه I روی R را با نماد $\mathrm{grad}(I)$ نمایش می‌دهیم.*

تعریف ۲۶.۱.۱. فرض کنید $(R\,, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی و M یک R-مدول متناهی مولد باشد. در این صورت $\mathrm{grad}_M(\mathfrak{m})$ را $\mathrm{depth}(M)$ می‌نامیم.

قضیه ۲۷.۱.۱. *فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ حلقه موضعی بوده و M یک R-مدول متناهی مولد غیر صفر باشد. در اینصورت برای هر $\mathfrak{p}$ از $\mathrm{Ass}_R\,(M)$*

$$\operatorname{depth}(M) \leqslant \dim\left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right).$$

برهان. به قضیه ۲۹.۱۶ از [۱۳] مراجعه شود. □

تعریف ۲۸.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه نوتری، M یک R-مدول غیر صفر متناهی مولد $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M)$ باشد. M-بلندی $\mathfrak{p}$، $_M(\mathfrak{p})$، برابر کوچکترین کران بالای طول زنجیرهای $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n$ از ایده‌آل‌های اول R است که در آن $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Supp}(M)$ و $\mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$. همچنین به إزای هر ایده‌آل واقعی I از R که $IM \neq M$، M-بلندی I، $\operatorname{ht}_M I$، عبارت است از

$$\min\{_M(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M)\ ,\ I \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

تعریف ۲۹.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه نوتری و M یک R-مدول متناهی مولد باشد. مدول M را یک R-مدول کوهن-مکولی [۲] گوئیم هرگاه به ازای هر ایده‌آل I از R که $M \neq IM$،

$$\operatorname{ht}_M(I) = \operatorname{grad}_M(I).$$

در حالت خاص اگر $(R\ ,\mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی باشد، مدول M را کوهن-مکولی گوئیم هرگاه $M = 0$ یا $\dim(M) = \operatorname{depth}(M)$.

قضیه ۳۰.۱.۱. *فرض کنید $(R\ ,\mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی و M یک R-مدول کوهن-مکولی غیر صفر باشد. در این صورت به ازای هر ایده‌آل $\mathfrak{p}$ از $\operatorname{Ass}(M)$، $\dim(R/\mathfrak{p}) = \operatorname{depth}(M)$.*

برهان. به قضیه ۲.۱.۲ از [۴] مراجعه شود. □

تعریف ۳۱.۱.۱. فرض کنید $(R\ ,\mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی باشد. اگر R را بعنوان R-مدول در نظر بگیریم آنگاه $\operatorname{grad}_R(\mathfrak{m})$ را $\operatorname{depth}(R)$ می‌گوئیم.

[۲] Cohen-Macaulay

تعریف ۳۲.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه نوتری باشد. R را یک حلقه کوهن-مکولی گوئیم هرگاه به ازای هر ایده‌آل I از R، $\mathrm{ht}(I) = \mathrm{grad}(I)$. در حالت خاص ، اگر $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی باشد آنگاه R یک حلقه کوهن-مکولی گوئیم هرگاه

$$\dim(R) = \mathrm{depth}(R).$$

تعریف ۳۳.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه و I یک ایده‌آل واقعی از آن باشد. I را ناآمیخته [۳] گوئیم هرگاه به ازای هر $\mathfrak{p}$ از $\mathrm{Ass}(\frac{R}{I})$، $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \mathrm{ht}(I)$.

قضیه ۳۴.۱.۱. *فرض کنید R یک حلقه جابجایی یکدار باشد.در اینصورت R ،کوهن-مکولی است اگر وفقط اگر هر ایده‌آل تولید شده توسط عناصر یک R- رشته ناآمیخته باشد.*

برهان. به قضیه ۱۷.۳ از [۱۳] مراجعه شود. □

تبصره ۳۵.۱.۱. *فرض کنید $R = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ حلقه چند جمله ایها روی میدان k و I ایده‌آلی از R باشد.اگر $\frac{R}{I}$ کوهن- مکولی باشد آنگاه I ناآمیخته است.*

برهان. به گزاره های ۱۱.۳.۱و۳.۲.۲از [۱۶] مراجعه شود. □

قضیه ۳۶.۱.۱. *فرض کنید R یک حلقه نوتری، M یک R- مدول متناهی مولد و $x : x_1, \ldots, x_n$ یک M- رشته باشد. در اینصورت:*

(a) اگر M یک R- مدول کوهن-مکولی باشد آنگاه M/xM نیز کوهن-مکولی است. عکس قضیه وقتی برقرار است که حلقه موضعی باشد.

(b) فرض کنید M یک R- مدول متناهی مولد کوهن-مکولی و S زیر مجموعه بسته ضربی از R باشد. در اینصورت $S^{-1}R$ کوهن-مکولی است و به إزای هر ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از R ، $M_\mathfrak{p}$ کوهن-مکولی است.همچنین اگر $M_\mathfrak{p} \neq 0$ آنگاه

$$\mathrm{depth}\,(M_\mathfrak{p}) = \mathrm{gread}\,(\mathfrak{p}, M)\,.$$

[۳] Unmixed

بعلاوه اگر R حلقه ای موضعی باشد آنگاه

$$\dim M = \dim M_{\mathfrak{p}} + \dim \frac{M}{\mathfrak{p}M}.$$

برهان. به قضیه ۲.۱.۳ از [۴] مراجعه شود. □

۲.۱ حلقه‌های مدرج و ریس جبر

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید R یک حلقه باشد. R را $\mathbb{Z}$- مدرج گوئیم هرگاه خانواده $\{R_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ از زیر گروههای R موجود باشند بطوریکه ؛

۱) $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n$،

۲) به ازای هر $n,\ m \in \mathbb{Z}$، $R_nR_m \subseteq R_{n+m}$.

هر عضو ناصفر x از R_n را یک عضو همگن از درجه n گوئیم.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید R یک حلقه $\mathbb{Z}$-مدرج و M یک R-مدول باشد. M را یک R- مدول $\mathbb{Z}$ - مدرج گوئیم هرگاه خانواده $\{M_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ از زیر گروههای M موجود باشند بطوریکه؛

۱) $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$،

۲) به ازای هر $n, m \in \mathbb{Z}$، $R_nM_m \subseteq M_{n+m}$.

تعریف ۳.۲.۱. حلقهٔ مدرج $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n$ را در نظر بگیرید. عنصر r از حلقهٔ R را یک عنصر همگن گویند هرگاه به ازای عدد صحیحی مانند n، $r \in R_n$. ایده‌آل I را یک ایده‌آل همگن R گویند هرگاه توسط مجموعه‌ای از عناصر همگن تولید شود یا به طور معادل I توسط مجموعهٔ $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (I \cap R_n)$ تولید شود.