دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه فردوسی مشهد

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض
گرایش هندسه

عنوان :

ساختار فضاهای پیوستار پئانو همبند ساده انقباض ناپذیر

استاد راهنما :
دکتر بهروز مشایخی فرد

استاد مشاور :
دکتر هانیه میرابراهیمی

نگارنده :
سمانه قویدل جعفری

فهرست مندرجات

مقدمه

کوپربرگ[1] [۸] این سوال را مطرح کرد که آیا منحنی سینوسی توپولوژیدان‌ها شبه انقباض پذیر است؟ در کنفرانس توپولوژی در سال ۱۹۸۹ هاگپیان [2] توجه کاتسوروآ را به این مساله جلب کرد. در سال ۱۹۹۲ کاتسوروآ[3] [۷] شبه انقباض ناپذیری منحنی سینوسی را نسبت به خود فضای سینوسی اثبات و پس از آن در سال ۱۹۹۴ دبسکی[4] [۱] شبه انقباض ناپذیری منحنی سینوسی را اثبات کرد.

گریفیتس[5] [۵] ساختاری از یک فضای پیوستارپئانو ناهمبند ساده شبه حجره ۲—بعدی ارائه داد:

فرض کنید H_1 گوشواره هاوایی[6] ۱—بعدی با نقطه θ باشد که در آن H_1 همبند ساده موضعی نمی‌باشد. اگر $Y = C\mathrm{H}_1$ مخروط روی گوشواره هاوایی باشد آن‌گاه فضای گریفیتس الحاق ضعیف دو نسخه از فضای Y در نقطه θ می‌باشد.

ادا[7] [۳] تعمیمی از مثال گریفیتس ارائه داد که در آن به جای گوشواره هاوایی ۱—بعدی، گوشواره هاوایی ۲—بعدی $H_۲$ را که به صورت زیر تعریف می‌شود، در نظر

---

[1] Kuperburg

[2] Hagopian

[3] Katsuura

[4] Debski

[5] Griffiths

[6] Hawaiian earring

[7] Eda

گرفت

$$\mathrm{H}_2 = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 | (x_0 - 1/n)^2 + x_1^2 + x_2^2 = (1/n)^2 \quad n \in \mathbb{N}\}.$$

تعمیم مثال گریفیتس، یک فضای پیوستار پئانو همبند ساده انقباض ناپذیر شبه حجره ۳−بعدی می‌باشد.

در سال ۲۰۰۷ ادا، کریموف[8] و ریپووز[9][۲] بر پایه منحنی سینوسی یک ساختار تابعگونی از فضاهای شبه مخروطی ارائه دادند، این تابعگون، $SC(-,-)$، از فضاهای توپولوژی نقطه دار همبند مسیری با توابع پیوسته به زیر رسته فضاهای همبند ساده می‌باشد. اثر این ساختار بر یک پیوستار پئانو n−بعدی، یک پیوستار پئانو $(n+1)$−بعدی شبه حجره انقباض ناپذیر می‌گردد. این پایان نامه مشتمل بر ۴ فصل می‌باشد. در فصل اول تعاریف و مفاهیم مقدماتی که مورد نیاز پایان نامه است، ارائه می‌گردد. در فصل دوم به معرفی منحنی سینوسی می‌پردازیم و سپس اثباتی برای شبه انقباض ناپذیری این فضا بیان می‌کنیم. در فصل سوم به معرفی ساختار $SC(Z, z_0)$ و ویژگی‌های آن می‌پردازیم و اثباتی برای همبند ساده بودن این فضا ارائه می‌دهیم. در فصل چهارم به اثبات انقباض ناپذیری این فضا می‌پردازیم.

مقالاتی که در این پایان نامه مورد استفاده قرار گرفتند، به شرح زیر می‌باشد.

1. W. Debski, *Pseude-contractibility of the* sin $1/x$, Houston .J.Math. **20** (1984), 365-367.

2. K. Eda, U. H. Karimov, D. Repovs, *A construction of noncontractible simply connected cell-like two dimensional Peano continua*, Fund. Math. 195:3 (2007), 193-203.

[8] Karimov
[9] Repovs

فصل ۱

تعاریف ومفاهیم مقدماتی

۱.۱ توپولوژی

در این بخش به بیان قضایا و مفاهیمی از توپولوژی که مورد نیاز این رساله است، می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱.۱ فضای زیر مکعب هیلبرت[۱] نامیده می‌شود:

$$Q = \prod_{n\in\mathbb{N}} [0, 1/n].$$

Q یک فضای متریک با متر $d(x,y) = (\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2)^{1/2}$، می‌باشد.

تعریف ۲.۱.۱ هر فضای متریک، فشرده، همبند[۲] و همبند موضعی[۳] را پیوستار پئانو[۴] می‌نامیم.

[۱] Hilbert cube
[۲] connected
[۳] locally connected
[۴] peano continuum

قضیه ۳.۱.۱ فضای متریک و فشرده X دارای پایه شمارا می‌باشد.

برهان . به مرجع [۱۳] رجوع شود. $\square$

نتیجه ۴.۱.۱ هر فضای متریک و فشرده در مکعب هیلبرت نشانده می‌شود.

برهان . به مرجع [۱۳] رجوع شود. $\square$

قضیه ۵.۱.۱ فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژی، X فشرده و $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع پیوسته و دوسویی باشد در این صورت f یک همسانریختی است.

برهان . به مرجع [۱۳] رجوع شود. $\square$

لم ۶.۱.۱ لم عدد لبگ : فرض کنید A یک پوشش برای فضای متریک (X,d) باشد. اگر X فشرده باشد آن‌گاه عدد مثبتی مانند δ هست که به ازای هر زیر مجموعه X که قطر آن کمتر از δ باشد عضوی از A موجود باشد که حاوی آن است.

برهان . به مرجع [۱۳] رجوع شود. $\square$

لم ۷.۱.۱ فرض کنید X یک فضای همبند مسیری موضعی[۵] باشد. در این صورت هر زیر مجموعه باز و همبند از فضای X همبند مسیری می‌باشد.

برهان . به مرجع [۱۳] مراجعه شود. $\square$

قضیه ۸.۱.۱ فرض کنید $K \subseteq Y \subseteq X$، در این صورت K نسبت به Y فشرده است اگر و فقط اگر K نسبت به X فشرده باشد.

[۵] locally path connected

برهان . مرجع [۱۶] قضیه ۳۳.۲ رجوع شود. □

قضیه ۹.۱.۱ فضای X همبند موضعی است اگر و فقط اگر به ازای هر مجموعه باز U در X هر یک از مولفه های U در X باز باشد.

برهان . فرض کنیم X همبند موضعی باشد و $U \subseteq X$ باز باشد و C مولفه ای از U باشد. اگر x نقطه ای از C باشد آن گاه همسایگی همبندی مانند V از x موجود است بطوریکه $V \subseteq U$. چون V همبند است، پس $V \subseteq C$. درنتیجه C در X باز است. بالعکس: فرض کنیم مولفه های مجموعه های باز در X باز باشند. همچنین فرض کنیم $x \in X$ و U یک همسایگی x باشد و C مولفه ای از U است که شامل X می باشد. بنابراین C همبند و بنابر فرض C در X باز است. درنتیجه X در x همبند موضعی می باشد.
□

قضیه ۱۰.۱.۱ فرض کنیم $f : X \longrightarrow Y$ تابعی پیوسته باشد. در این صورت اگر B یک مولفه Y باشد آن گاه $f^{-1}(B)$ اجتماعی از مولفه های X می باشد.

برهان . فرض کنیم $A = f^{-1}(B)$ و $a \in A$. $\{a\}$ زیر مجموعه تنها یک مولفه X می باشد. این مولفه را C_a می نامیم. چون C_a همبند و f پیوسته است ، در این صورت $f(C_a)$ همبند می باشد. از طرفی $f(a) \in B$ و $f(a) \in f(C_a)$ بنابزاین $B \bigcap f(C_a) \neq \phi$ درنتیجه $f(C_a) \subseteq B$ بنابراین

$$C_a \subseteq f^{-1}(f(C_a) \subseteq f^{-1}(B) = A$$

درنتیجه $A = \bigcup_{a \in A} C_a$. □

قضیه ۱۱.۱.۱ فرض کنید $q : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت پوشا و τ توپولوژی X باشد. گردایه $\mathcal{U}$ از زیر مجموعه‌های Y را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{U} = \{V \subseteq Y \ \mid \ q^{-1}(V) \in \tau\}$$

در این صورت $\mathcal{U}$ یک توپولوژی در Y می‌باشد. این توپولوژی را توپولوژی القایی q به Y می‌نامند و با علامت $q^*(\tau)$ نمایش می‌دهند.

برهان . قضیه ۳۲.۴ از مرجع [۱۴] را ببینید. □

قضیه ۱۲.۱.۱ گردایه $q^*(\tau)$ ظریف‌ترین توپولوژی در Y است که نسبت به آن $q : X \longrightarrow Y$ پیوسته می‌باشد.

برهان . فرض کنید τ' یک توپولوژی دلخواه در Y باشد. به‌طوریکه تابع $q : X \longrightarrow Y$ نسبت به آن پیوسته باشد. به‌علاوه فرض می‌کنیم $W \in \tau'$ چون q پیوسته است $q^{-1}(W)$ باز می‌باشد. در نتیجه $W \in q^*(\tau)$. به عبارت دیگر $\tau' \subseteq q^*(\tau)$. □

تعریف ۱۳.۱.۱ فرض کنید X یک فضا و $\sim$ یک رابطه هم ارزی روی X باشد و $X/\sim = \{[x] \mid x \in X\}$. در این صورت توپولوژی القایی توسط نگاشت زیر

$$q : X \longrightarrow X/\sim$$
$$q(x) = [x]$$

به $X/\sim$ را توپولوژی خارج قسمتی[٦] و q را نگاشت خارج قسمتی[۷] می‌نامیم.

[٦] qoutient topology
[۷] qoutient map

تعریف ۱۴.۱.۱ اگر A یک مجموعه و $\sim$ یک رابطه هم ارزی روی A باشد. در این صورت زیرمجموعه B از A را اشباع شده[۸] می‌نامیم هرگاه

$$\forall \quad b \in B \qquad\qquad [b] \subseteq B$$

لم ۱۵.۱.۱ فرض کنید $q : X \longrightarrow X/\sim$ یک نگاشت خارج قسمتی باشد و $B \subseteq X$. اگر $B = q^{-1}(q(B))$ آنگاه B زیر مجموعه اشباع شده فضای X می‌باشد.

برهان . به مرجع [۱۳] رجوع شود. □

قضیه ۱۶.۱.۱ فرض کنید $q : X \longrightarrow X/\sim$ یک نگاشت خارج قسمتی و U زیرمجموعه اشباع شده X باشد. در این صورت U در X باز است اگر و فقط اگر $q(U)$ در $X/\sim$ باز باشد.

برهان . فرض کنیم U در X بازباشد. $U = q^{-1}(q(U))$ زیرا اولا $U \subseteq q^{-1}(q(U))$ و اگر $x \in q^{-1}(q(U))$ آن گاه $q(x) \in q(U)$ بنابراین

$$b \in U \qquad\qquad q(x) = q(b) \Longrightarrow [x] = [b]$$

از طرفی چون U اشباع شده می باشد، $[b] \subseteq U$. بنابراین $x \in [x] \subseteq U$ لذا $q^{-1}(q(U)) \subseteq U$. درنتیجه $q(U)$ در $X/\sim$ باز است.
بالعکس : اگر $q(U)$ در $X/\sim$ باز باشد، پس $q^{-1}(q(U))$ در X باز می باشد. درنتیجه U در X باز می باشد. □

قضیه ۱۷.۱.۱ اگر $q : X \longrightarrow X/\sim$ یک نگاشت خارج قسمتی و X همبند موضعی باشد. آن گاه $X/\sim$ همبند موضعی می باشد.

---
[۸] saturated

برهان . فرض کنیم $V \subseteq X/\sim$ باز باشد ، نشان می دهیم مولفه های V در $X/\sim$ باز می باشد. فرض کنیم B مولفه دلخواه V باشد. چون V باز است پس $U = q^{-1}(V)$ در X باز است. $q|_U : U \longrightarrow V$ تابعی پیوسته است. بنابر قضیه ۱۰.۱.۱ $q^{-1}(B)$ اجتماعی از مولفه‌های U است. اما چون X همبند موضعی است ، و پس هر مولفه آن در X باز است. بنابراین $q^{-1}(B)$ باز می باشد. نشان می دهیم $q^{-1}(B)$ اشباع شده است. چون نگاشت خارج قسمتی پوشا می باشد ، در نتیجه $q(q^{-1}(B)) = B$ بنابراین

$$q^{-1}(q(q^{-1}(B))) = q^{-1}(B)$$

بنابر لم ۱۵.۱.۱، $q^{-1}(B)$ یک مجموعه اشباع شده می باشد و در نتیجه بنابر قضیه ۱۶.۱.۱، $q^{-1}(B)$ باز می باشد. $\square$

قضیه ۱۸.۱.۱ فرض کنید (X,τ) یک فضای توپولوژی و$\sim$ یک رابطه هم ارزی در X و q نگاشت خارج قسمتی باشد. در این صورت

$$q^*(\tau) = \{q(U) | \quad \text{زیر مجموعه اشباع شده باز } X \text{ باشد } U\}$$

برهان . به قضیه ۳۸.۴ از مرجع [۱۴] رجوع شود. $\square$

تعریف ۱۹.۱.۱ برای هر فضای X بعد استقرایی کوچک[۹] که با نماد $indX$ نمایش داده می شود ، به صورت زیر تعریف می شود.

۱) $indX = -1$ اگر و فقط اگر $X = \emptyset$.

۲) $indX \leq n$ اگر برای هر $x \in X$ و هر همسایگی V از نقطه x مجموعه باز $U \subseteq X$ موجود باشد به طوریکه $ind\partial U \leq n-1 \quad , \quad x \in U \subseteq V$

[۹] small inductive dimension

توجه شود ∂U مرز مجموعه U است و بعد استقرایی کوچک کمتر از n برای $n = ۰, ۱, \cdots$، تعریف شده است.

۳) $indX = n$ اگر $indX \leq n$ و $indX > n - ۱$، به عبارت دیگر نامساوی $indX \leq n - ۱$ برقرار نباشد.

۴) $indX = \infty$ اگر $indX > n$ برای هر $n = -۱, ۰, \cdots$.

تعریف ۲۰.۱.۱ گردایه $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه های فضای X دارای مرتبه[۱۰] $m + ۱$ است هرگاه نقطه ای از X در $m + ۱$ عضو $\mathcal{A}$ قرار گیرد و هیچ عضو X در بیش از $m + ۱$ عضو قرار نگیرد.

تعریف ۲۱.۱.۱ فضای X را با بعد متناهی[۱۱] گوییم هرگاه عدد صحیحی مانند m موجود باشد به طوریکه به ازای هر پوشش باز X مانند $\mathcal{A}$ پوشش بازی برای X مانند $\mathcal{B}$ موجود باشد به طوریکه تظریفی از $\mathcal{A}$ و مرتبه آن حداکثر $m + ۱$ باشد. این عدد با نماد $dimX$ نمایش داده می شود.

قضیه ۲۲.۱.۱ فرض کنید $X = Y \bigcup Z$ و Y و Z زیر مجموعه هایی بسته از X و با بعد متناهی باشند. در این صورت $dimX = \max\{dimY, dimZ\}$

برهان . به مرجع [۱۳] رجوع شود. □

قضیه ۲۳.۱.۱ اگر فضای متریک پذیر X به صورت اجتماعی از $F_۱, F_۲, \cdots$ از زیر مجموعه های بسته فضای X باشد، به طوریکه $indF_i \leq n$ در این صورت $indX \leq n$.

---
۱۰ order
۱۱ finite dimension

برهان . مرجع [۴] قضیه ۹.۱.۴ را ببینید. □

قضیه ۲۴.۱.۱ اگر X یک فضای متریک و تفکیک پذیر باشد آن‌گاه $indX = dimX$.

برهان . مرجع [۴] قضیه ۵.۱.۴ را ببینید. □

۲.۱ رسته

در این بخش قصد داریم مفاهیم جبری که در این رساله مورد استفاده قرار گرفته است را بیان کنیم. در ابتدا رسته را تعریف کرده و به معرفی چند رسته می‌پردازیم .

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{C}$ دسته‌ای از اشیا باشد. در این صورت $\mathcal{C}$ را رسته[۱۲] گوییم، هرگاه

۱) برای هر $B, A \in \mathcal{C}$، مجموعه $hom(A,B)$ چنان موجود باشد که

$$\forall A, B, C, D \quad s.t. \quad (A,B) \neq (C,D) \Longrightarrow hom(A,B) \neq hom(C,D).$$

هر عضو از $hom(A,B)$ را یک **ریخت**[۱۳] ازA به B گوییم و با نماد $f : A \longrightarrow B$ نشان می‌دهیم.

۲) برای $B, A, C \in \mathcal{C}$، تابع ترکیب

$$F : hom(A,B) \times hom(B,C) \longrightarrow hom(A,C)$$

[۱۲] category
[۱۳] morphism

به گونه‌ای موجود باشد که در دو شرط زیر صدق کند.
(i) برای هر عضو از $\mathcal{C}$ مانند A عضوی از $hom(A,A)$ مانند I_A موجود باشد به‌طوریکه

$$\forall B,C\in\mathcal{C}\ \ \forall f\in hom(A,B),\forall g\in hom(B,C)\quad I_A\circ f=f\quad,\quad g\circ I_A=g.$$

(ii)برای هر $A,B,C,D\in\mathcal{C}$ داشته باشیم

$$\forall f\in hom(A,B),\forall g\in hom(B,C)\forall h\in hom(C,D)\qquad h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f.$$

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{C},\mathcal{D}$ دو رسته باشند. در این صورت $T:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ یک تابعگون همورد[۱۴] می‌باشد هرگاه:

۱) اگر A یک شی در رسته $\mathcal{C}$ باشد، آن‌گاه $T(A)$ یک شی در رسته $\mathcal{D}$ است.

۲) اگر $f:A\longrightarrow B$ یک ریخت در رسته $\mathcal{C}$ باشد، آن‌گاه

$$T(f):T(A)\longrightarrow T(B)$$

یک ریخت در رسته $\mathcal{D}$ است به‌طوریکه

(a) اگر $A\in\mathcal{C}$، آن‌گاه $T(I_C)=I_{T(C)}$

(b) اگر $f:A\longrightarrow B$ و $g:B\longrightarrow C$ دو ریخت در رسته $\mathcal{C}$ باشند، آن‌گاه

$$T(g\circ f)=T(g)\circ T(f).$$

[۱۴] covariemt functor

تعریف ۳.۲.۱ ریخت $f : A \longrightarrow B$ از رسته $\mathcal{C}$ را هم‌ارزی گوییم هرگاه $g \in hom(B, A)$ موجود باشد به‌طوریکه

$$f \circ g = I_B, g \circ f = I_A$$

اگر ریخت $f : A \longrightarrow B$ هم‌ارزی باشد، آن گاه B و A را هم‌ارز گوییم.

تعریف ۴.۲.۱ فرض کنید Λ مجموعه مرتب جزئی و $\mathcal{C}$ یک رسته باشد. در این صورت یک دستگاه معکوس[۱۵] در کتگوری $\mathcal{C}$ با مجموعه اندیس‌گذار I، خانواده‌ای از اشیا $\mathcal{C}$ به صورت $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ با این خاصیت می‌باشد که برای هر دو اندیس λ و λ'که $\lambda \leq \lambda'$، ریخت $p_{\lambda\lambda'} : X_{\lambda'} \longrightarrow X_\lambda$ وجود دارد به‌طوریکه در دو شرط زیر صدق کند:

۱) برای هر $\lambda \in \Lambda$، ریخت $p_{\lambda\lambda} : X_\lambda \longrightarrow X_\lambda$ همانی باشد.

۲) اگر $\lambda \leq \lambda' \leq \gamma$، رابطه $p_{\lambda\lambda'} \circ p_{\lambda'\gamma} = p_{\lambda\gamma}$ مطابق با نمودار جابجایی زیر برقرار باشد

$$\begin{tikzcd}
X_\gamma \arrow[rr, "p_{\lambda\gamma}"] \arrow[dr, "p_{\lambda'\gamma}"'] & & X_{\lambda'} \\
& X_{\lambda'} \arrow[ur, "p_{\lambda\lambda'}"'] &
\end{tikzcd}$$

در این صورت دستگاه معکوس $\mathbf{X}$ را با نماد$\mathbf{X} = \{X_\lambda, p_{\lambda,\lambda'}, \Lambda\}$ نمایش می‌دهیم.

رسته $PRO - \mathcal{C}$

فرض کنید $\mathcal{C}$ یک رسته و $\mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}.\Lambda)$ یک دستگاه معکوس در $\mathcal{C}$ باشد. یک ریخت بین دو دستگاه معکوس $\mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}.\Lambda) \longrightarrow \mathbf{Y} = (Y_\nu, q_{\nu,\nu'}, M)$ شامل

[۱۵] inverse system

تابع $M \longrightarrow \Lambda : \phi$ و ریخت $f_\mu : X_{\phi(\mu)} \longrightarrow Y_\mu$ در کتگوری $\mathcal{C}$ می‌باشد و به صورت (f_μ, ϕ) نمایش داده می‌شود. برای هر $\mu \in M$ به‌طوریکه $\mu \leq \mu'$ یک $\lambda' \in \Lambda$ که $\lambda \geq \phi(\mu), \phi(\mu')$ موجود می‌باشد به‌طوریکه

$$f_\mu p_{\phi(\mu)\lambda} = q_{\mu\mu'} f_{\mu'} p_{\phi(\mu')\lambda}$$

به عبارت دیگر نمودار زیر جابجایی باشد

$$\begin{tikzcd}
X_{\phi(\mu)} \arrow[d, "f_\lambda"'] & X_\lambda \arrow[l] \arrow[r] & X_{\phi(\mu)} \arrow[d, "f_\lambda"] \\
Y_\mu & & Y_{\mu'} . \arrow[ll]
\end{tikzcd} \tag{۱}$$

اگر $\mathbf{Z} = (Z_\nu, r_{\nu,\nu'}, N)$ یک دستگاه معکوس و $(g_\nu, \psi) : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{Z}$ یک ریخت بین دستگاههاباشد. آن‌گاه ترکیب $(g_\nu, \psi)(f_\mu, \phi) = (h_\nu, \chi) : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Z}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\chi = \phi\psi : N \longrightarrow \Lambda \quad h_\nu = g_\nu f_{\psi(\nu)} : X_{\phi(\mu)} \longrightarrow Z_\nu$$

که (h_ν, χ) از نمودار جابجایی زیر پیروی می‌کند.

$$\begin{tikzcd}
 & & X_{\lambda'} \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\
X_{\chi(\nu)} \arrow[d, "f_{\psi(\nu)}"'] & X_\lambda \arrow[l] \arrow[r] & X_{\phi(\mu)} \arrow[d, "f_\mu"] & X_{\lambda'} \arrow[l] \arrow[r] & X_{\chi(\nu')} \arrow[d, "f_{\psi(\nu')}"] \\
Y_{\psi(\nu)} \arrow[d, "g_\nu"'] & & Y_\lambda \arrow[ll] \arrow[rr] & & Y_{\psi(\nu')} \arrow[d, "g_{\nu'}"] \\
Z_\nu & & & & Z_{\nu'} \arrow[llll]
\end{tikzcd}$$

و در این نمودار $\mu \geq \psi(\nu), \psi(\nu')$، $\lambda \geq \chi(\nu), \phi(\mu)$ و $\lambda' \geq \chi(\nu'), \phi(\mu')$.

ترکیب ریخت‌ها شرکت پذیر است. زیرا

$$(\phi\psi)\chi = \phi(\psi\chi)$$

و

$$(h_\nu g_{\chi(\nu)})f_{\psi\chi(\nu)} = h_\nu(g_{\chi(\nu)}f_{\psi\chi(\nu)}).$$

مورفیسم همانی سیستم‌ها $\mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$ را با در نظر گرفتن تابع همانی $I_\Lambda : \Lambda \longrightarrow \Lambda$ و ریخت همانی $l_\lambda : X_\lambda \longrightarrow X_\lambda$ می‌توان تعریف کرد. چون I_λ و $p_{\lambda\lambda'}$ جابجا می‌شود. جابجایی نمودار (۱) برقرار می‌باشد. همچنین

$$(f_\mu, \phi)(I_\lambda, I_\Lambda) = (f_\mu, \phi) \qquad \text{و} \qquad (I_\mu, I_M)(f_\mu, \phi) = (f_\mu, \phi).$$

درنتیجه رسته $inv - \mathcal{C}$ که اشیا آن تمام دستگاه‌های معکوس در گتگوری $\mathcal{C}$ و ریخت‌های آن، ریخت بین دستگاه‌های معکوس می‌باشد، تعریف می‌شود.

رابطه هم ارزی $\sim$ بین ریخت‌های $\mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $(f_\mu, \phi) \sim (f'_\mu, \phi')$ که برای $\mu \in M$، $\lambda \in \Lambda$ $\lambda \geq \phi(\mu), \phi(\mu')$ به‌طوریکه‌نمودار زیر جابجایی باشد

$$\begin{tikzcd}
X_{\phi(\mu)} \arrow[dr, "f_\mu"'] & X_\lambda \arrow[l] \arrow[r] & X_{\phi'(\mu)} \arrow[dl, "f'_\mu"] \\
& Y_\mu &
\end{tikzcd}$$

این رابطه انعکاسی، متقارن و متعدی می‌باشد.

اکنون رسته $Pro - \mathcal{C}$ را برای رسته $\mathcal{C}$ تعریف می‌کنیم.

اشیا $Pro - \mathcal{C}$ تمام دستگاههای معکوس $\mathbf{X}$ در رسته $\mathcal{C}$ (بر روی مجموعه جهت دار Λ) می‌باشد.

ریخت $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ کلاس هم ارزی ریخت دستگاههای $(f_\mu, \phi) : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ نسبت به رابطه هم ارزی $\sim$ می‌باشد.

اگر $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ و $g : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{Z}$ ریخت هایی در رسته $Pro - \mathcal{C}$ باشد. ترکیب

$gf : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Z}$ کلاس هم ارزی ریخت‌ها در $inv - \mathcal{C}$ شامل $(g_\nu, \psi)(f_\mu, \phi)$ می‌باشد و چون $\sim$ متعدی می‌باشد، ترکیب خوش تعریف است.

رسته Shape

تعریف ۵.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{F}$ یک رسته و $\mathcal{P}$ زیر رسته $\mathcal{F}$ باشد. برای هر شی $X \in \mathcal{F}$ یک $\mathcal{F}$- بسط[۱۶] از X، یک ریخت در رسته $PRO - \mathcal{F}$ از X به دستگاه معکوس $\mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ در $\mathcal{F}$، $\mathbf{p} : X \longrightarrow \mathbf{X}$ با خاصیت جهانی زیر می‌باشد.
برای هر دستگاه معکوس $\mathbf{Y} = (Y_\mu, p_{\mu\mu'}, M)$ در زیر رسته $\mathcal{P}$ و هر ریخت $\mathbf{h} : X \longrightarrow \mathbf{Y}$ در $PRO - \mathcal{F}$، ریخت یکتای $\mathbf{f} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ در رسته $PRO - \mathcal{F}$ موجود باشد به‌طوریکه $\mathbf{h} = \mathbf{fp}$، به عبارت دیگر نمودار زیر جابجایی باشد.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, dashed, "f"'] & X \arrow[l, "p"'] \arrow[d, "h"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

تعریف ۶.۲.۱ اگر $\mathcal{F}$ یک رسته و $\mathcal{P}$ زیر رسته $\mathcal{F}$ باشد، در این صورت $\mathcal{P}$ در رسته $\mathcal{F}$ چگال[۱۷] است هرگاه برای هر $X \in F$ یک $\mathcal{P}$- بسط $p : X \longrightarrow \mathbf{X}$ موجود باشد.

$\mathcal{F}$ یک رسته و $\mathcal{P}$ زیر رسته چگال $\mathcal{F}$ می‌باشد. فرض کنید $p : X \longrightarrow \mathbf{X}$ و $p' : X \longrightarrow \mathbf{X}'$، $\mathcal{P}-$بسط شی $X \in \mathcal{F}$ و $q : Y \longrightarrow \mathbf{Y}$ و $q' : Y \longrightarrow \mathbf{Y}'$ $\mathcal{P}-$بسط شی $Y \in \mathcal{F}$ باشند. در این صورت ریخت‌های $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ و $f' : \mathbf{X}' \longrightarrow \mathbf{Y}'$ در رسته

[۱۶] F-expansion
[۱۷] dense

$PRO-\mathcal{P}$ هم ارز می‌باشند و $f \sim f'$ هرگاه نمودار زیر در $PRO-\mathcal{P}$ جابجایی باشد.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[d, "f'"] \\ Y \arrow[r, "j"'] & Y' \end{tikzcd}$$

i و j یکریختی‌های طبیعی I می‌باشند. رابطه $\sim$ هم ارزی می‌باشد.

رسته $Shape$ را برای $(\mathcal{F},\mathcal{P})$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم و با $Sh(\mathcal{F},\mathcal{P})$ یا به طور اختصار با Sh نمایش می‌دهیم. اشیای $Sh(\mathcal{F},\mathcal{P})$، تمام اشیای رسته $\mathcal{F}$ می‌باشد.
ریخت $X \longrightarrow Y$ در رسته Sh، کلاسهای هم ارزی نسبت به رابطه $\sim$ بین ریخت‌های $f:\mathbf{X}\longrightarrow\mathbf{Y}$ در رسته $PRO-\mathcal{P}$ می‌باشد.
ترکیب $F:X\longrightarrow Y$ و $G:Y\longrightarrow Z$ به وسیله ترکیب $f:\mathbf{X}\longrightarrow\mathbf{Y}$ و $g:\mathbf{Y}\longrightarrow\mathbf{Z}$ تعریف می‌شود.

تعریف ۷.۲.۱ دو شی $X,Y\in\mathcal{F}$ را دارای شکل یکسان گوییم و به صورت $Sh(X)=Sh(Y)$ نمایش می‌دهیم هرگاه یک یکریختی بین X و Yدر رسته Sh برقرار باشد.

تبصره ۸.۲.۱ $F:X\longrightarrow Y$ یک یکریختی در رسته $Shape$ می‌باشد اگر و فقط اگر $f:\mathbf{X}\longrightarrow\mathbf{Y}$ یک یکریختی در $PRO-\mathcal{P}$ باشد.

۳.۱ برخی مفاهیم اولیه در توپولوژی جبری

در این بخش به بیان برخی از مفاهیم توپولوژی جبری که در این رساله مورد نیاز است ، می‌پردازیم .

تعریف ۱.۳.۱ زیرفضای $A \subseteq X$ یک توکشیده [۱۸] از X نامیده می‌شود اگر نگاشت پیوسته $r : X \longrightarrow A$ موجود باشد به‌طوریکه $r \circ i = I_A$ که در آن $i : A \longrightarrow X$ نگاشت شمول و I_A نگاشت همانی می‌باشد. همچنین در این حالت نگاشت پیوسته $r : X \longrightarrow A$ را یک توکشنده می‌نامیم.

تعریف ۲.۳.۱ فضای A را توکشیده همسایگی[۱۹] X گوییم، هرگاه مجموعه باز U موجود باشد به‌طوریکه

$$A \subseteq U \subseteq X$$

و A یک توکشیده U باشد.

تعریف ۳.۳.۱ فضای نرمال X را یک توکشیده مطلق [۲۰] می‌گوییم، هر گاه به ازای هر نشاننده[۲۱] X در فضای نرمال Y، مانند $h : X \longrightarrow Y$، به‌طوریکه $h(X)$ در Y بسته باشد، $h(X)$ توکشیده Y باشد.

مثال ۴.۳.۱ I یک توکشیده مطلق است.

تعریف ۵.۳.۱ فضای نرمال X را یک توکشیده همسایگی مطلق [۲۲] می‌گوییم هر گاه به ازای هر نشاننده X در فضای نرمال Y، مانند $h : X \longrightarrow Y$، به‌طوریکه $h(X)$ در Y بسته باشد، $h(X)$ توکشیده همسایگی Y باشد.

قضیه ۶.۳.۱ برای هر فضای X دو گزاره زیر هم ارز می‌باشند.

[۱۸] retract
[۱۹] neighborhood retract
[۲۰] Absolute retract
[۲۱] imbedding
[۲۲] Absolute neighborhood retract