وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
دانشکده علوم پایه

پایان نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی کاربردی

عنوان :

بررسی کارآیی واحدهای تصمیم‌گیری توسط تحلیل پوششی داده‌های فازی با یک مثال کاربردی

استاد راهنما :
دکتر جعفر پور محمود

استاد مشاور :
دکتر میر کمال میرنیا

پژوهشگر :
امید یعقوبی اگره

شهریور ۱۳۸۸

تبریز — ایران

بسم اللّه الرّحمن الرّحيم

تقدیم به:

پدر بزرگوار و مادر مهربانم،

که درخشش ستاره‌های پرمهر وجودشان همواره یادآور حمایتهای بی‌دریغ و مهربانی‌ها و دلسوزیهای توصیف ناپذیرشان در تمام عرصه‌های زندگیم برای رسیدن به هدفهایم بوده است. باشد که خورشید تابان وجودشان همواره گرمی بخش زندگیم باقی بماند.

تشکر و قدردانی

سپاس بیکران قادر یکتا را که عالم هستی را به نیکوترین خلقت و زیباترین کسوت بیافرید و از جمیع خلایق، بشر را به شرف عقل و مرتبت و نطق بپیراست.

اکنون که با استعانت از پروردگار نگارش این پژوهش به پایان رسیده است بر خود واجب می‌دانم که از زحمات تمام کسانی که در این زمینه مرا یاری نمودند تشکر و قدردانی نمایم.

بنابراین مراتب امتنان، سپاس و ارادت خود را نسبت به استاد محترم راهنما جناب آقای دکتر جعفر پورمحمود و استاد مشاور جناب آقای دکتر میر کمال میرنیا که با توصیه‌ها و نظرات ارزشمند خویش، در تکمیل پایان‌نامه یاریم نمودند ابراز می‌دارم.

در اینجا لازم می‌دانم بطور ویژه از خانم زهرا محمدنژاد که با حضور همیشگی خود در کنار بنده موجب قوّت قلب و حمایتهای روحی اینجانب می‌باشد نهایت تشکر و ارادت کامل خویش را ابراز نمایم.

در پایان نیز از تمام کسانی که به هر نحوی در انجام این پژوهش یاریم نمودند، تقدیر و تشکر و سعادت و توفیق روزافزون آنان را از درگاه خداوند منّان مسئلت دارم.

امید یعقوبی اگره

شهریور ۱۳۸۸

فهرست مندرجات

چکیده

تحلیل پوشش داده‌ها[۱] (DEA) یک فن غیرپارامتری برای اندازه‌گیری و ارزیابی کارآیی نسبی مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیرنده[۲] (DMU) است. در جهان واقعی، شاید همواره داده‌های ورودی و خروجی معمولی در دسترس نباشند، خصوصاً وقتی که ورودی‌ها و خروجی‌های DMUها شامل اعداد فازی و یا در حالت خاص شامل اعداد بازه‌ای باشند.

هدف در این پایان‌نامه چگونگی ارزیابی کارآیی گروهی از DMUها با داده‌های ورودی و خروجی فازی و یا بازه‌ای است. بنابراین در فصل اول به معرفی علم فازی می‌پردازیم و در فصل دوم نیز تحلیل پوششی داده‌ها را بطور کامل معرفی می‌کنیم. اما تا به امروز بسیاری از محققین با بکارگیری اندیشه‌های متفاوت به حل مدل‌های مختلف DEA به ازای داده‌های غیردقیق مثل داده‌های فازی یا بازه‌ای پرداخته‌اند و همچنین با استفاده از فن و روش‌های مختلفی مثل $\alpha-$برشها، ناحیه اطمینان، کاهش انعطاف‌پذیری وزن‌ها و غیره، کارآیی واحدهای تصمیم گیرنده را مورد ارزیابی قرار دادند. بنابراین در فصل سوم بطور کامل به توسعه مدل‌های مختلف DEA برای ارزیابی کارآیی DMUهای با داده‌های ورودی و خروجی فازی یا بازه‌ای می‌پردازیم. در فصل چهارم برای فهم بهتر این مطالب و فرمول‌ها، به بیان یک مثال کاربردی در مورد شعبه‌های بانک صادرات تبریز می‌پردازیم و در انتها نیز نتایج و پیشنهادات را بیان می‌کنیم.

کلمات کلیدی:

ورودی و خروجی، داده‌های فازی، داده‌های بازه‌ای، کارآیی فازی، کارآیی بازه‌ای، رتبه‌بندی.

---

[۱] Data Envelopment Analysis

[۲] Decision Making Unit

پیشگفتار

علم فازی برای اولین بار در سال ۱۹۶۵ توسط پرفسور لطفی عسگرزاده استاد ایرانی تبار دانشگاه کالیفرنیا در مقاله‌ای تحت عنوان مجموعه‌های فازی[?] به جهانیان معرفی گردید. از طرفی نیز تحلیل پوششی داده‌ها برای اولین بار در سال ۱۹۷۸ توسط چارنز، کوپر و رودز[۳][?] معرفی گردید. DEA یک ابزار تصمیم‌گیری و مدیریتی خیلی مفید است که توسعه‌های تعجب برانگیزی را در تئوری و روش‌شناسی ایجاد کرده و کاربردهای وسیعی نیز در کل جهان دارد.

در مدل‌های قدیمی DEA مثل BCC و CCR، همواره فرض بر این بود که داده‌های ورودی و خروجی دقیقاً شناخته شده هستند. در حالیکه اغلب اوقات DEA با وضعیتی مواجه می‌شود که مجموعه‌ی DMUها شامل داده‌هایی به صورت داده‌های جاافتاده و داده‌های توجیهی می‌باشند که به آنها داده‌های غیردقیق یا اطلاعات نامطمئن می‌گویند و در حالت خاص شامل اعداد بازه‌ای و اعداد فازی می‌باشند. بنابراین چگونگی ارزیابی کارآیی عملیاتی یا مدیریتی یک مجموعه از DMUها در محیط‌های فازی و یا بازه‌ای یک مساله مطالعاتی پیچیده‌ای بود که نیازمند توسعه‌ی نظریه DEA و مدل‌های آن و همچنین تعمیم و گسترش کاربردهای واقعی آن بوده است.

بنابراین کوپر[? ،? ،?] اولین کسی بود که چگونگی ارتباط داده‌های غیردقیق مثل داده‌های فازی، داده‌های کراندار و داده‌های ترتیبی را در DEA مورد مطالعه قرار داد و بعد از آن اکثر محققین به حل مدل‌های مختلف DEA و ارزیابی کارآیی واحدهای تصمیم گیرنده با استفاده از داده‌های فازی و بازه‌ای پرداختند که ما در این پایان‌نامه به بررسی و تجزیه و تحلیل آنها می‌پردازیم.

---

[۳] Charnes, Cooper and Rhodes

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف اولیه علم فازی

۱.۱ مقدمه

میدانیم که در نظریه مجموعه‌ها، مجموعه‌ها به صورت گردایه‌ای معیّن از اشیاء تعریف می‌شوند. به عبارت دیگر هر مجموعه با یک ویژگی خوش‌تعریف مشخص می‌شود. اگر یک شی مفروض دارای آن ویژگی باشد، عضو مجموعه متناظر است و اگر نباشد، عضو آن نیست. مثلاً اگر مجموعه مرجع X، مجموعه‌ی اعداد حقیقی فرض شود و P ویژگی «بزرگتر از ده بودن» را دارا باشد، آنگاه P یک ویژگی خوش‌تعریف است که یک مجموعه مانند A با آن متناظر می‌شود، زیرا برای هر عدد از مجموعه‌ی اعداد حقیقی می‌توان با قاطعیت گفت که آیا آن عدد بزرگتر از ده است یا خیر و بنابراین متعلق به A است یا خیر.

حال فرض کنید بخواهیم درباره آن دسته از مجموعه‌ی اعداد حقیقی صحبت کنیم که «بزرگ» باشند. در اینجا با یک ویژگی ناخوش‌تعریف و مبهم یعنی «بزرگ» سروکار داریم. اینکه چه اعدادی بزرگ هستند و چه اعدادی بزرگ نیستند، بسته به نظر افراد مختلف فرق می‌کند. به عبارت دیگر عضویت یا عدم عضویت اعداد مختلف در گردایه‌ای با ویژگی «بزرگ بودن» قطعی نیست. مثلاً آیا ۱۰۰ عددی «بزرگ» است؟ و عضو گردایه اعداد حقیقی «بزرگ» است یا خیر؟ ۱۰۰۰ چطور؟

۱۰۰۰۰۰۰ چطور؟ می‌بینیم که ویژگی «بزرگ بودن» برای اعداد حقیقی یک ویژگی دقیق و معیّن نیست و نظریه معمولی مجموعه‌ها از صورت‌بندی این‌چنین مفاهیم و ویژگی‌هایی ناتوان است. از طرف دیگر بیشتر مفاهیم و ویژگی‌هایی که در زندگی روزمره و واقعی و نیز در شاخه‌های مختلف علوم بویژه علوم انسانی و اجتماعی با آن سروکار داریم اینگونه هستند، یعنی دارای مفاهیمی منعطف می‌باشند و مجموعه‌هایی با کران‌های نادقیق دارند. برای مثال ما در زندگی واقعی کمتر از، کودکان بلند قدتر از Cm ۱۱۰، زمین‌های بزرگتر از ۱۰ هکتار، مسافت‌های طولانیتر از Km ۱۰۰ و ... صحبت می‌کنیم در حالیکه فهم و زبان طبیعی ما بیشتر با مفاهیمی مانند کودکان بلند قد، زمین‌های وسیع، اجناس گران و ... سروکار دارد. هم‌چنین در علوم، بویژه علوم انسانی و اجتماعی بجای صحبت از کشورهای دارای ۱۰۰۰ کارخانه به بالا، شهرهای با جمعیت بیش از یک میلیون نفر و ... با مفاهیم و عباراتی مانند جوامع پیشرفته صنعتی، فرهنگهای بومی، تراکم زیاد جمعیت، کودکان کند ذهن و ... سروکار داریم.
هیچکدام از این مفاهیم و تعاریف، تعاریف دقیقی نیستند که بتوانیم برای هر کدام مجموعه‌هایی دقیق را متصور شویم. در قلمرو ریاضیات و نظریه مجموعه‌های کلاسیک جایی برای این مفاهیم نیست و قالبی برای صورت‌بندی این مفاهیم و ابزاری برای تجزیه و تحلیل آنها وجود ندارد.
نظریه مجموعه‌های فازی یک قالب جدید ریاضی برای صورت‌بندی و تجزیه و تحلیل این مفاهیم و ویژگی‌هاست. این نظریه، یک تعمیم و گسترش طبیعی نظریه مجموعه‌های معمولی است که موافق با زبان و فهم طبیعی انسانها می‌باشد.

۲.۱ تاریخچه

در اوایل دهه‌ی ۱۹۲۰ راسل[۱] به صورتی مبهم منطق فازی را بنیان نهاد، امّا هرگز موضوع را دنبال نکرد. در اواخر دهه‌ی ۱۹۲۰ ورنرهایزنبرگ جهان علم را با اصل عدم قطعیت خود در مکانیک کوانتوم متحیر ساخت.

[۱] Russel

در سال ۱۹۳۷ فیلسوف کوانتومی ماکس بلک[۲] مقاله‌ای در رابطه با مجموعه‌های گنگ و آنالیز منطقی تحت نام «ابهام» یا آنچه که ما اکنون مجموعه‌های فازی می‌نامیم منتشر ساخت ولی جهان علم و فلسفه مقاله بلک را نادیده گرفت. اگر این‌چنین نمی‌شد ما هم اکنون می‌بایست تاریخ منطق گنگ را به جای منطق فازی مورد بررسی قرار می‌دادیم.

در سال ۱۹٦۵ لطفی عسگرزاده که در آن زمان رئیس گروه مهندسی برق دانشگاه کالیفرنیا در برکلی[۳] بود مقاله‌ای تحت عنوان مجموعه‌های فازی در مجله اطلاعات و کنترل منتشر ساخت. لطفی عسگرزاده برچسب یا نام فازی را روی این مجموعه‌های گنگ یا چندارزشی قرار داد. مجموعه‌های فازی با مثال قد انسان متولد شد که این اولین مجموعه‌ی فازی معرفی شده توسط لطفی عسگرزاده بود. همچنین مقاله مشهور او در مجله فلسفه در سال ۱۹۸۱ با عنوان «چه بهایی برای دوارزش» منتشر یافت.

در سال ۱۹۸۵ بارت کاسکو[۴] برای اولین بار ساختار هندسی مجموعه‌های فازی را مورد مطالعه قرار داد بطوریکه در سال ۱۹۸٦ قضیه‌ی آنتروپی فازی را ثابت کرد و در سال ۱۹۸۷ پایان‌نامه دکتری خویش را روی سیستم‌های فازی به رشته تحریر درآورد. همچنین او در سال ۱۹۹۱ ارتباط بین فازی بودن و آنتروپی کلاسیک ترمودینامیک و نظریه اطلاعات را یافت.

امروزه علم فازی در همه‌ی عرصه‌ها از جمله علوم مهندسی، پایه، انسانی، نظامی و سیاسی بکار گرفته می‌شود. در این زمینه می‌توان به مثال‌های زیر اشاره کرد: ماشین لباسشویی هوشمند، سیستم ضد قفل شدن ترمزها در خودروها (براساس سرعت و شتاب ماشین در مواقع بحرانی ترمزها کنترل می‌شود)، اثر آموزشی در شبکه‌های عصبی و سیستم‌های فازی، یادگیری سطح انرژی و تشدید تطبیقی، سیستم فازی صنعتی و بیان و تفسیر آن براساس دسته‌ی اطلاعات، تعیین قانون فازی مربوط به کنترل تهویه مطبوع، بنیادگرایی اسلامی در لبنان، تاثیر آب و هوا روی رانندگی در بزرگراه، بررسی آپارتاید[۵] در آفریقای جنوبی و ...

---

[۲] Max Black
[۳] Berkly
[۴] Baret Cascoo
[۵] Apartheid

آینده علم فازی سرشار از ابزارهای هوشمند خواهد بود. آنها بهره‌های هوشی ماشینی بدیهی خواهند داشت و ممکن است اصلاً شبیه لباسشویی‌ها و ریش‌تراشها و دوربین‌های فازی امروز نباشند. برخی از آنها بهره‌های هوشی ماشینی بالاتری از بهره‌های هوشی انسانی ما خواهند داشت.

اجازه دهید قبل از ورود به بحث اصلی و معرفی ساختار ریاضی این نظریه، اساس کار پروفسور عسگرزاده را شرح دهیم. این کار را با پیگیری مثال «اعداد حقیقی بزرگ» انجام می‌دهیم. همان‌طور که می‌دانیم آنچه که در مجموعه بودن «اعداد بزرگ» اشکال ایجاد می‌کند، معلوم نبودن عضویت و یا عدم عضویت اعداد مختلف در گردایه «اعداد بزرگ» است.

بنا به پیشنهاد پروفسور عسگرزاده، مناسب است که به هر عدد از مجموعه اعداد حقیقی، عددی را از بازه $[0,1]$ به عنوان درجه بزرگی آن عدد نسبت دهیم. هر چقدر یک عدد بزرگتر باشد در این‌صورت عدد متناظر برای عضویت آن در A (یعنی مجموعه‌ی «اعداد بزرگ») به یک نزدیکتر می‌باشد و برعکس. یعنی هر چقدر عدد مورد نظر کوچکتر باشد عدد مربوط به عضویت آن در A به صفر نزدیکتر است.

به این ترتیب بجای آنکه بگوییم عدد ۱۰۰۰ بزرگ است یا بزرگ نیست و یا آنکه در این باره ساکت باشیم، می‌گوییم درجه‌ی بزرگی آن مثلاً ۰/۷ است. به عبارت دیگر بجای آنکه بگوییم عدد ۱۰۰۰ عضو A است و یا عضو A نیست می‌گوییم: با درجه‌ی ۰/۷ عضو A است.

مسلماً در این مورد باید برای هر عدد از R، عددی از $I=[0,1]$ را به عنوان درجه و میزان عضویت و تعلّق از A نسبت دهیم. یعنی یک تابع در نظر بگیریم که قلمرو آن R و برد آن I باشد. مشاهده می‌شود که می‌توان یک قالب ریاضی، یعنی یک تابع از R به I را برای توصیف و تجزیه و تحلیل اعداد حقیقی بزرگ در نظر گرفت.

شاید متوجه شده باشید که اساس کار تشریح شده در بالا چیزی نیست جز گسترش مفهوم تابع نشانگر یک مجموعه که یک تابع با برد $\{0,1\}$ است به یک تابع با برد $[0,1]$.

بسیاری از مسائل و پیشامدها در دنیای واقعی ترکیبی از مولفه‌های مبهم و نادقیق است. از این‌رو بکارگیری نظریه مجموعه‌های فازی می‌تواند با دنیای واقعی سازگارتر باشد و به این ترتیب می‌توان بسیاری از مفاهیم بیگانه با ریاضیات فعلی را وارد دنیای ریاضیات کرد و تفکرات و مفاهیم و زبان و

منطق بشری را در یک ساختار ریاضی نظم و ترتیب داد.

۳.۱ نظریه مجموعه‌های فازی

در این بخش، مفاهیم مقدماتی، تعاریف لازم و نتایجی در زمینه نظریه مجموعه‌های فازی ارائه می‌گردد. برای آگاهی بیشتر می‌توان به منابع [?، ?، ?، ?، ?، ?، ?] مراجعه کرد.
در نظریه مجموعه‌های معمولی عضویت یک عنصر به مجموعه قطعی است. فرض کنید X یک مجموعه مرجع باشد، زیرمجموعه A از X عبارتست از عناصری از X که دقیقاً مشخص شده باشند. زیرمجموعه A را می‌توان با استفاده از مفهوم تابع مشخصه بیان کرد.

تعریف ۱.۳.۱ فرض کنید X یک مجموعه مرجع دلخواه باشد. تابع مشخصه هر زیرمجموعه معمولی A از X، $\mu_A(x) : X \to \{۰, ۱\}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} ۱ & x \in A \\ \\ ۰ & x \notin A\,. \end{cases}$$

با توجه به تعریف فوق، برای هر $x \in X$، $\mu_A(x)$ تنها یکی از مقادیر ۰ یا ۱ را خواهد گرفت.

حال اگر برد تابع μ_A را از مجموعه‌ی دو عضوی $\{۰, ۱\}$ به بازه $[۰, ۱]$ تعمیم دهیم، تابعی خواهیم داشت که به هر عضو x از X، عددی را در بازه $[۰, ۱]$ نسبت می‌دهد. پس A دیگر یک مجموعه معمولی نخواهد بود بلکه به چنین مجموعه‌ای، مجموعه فازی می‌گویند و یا بطور دقیقتر، A زیرمجموعه فازی X است.

در واقع اگر $\mu_A(x) \in (۰, ۱)$، آنگاه در مورد عضویت x در A با عدم قطعیت مواجه هستیم. در حقیقت در اینجا به نوعی مفهوم عضویت یک عنصر را تعمیم داده‌ایم.

تعریف ۲.۳.۱ فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی باشد. هر زیرمجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ از X توسط یک تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}} : X \to [۰, ۱]$، مشخص می‌شود که در آن برای هر $x \in X$، مقدار $\mu_{\tilde{A}}(x)$ در بازه $[۰, ۱]$ میزان عضویت x را در $\tilde{A}$ نشان می‌دهد. نزدیکی مقدار $\mu_{\tilde{A}}(x)$ به عدد یک نشانه عضویت قویتر x در مجموعه $\tilde{A}$ و نزدیکی آن به صفر نشان‌دهنده عضویت ضعیفتر x در مجموعه $\tilde{A}$ است.

تعریف ۳.۳.۱ فرض کنید X یک مجموعه مرجع و $\widetilde{A}$ یک زیرمجموعه فازی از آن باشد. مجموعه نقاطی از X مانند x که $\mu_{\widetilde{A}}(x) > ۰$، را تکیه‌گاه $\widetilde{A}$ می‌نامند و با $S(\widetilde{A})$ نشان می‌دهند یعنی: $S(\widetilde{A}) = \left\{ x \in X \ \mid \ \mu_{\widetilde{A}}(x) > ۰ \right\}$.

تعریف ۴.۳.۱ فرض کنید X یک مجموعه مرجع و $\widetilde{A}$ یک زیرمجموعه فازی از آن باشد. بزرگترین درجه عضویت را، ارتفاع مجموعه‌ی $\widetilde{A}$ نامیده و با نماد $hgt(\widetilde{A})$ نشان می‌دهند که به صورت $hgt(\widetilde{A}) = \sup \ \mu_{\widetilde{A}}(x)$ تعریف می‌شود.

تعریف ۵.۳.۱ فرض کنید $\widetilde{A}$ یک زیرمجموعه فازی باشد. هرگاه $hgt(\widetilde{A}) = ۱$ آنگاه $\widetilde{A}$ را نرمال گوییم. در غیراین‌صورت $\widetilde{A}$ را زیرنرمال گوییم.

هر مجموعه فازی زیرنرمال $\widetilde{A}$ را می‌توان با تقسیم $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ بر ارتفاع $\widetilde{A}$، نرمال کرد.
اگر x عضوی از $\widetilde{A}$ باشد که $\mu_{\widetilde{A}}(x) = ۰/۵$، آنگاه x را یک نقطه گذر (معبر) $\widetilde{A}$ گوییم.

مثال ۱.۳.۱ اگر $X = [۰, ۲۰۰۰]$، یک زیرمجموعه فازی از X را در نظر می‌گیریم که نشان‌دهنده ویژگی «نزدیک به ۱۰۰۰» باشد. بنابراین تابع عضویت این زیرمجموعه فازی را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x}{۱۰۰۰} & x \leq ۱۰۰۰ \\ \frac{۲۰۰۰-x}{۱۰۰۰} & x > ۱۰۰۰ \ . \end{cases}$$

در این جا مثلاً $\mu_{\widetilde{A}}(۲۰۰) = \mu_{\widetilde{A}}(۱۸۰۰) = ۰/۲$. یعنی اعداد ۲۰۰ و ۱۸۰۰ هر دو با درجه عضویت ۰/۲ عضو مجموعه فازی $\widetilde{A}$ هستند. به عبارت دیگر اعداد ۲۰۰ و ۱۸۰۰ با درجه عضویت ۰/۲ ویژگی «نزدیک به ۱۰۰۰» را دارا می‌باشند.

۱.۳.۱ مفاهیم زیرمجموعه فازی

برای نشان دادن یک زیرمجموعه فازی روشهای مختلفی رایج است. روش متداول برای توصیف یک زیرمجموعه فازی به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب به صورت $\widetilde{A} = \left\{(x, \mu_{\widetilde{A}}(x))\ ,\ x \in X\right\}$ می‌باشد.

هنگامی که X یک مجموعه متناهی (یا نامتناهی شمارا) به صورت گسسته $\{x_۱, \cdots, x_n\}$ باشد، یک زیرمجموعه فازی $\widetilde{A}$ به صورت $\widetilde{A} = \left\{\frac{\mu_{\widetilde{A}}(x_۱)}{x_۱}, \cdots, \frac{\mu_{\widetilde{A}}(x_n)}{x_n}\right\}$ و یا به شکل $\widetilde{A} = \frac{\mu_{\widetilde{A}}(x_۱)}{x_۱} + \cdots + \frac{\mu_{\widetilde{A}}(x_n)}{x_n} = \sum_{i=۱}^{n} \frac{\mu_{\widetilde{A}}(x_i)}{x_i}$ نشان داده می‌شود. بطوریکه در این روابط منظور از علامت $+$، اجتماع است نه جمع جبری. همچنین نماد خط کسری، علامت تقسیم نبوده و نشانگر آن است که عدد بالایی $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ درجه عضویت عنصر پایینی x است.

هنگامی که X یک مجموعه پیوسته باشد از نماد $\widetilde{A} = \int_X \frac{\mu_{\widetilde{A}}(x)}{x}$ استفاده می‌شود که در آن منظور از علامت $\int$، اجتماع است.

قرارداد: در بعضی از موارد و برای اختصار، بجای $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ می‌نویسیم $A(x)$.

مثال ۲.۳.۱ فرض کنید $X = \{۱, ۲, \cdots, ٦\}$. در این‌صورت یک زیرمجموعه فازی $\widetilde{A}$ از X را می‌توان به صورت $\widetilde{A} = \{(۳, ۰/۵), (۴, ۱), (۵, ۰/۵)\}$ و یا به صورت $\widetilde{A} = \frac{۰/۵}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۰/۵}{۵}$ معرفی کرد. در این مثال داریم $S(\widetilde{A}) = \{۳, ۴, ۵\}$ و $hgt(\widetilde{A}) = ۱$. یعنی $\widetilde{A}$ نرمال است. اعداد ۳ و ۵ برای مجموعه فازی $\widetilde{A}$ دو معبر می‌باشند.

تعریف ٦.۳.۱ اگر X یک مجموعه مرجع، $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ زیرمجموعه‌های فازی آن با توابع عضویت $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ و $\mu_{\widetilde{B}}(x)$ باشند که به اختصار با $A(x)$ و $B(x)$ نشان می‌دهیم آنگاه:

- مجموعه فازی $\widetilde{A}$ را تهی گوییم اگر برای هر $x \in X$، $A(x) = ۰$.
- مجموعه فازی $\widetilde{A}$ را کامل گوییم اگر برای هر $x \in X$، $A(x) = ۱$.
- مجموعه فازی $\widetilde{A}$ را زیرمجموعه فازی $\widetilde{B}$ گوییم و با نماد $\widetilde{A} \subseteq \widetilde{B}$ نشان می‌دهیم هرگاه برای هر $x \in X$ داشته باشیم: $A(x) \leq B(x)$.

• دو مجموعه فازی $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ را مساوی گوییم و با نماد $\widetilde{A} = \widetilde{B}$ نشان می‌دهیم اگر برای هر $x \in X$ داشته باشیم: $A(x) = B(x)$.

• متمم مجموعه فازی $\widetilde{A}$ را با $\widetilde{A}'$ نشان می‌دهند که به ازای هر $x \in X$، $A'(x) = ۱ - A(x)$.

مثال ۳.۳.۱ فرض کنید $X = \{۱, ۲, \cdots, ۱۰\}$ و زیرمجموعه‌های فازی $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ به صورت زیر تعریف شده باشند:

$$\widetilde{A} = \left\{\tfrac{۰.۱}{۲}, \tfrac{۰.۳}{۳}, \tfrac{۰.۵}{۴}, \tfrac{۰.۸}{۶}, \tfrac{۰.۵}{۷}, \tfrac{۰.۳}{۸}, \tfrac{۰.۱}{۹}\right\},$$

$$\widetilde{B} = \left\{\tfrac{۰.۱}{۱}, \tfrac{۰.۴}{۲}, \tfrac{۰.۶}{۳}, \tfrac{۰.۸}{۴}, \tfrac{۱}{۵}, \tfrac{۰.۸}{۶}, \tfrac{۰.۶}{۷}, \tfrac{۰.۴}{۸}, \tfrac{۰.۱}{۹}\right\} .$$

در این‌صورت چون برای هر $x \in X$، $A(x) \leq B(x)$ پس $\widetilde{A} \subseteq \widetilde{B}$ و همچنین خواهیم داشت:

$$\widetilde{A}' = \left\{\tfrac{۱}{۱}, \tfrac{۰/۹}{۲}, \tfrac{۰/۷}{۳}, \tfrac{۰/۵}{۴}, \tfrac{۱}{۵}, \tfrac{۰/۲}{۶}, \tfrac{۰/۵}{۷}, \tfrac{۰/۷}{۸}, \tfrac{۰/۹}{۹}, \tfrac{۱}{۱۰}\right\} .$$

• فرض کنید X یک مجموعه معمولی متناهی و A یک زیرمجموعه فازی از آن باشد. عدد اصلی A با نماد $|A|$ و عدد اصلی نسبی A با نماد $\|A\|$ نمایش داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$|A| = \sum_{x \in X} \mu_A(x) ,$$

$$\|A\| = \tfrac{|A|}{|X|} .$$

همچنین در حالت X نامتناهی، عدد اصلی زیرمجموعه فازی A از X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|A| = \int_X \mu_A(x)\, dx .$$

۲.۳.۱ عملگرهای مجموعه‌ای زیرمجموعه‌های فازی

• اجتماع دو مجموعه فازی $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$(A \cup B)(x) = \max[A(x), B(x)] , \qquad \forall x \in X .$$

• اشتراک دو مجموعه فازی $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$(A \cap B)(x) = \min[A(x), B(x)] , \qquad \forall x \in X .$$

مثال ۴.۳.۱ فرض کنید $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ زیرمجموعه‌های فازی تعریف شده در مثال سوم این فصل باشند پس داریم:

$$\widetilde{A} \cup \widetilde{B} = \left\{ \frac{0/1}{1}, \frac{0/4}{2}, \frac{0/6}{3}, \frac{0/8}{4}, \frac{1}{5}, \frac{0/8}{6}, \frac{0/6}{7}, \frac{0/4}{8}, \frac{0/1}{9} \right\},$$

$$\widetilde{A} \cap \widetilde{B} = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{0/1}{2}, \frac{0/3}{3}, \frac{0/5}{4}, \frac{0}{5}, \frac{0/8}{6}, \frac{0/5}{7}, \frac{0/3}{8}, \frac{0/1}{9} \right\}.$$

تعریف ۷.۳.۱ فرض کنید X یک مجموعه مرجع باشد و $\widetilde{A}_1, \cdots, \widetilde{A}_n$ زیرمجموعه‌های فازی از X باشند در این‌صورت $(\widetilde{A}_1, \cdots, \widetilde{A}_n)$ را یک افراز فازی مجموعه X گویند هرگاه:

۱) هر یک از زیرمجموعه‌های $\widetilde{A}_1, \cdots, \widetilde{A}_n$ ناتهی باشند.

۲) هر یک از زیرمجموعه‌های $\widetilde{A}_1, \cdots, \widetilde{A}_n$ غیرکامل باشند.

۳) برای هر $x \in X$ داشته باشیم: $\sum_{i=1}^{n} A_i(x) = 1$.

۳.۳.۱ عملگرهای حسابی زیرمجموعه‌های فازی

- جمع جبری دو مجموعه فازی $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ با نماد $\widetilde{A} + \widetilde{B}$ نشان داده می‌شود و به صورت مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:
$$(A + B)(x) = A(x) + B(x) - A(x) \times B(x).$$
- جمع کراندار دو مجموعه فازی $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ با نماد $\widetilde{A} \oplus \widetilde{B}$ نشان داده می‌شود و به صورت مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:
$$(A \oplus B)(x) = \min\{1, A(x) + B(x)\}.$$
- تفاضل کراندار دو مجموعه فازی $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ با نماد $\widetilde{A} \ominus \widetilde{B}$ نشان داده می‌شود و به صورت مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:
$$(A \ominus B)(x) = \max\{0, A(x) + B(x) - 1\}.$$
- حاصلضرب جبری دو مجموعه فازی $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ با نماد $\widetilde{A} \cdot \widetilde{B}$ نشان داده می‌شود و به صورت مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:
$$(A \cdot B)(x) = A(x) \times B(x).$$

- اگر $\tilde{A}$ یک زیرمجموعه فازی باشد، آنگاه برای هر $\alpha \in (0,1]$ مجموعه $\alpha \cdot \tilde{A}$ به صورت مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$(\alpha \cdot A)(x) = \alpha A(x) \ .$$

- برای $m > 0$ توان mام یک مجموعه فازی $\tilde{A}$ با نماد $\tilde{A}^m$ نشان داده می‌شود و به صورت مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$A^m(x) = [A(x)]^m \ .$$

۴.۳.۱ برشها

مجموعه(معمولی) عناصری از X که درجه عضویت آنها در مجموعه فازی $\tilde{A}$ حداقل به بزرگی α $(\alpha > 0)$ باشد، α—برش $\tilde{A}$ (مجموعه تراز α وابسته به $\tilde{A}$) گوییم و با نماد A_α نشان می‌دهیم، یعنی:

$$A_\alpha = \{x \in X \mid A(x) \geq \alpha\} \ .$$

همچنین مفهوم α—برش قوی را با نماد $A_{\bar{\alpha}}$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A_{\bar{\alpha}} = \{x \in X \mid A(x) > \alpha\} \ .$$

قضیه ۱.۳.۱ هرگاه $\tilde{A}$ زیرمجموعه فازی از مجموعه مرجع X باشد. آنگاه برای هر $x \in X$ و $\alpha > 0$ تابع عضویت $\tilde{A}$ به صورت $A(x) = \sup\{\alpha \mid x \in A_\alpha\}$ است.

۵.۳.۱ اتحاد تجزیه

هر مجموعه‌ی فازی مانند $\tilde{A}$ را می‌توان به صورت $\tilde{A} = \cup_\alpha \alpha A_\alpha$ برحسب مجموعه‌های تراز آن (α—برشها) تجزیه کرد.

در بعضی موارد بسته به اینکه تابع عضویت A پیوسته یا گسسته باشد رابطه اتحاد تجزیه به صورتهای

$$A = \int_0^1 \alpha A_\alpha$$

و

$$A = \sum_{\alpha} \alpha A_\alpha \ .$$

نوشته می‌شود که در آنها $\int_{0}^{1}$ و $\sum_{\alpha}$، اجتماع A_α را نشان می‌دهند.

۶.۳.۱ تحدب فازی

مجموعه فازی $\tilde{A}$ را محدب گوییم هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in X$ و هر $\lambda \in (0, 1)$ داشته باشیم:

$$A\left[\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2\right] \geq \min\left[A(x_1), A(x_2)\right] \ .$$

و بر اساس مفهوم α—برشها میتوان گفت:

مجموعه فازی $\tilde{A}$ را محدب گوییم اگر همه‌ی α—برشهای آن محدب باشند یا به عبارتی α—برشهای آن بازه باشند. در غیر این‌صورت غیرمحدب می‌گوییم.

تعریف ۸.۳.۱ مجموعه فازی $\tilde{A}$ را کراندار گوییم، هرگاه برای هر $\alpha > 0$، α—برشهای آن کراندار باشند، یعنی به ازای هر $\alpha > 0$ یک $R(\alpha)$ متناهی وجود داشته باشد که

$$\forall \ x \in A_\alpha \quad \Longrightarrow \quad \|x\| \leq R(\alpha)$$

که در آن $\|x\|$ نرم اقلیدسی x است.

۷.۳.۱ اصل گسترش

اصل گسترش یکی از مفاهیم اساسی و کلیدی در نظریه مجموعه‌های فازی می‌باشد که یک وسیله توانمند برای تعمیم مفاهیم ریاضی غیرفازی به صورت کمیتهای فازی است.

یک تابع معمولی مانند $f : X \to Y$ را در نظر بگیرید. این تابع هر $x \in X$ را به یک نقطه از Y مانند y می‌نگارد. بنابراین تابع f بر هر نقطه از X عمل کرده و نقطه‌ای از Y را به آن نسبت می‌دهد. حال می‌خواهیم f را طوری تعمیم دهیم که بجای اینکه بر یک نقطه از X عمل کند، بر یک زیرمجموعه فازی از X عمل کند. یعنی قلمرو f از X به $F(X)$ (مجموعه زیرمجموعه‌های فازی X) تعمیم داده شود. آنچه مهم است تعریف مقدار حاصل از عمل f بر یک زیرمجموعه فازی از X مثلاً A

است. مسلماً انتظار داریم که $f(A)$ یعنی حاصل عمل f بر A، دیگر یک نقطه از Y نباشد بلکه یک زیرمجموعه فازی از Y مانند B باشد. اصل گسترش روش این تعمیم را بیان می‌کند.
به عبارت دیگر تابع f، تابع جدیدی را به صورت زیر القاء می‌کند که $f(A)$ زیرمجموعه فازی از Y است:

$$\begin{aligned} f:\quad & F(X) \to F(Y) \\ & A \to f(A) \end{aligned}$$

تعریف ۹.۳.۱ فرض کنید X و Y دو مجموعه و f یک تابع به صورت $f: X \to Y$ و A یک زیرمجموعه فازی از X باشد اصل گسترش بیان می‌کند که می‌توانیم قلمرو f را به زیرمجموعه‌های فازی X و به صورت زیر گسترش دهیم:

$$B = f(A) = \{(y, B(y)) \ \mid \ y = f(x) \ \ , \ \ x \in X\} \,,$$

که در آن

$$B(y) = f(A)(y) = \begin{cases} \sup \ A(x) & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ \\ 0 & f^{-1}(y) = \emptyset \,. \end{cases}$$

تعریف ۱۰.۳.۱ فرض کنید $\widetilde{A}_1, \cdots, \widetilde{A}_n$ به ترتیب زیرمجموعه‌های فازی از مجموعه‌های مرجع $X_1, \cdots, X_n$ باشند. حاصلضرب دکارتی $\widetilde{A}_1, \cdots, \widetilde{A}_n$ را با $\widetilde{A}_1 \times \cdots \times \widetilde{A}_n$ نشان داده و به صورت یک زیرمجموعه‌ی فازی از فضای حاصلضرب $X_1 \times \cdots \times X_n$ با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$\left(\widetilde{A}_1 \times \cdots \times \widetilde{A}_n\right)(x_1, \cdots, x_n) = \min\left\{A_i(x_i) \ \mid \ x_i \in \widetilde{A}_i \ , \ 1 \leq i \leq n\right\} \,.$$

مثال ۵.۳.۱ اگر $X_1 = \{1, 2\}$، $X_2 = \{1, 2, 3\}$، $\widetilde{A}_1 = \left\{\frac{1}{1}, \frac{0/2}{2}\right\}$ و $\widetilde{A}_2 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{0/4}{2}, \frac{0/6}{3}\right\}$ آنگاه داریم:

$$\widetilde{A}_1 \times \widetilde{A}_2 = \left\{\frac{0}{(1,1)}, \frac{0/4}{(1,2)}, \frac{0/6}{(1,3)}, \frac{0}{(2,1)}, \frac{0/2}{(2,2)}, \frac{0/2}{(2,3)}\right\} \,.$$

۴.۱ اعداد فازی

مفهوم عدد فازی بعد از نظریه مجموعه‌های فازی مطرح شد. در بسیاری از کاربردها، مجموعه‌های فازی و اعداد فازی را می‌توان بطور یکسان مورد استفاده قرار داد.

تعریف ۱.۴.۱ یک مجموعه فازی نرمال محدب مانند $\tilde{A}$ از R (خط حقیقی) را یک عدد فازی می‌گوییم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱) تابع عضویت $A(x)$ تک‌نمایی باشد یعنی دقیقاً یک $x_\circ \in R$ وجود داشته باشد بطوریکه $A(x_\circ) = ۱$.

۲) تابع $A(x)$ پیوسته تکه‌ای باشد.

قرارداد: مجموعه‌ی تمام اعداد فازی را با $F(R)$ نشان می‌دهیم.

۱.۴.۱ اعداد فازی LR

اعداد فازی LR[۶] نوع خاصی از اعداد فازی هستند که علاوه بر اینکه ساختار ویژه‌ای دارند، اعمال حسابی بر آنها نیز از قواعد خاصی پیروی می‌کند. این ساختار و قواعد باعث شده است که در عمل، عمدتاً از این نوع اعداد فازی استفاده شود.

تعریف ۲.۴.۱ اگر عدد فازی $\tilde{A}$ دارای تابع عضویتی به صورت

$$A(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right) & x \leq m \\ R\left(\frac{x-m}{\beta}\right) & x > m\,. \end{cases}$$

باشد که در آن L و R توابعی غیر صعودی از R^+ به $[\circ, ۱]$ هستند و $L(\circ) = R(\circ) = ۱$، آنگاه $\tilde{A}$ را یک عدد فازی LR نامیده و با نماد $\tilde{A} = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ نشان می‌دهند. عدد m را مقدار میانی یا میانه و اعداد مثبت α و β را به ترتیب پهنای چپ و پهنای راست $\tilde{A}$ می‌نامند. توابع L و R را مرجع می‌نامند.

[۶] Left And Right Fuzzy Numbers