چکیده

در سال ۱۹۷۲ آلفسن و افراس برای اولین بار مفهوم M-ایده‌آل را برای فضاهای باناخ تعریف کرده‌اند در این پایان‌نامه ابتدا به بررسی مفهوم M-ایده‌آل می‌پردازیم و سپس مثال‌هایی از M-ایده‌آل‌ها در فضاهای باناخ مختلف را بررسی می‌کنیم. در ادامه کار محک‌هایی را برای شناسایی M-ایده‌آل‌ها معرفی می‌کنیم. تمرکز اصلی ما روی این مطلب قرار دارد که چه نگاشت‌هایی حافظ M-ایده‌آل هستند و مشاهده می‌شود که یکریختی‌های حافظ M-ایده‌آل لزوماً طولپا نیستند.

قضیه باناخ-استون مطلب دیگری است که مورد مطالعه قرار می‌دهیم. این قضیه بیان می‌کند که اگر بین فضای توابع پیوسته دو فضای هاوسدورف فشرده مانند X و Y یکریختی طولپا وجود داشته باشد آنگاه X و Y با یکدیگر همانریختند. ما با استفاده از نگاشت‌های حافظ M-ایده‌آل صورتی از قضیه باناخ-استون را بیان می‌کنیم که در آن یکریختی بین فضاهای توابع پیوسته لزوماً طولپا نیست.

کلمات کلیدی: M-ایده‌آل، قضیه باناخ-استون، تابع آفین، فضای باناخ، یکریختی، طولپایی، همانریختی

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف اولیه و پیش‌نیازها

در این فصل به بیان تعاریف و قضایای اساسی از آنالیز تابعی که در فصل‌های بعد از آن استفاده خواهد شد، می‌پردازیم.

۱.۱ فضاهای نرم‌دار و جبرها

تعریف ۱.۱.۱. فضای برداری E را یک **فضای نرم‌دار** می‌نامیم هرگاه نگاشت $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ باشد به طوری که

$$x = 0 \leftrightarrow \|x\| = 0$$

$$\|x\| \geq 0 \ \forall x \in E$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in E$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in E.$$

تعریف ۲.۱.۱. فضای نرم‌دار E را که نسبت به متر تعریف شده به وسیله نرمش کامل باشد را **فضای باناخ** گوییم. (یعنی هر دنباله کوشی در آن باید نسبت به نرم همگرا باشد)

تعریف ۳.۱.۱. فضای برداری جزئا مرتب X را یک **مشبکه‌ی برداری** می‌نامیم هرگاه به ازای هر جفت از بردارهای $x, y \in X$، $\sup\{x, y\}$ و $\inf\{x, y\}$ نسبت به رابطه ترتیب جزئی هر دو وجود داشته باشد.

تعریف ۴.۱.۱. فضای برداری A روی میدان اعداد مختلط را یک **جبر مختلط (جبر)** می‌نامند هرگاه عمل ضرب $A \times A \to A$ تعریف شده باشد و دارای خواص زیر برای هر $x, y, z \in A$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ باشد

(a) $x(yz) = (xy)z$،

(b) $(x+y)z = xz + yz$ و $x(y+z) = xy + xz$،

(c) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$.

تعریف ۵.۱.۱. جبر A یک **جبر نرم‌دار** است هر گاه A به عنوان یک فضای برداری نرم‌دار باشد و

$$\forall x, y \in A \qquad \|xy\| \leq \|x\|\|y\|.$$

تعریف ۶.۱.۱. جبر نرم‌دار A را یک **جبر باناخ** گوییم هر گاه A با نرم تعریف شده روی آن یک فضای کامل باشد.

تعریف ۷.۱.۱. اگر جبر باناخ A شامل عنصر یکه e باشد به طوری که $xe = ex = x$ آنگاه A را یک **جبر باناخ یکدار** گوییم.

قضیه ۸.۱.۱. *هرگاه A یک جبر باناخ بدون عضو یکه باشد A را می‌توان در یک جبر باناخ قرار داد که دارای عضو یکه است.*

اثبات. قرار می‌دهیم $A_1 = A \times \mathbb{C}$ و اعمال جبری را وری A_1 به ترتیب زیر تعریف می‌کنیم:

۱. $(a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, \alpha + \beta)$ به ازای هر $a, b \in A$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$،

۲. $\beta(a, \alpha) = (\beta a, \beta\alpha)$ به ازای هر $a \in A$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$،

۳. $(a, \alpha)(b, \beta) = (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta)$ به ازای هر $a, b \in A$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

همچنین تابع $\|\cdot\| : A_1 \to [0, \infty)$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\|(a, \alpha)\| = \|a\| + |\alpha|$$

می‌توان نشان داد که $A_۱$ با این اعمال و نرم تعریف شده تبدیل به یک جبر باناخ با عضو یکه $(۰, ۱)$ می‌شود.

حال تابع $\phi : A \to A_۱$ را با ضابطه $\varphi(a) = (a, ۰)$ تعریف می‌کنیم، داریم:

$$\|\varphi(a)\| = \|(a, ۰)\| = \|a\|$$

بنابراین φ طولپاست، لذا یک به یک نیز هست.

$$\varphi(ab) = (ab, ۰) = (a, ۰)(b, ۰) = \varphi(a)\varphi(b)$$

$$\varphi(a + b) = (a + b, ۰) = (a, ۰) + (b + ۰) = \varphi(a) + \varphi(b)$$

در نتیجه φ از A به $A_۱$ یک همریختی طولپاست یعنی A با یک زیر فضای بسته از $A_۱$ یکریخت می‌باشند.

□

مثال ۹.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد در این صورت تعریف می‌کنیم

$$C(X) = \{f : X \to \mathbb{C} : \text{پیوسته باشد } f\}$$

$$C_b(X) = \{f : X \to \mathbb{C} : \text{پیوسته و کراندار باشد } f\}$$

جمع و ضرب اسکالر را در $C_b(X)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \forall f, g \in C_b(X)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall f \in C_b(X)$$

که $C_b(X)$ را به یک فضای برداری تبدیل می‌کند و با نرم $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$، $C_b(X)$ یک فضای باناخ می‌شود. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای کوشی در $C_b(X)$ باشد. در این صورت

$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \qquad \|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\epsilon}{۲}$$

برای هر $m, n \geq N$ و هر $x \in X$،

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\epsilon}{۲} \qquad (*)$$

یعنی به ازای هر $x \in X$، دنباله $\{f_n(x)\}$ در $\mathbb{C}$ کوشی است. چون $\mathbb{C}$ کامل است بنابراین دنباله $\{f_n(x)\}$ در $\mathbb{C}$ همگراست یعنی تابعی مانند $f : X \to \mathbb{C}$ وجود دارد به طوری که برای هر $x \in X$ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

اگر $n \geq N$ ثابت فرض شود و $m \to \infty$ برای هر $x \in X$ از (*) نتیجه می‌گیریم $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$ یعنی دنباله $\{f_n\}$ روی X به طور یکنواخت به f همگراست و لذا f روی X پیوسته است.

چون $\{f_n\}$ روی X به طور یکنواخت به f همگراست لذا برای $\epsilon = 1$ وجود دارد $k \in \mathbb{N}$ به طوری که به ازای هر $x \in X$، $|f_k(x) - f(x)| < 1$ در نتیجه $|f(x)| \leq 1 + |f_k(x)|$ چون $f_k \in C_b(X)$ بنابراین f روی X کراندار است در نتیجه $f \in C_b(X)$.

مثال ۱۰.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد در این صورت قرار می‌دهیم

$$C_\circ(X) = \{f : X \to \mathbb{C} :\ f \text{ پیوسته و به ازای هر } \epsilon > 0,\ \{x \in X : |f(x)| \geq \epsilon\} \text{ فشرده باشد}\}.$$

مانند آنچه برای $C_b(X)$ نشان داده شد می‌توان دید که $C_\circ(X)$ نیز یک فضای باناخ است.

تعریف ۱۱.۱.۱. اگر A یک جبر باناخ باشد، نگاشت $a \to a^*$ از A به توی A را یک **تابع برگشتی** می‌نامیم هرگاه برای هر a و b در A و اعداد مختلط β و α داشته باشیم:

۱. $(a^*)^*$،

۲. $(ab)^* = b^*a^*$،

۳. $(\alpha a + \beta b)^* = \bar{\alpha}a^* + \bar{\beta}b^*$

a^* را الحاقی a می‌گویند.

اگر $a = a^*$، a را خودالحاق یا هرمیتی و اگر $a^*a = aa^*$، a را نرمال و اگر $a^*a = a^*a = e$، a را یکانی و اگر $a^* = a$ و $a^2 = a$، a را تصویر گوییم.

جبر باناخ A، با تابع گسترش $*$ را یک C^*-جبر می‌نامند هرگاه برای هر $a \in A$ داشته باشیم:

$$\|a^*a\| = \|a\|^۲.$$

مثال ۱۲.۱.۱. اگر X یک فضای فشرده و هاوسدورف باشد جبر باناخ $C(X)$ با تابع گسترشی که به صورت زیر تعریف می‌شود یک C^*-جبر جابجایی است.

$$f^*(x) = \overline{f(x)} \qquad x \in X, f \in C(X).$$

تعریف ۱۳.۱.۱. فرض کنیم R یک مجموعه غیرتهی باشد، همچنین $+$ و $\cdot$، که آنها را به ترتیب جمع و ضرب می‌نامیم دو عمل دو تایی روی R باشند، $(R, +, \cdot)$ را یک **حلقه** گوییم هرگاه:

۱. $(R, +)$ گروه آبلی باشد،

۲. عمل ضرب شرکت‌پذیر باشد

$$\forall a, b, c \in R \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),$$

۳. عمل ضرب روی جمع توزیع‌پذیر باشد

$$\forall a, b, c \in R \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

از این به بعد به جای $a \cdot b$ و $(R, +, \cdot)$ به ترتیب ab و R می‌نویسیم.

اگر $e \in R$ وجود داشته باشد که به ازای هر $a \in R$، $ae = ea = a$، آنگاه e را عضو یکه و R را حلقه یکدار گوییم.

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه و $\emptyset \neq S \subseteq R$، S را یک **زیرحلقه** از R گوییم، هرگاه S همراه با اعمال جمع و ضرب R یک حلقه باشد.

تعریف ۱.۱.۱۵. فرض کنیم R یک حلقه و I زیرحلقه‌ای از R باشد در این صورت I را یک **ایده‌آل چپ** R گوییم اگر به ازای هر $r \in R$ و $a \in I$، $ra \in I$.

I را یک **ایده‌آل راست** R گوییم اگر به ازای هر $r \in R$ و $a \in I$، $ar \in I$.

I را یک **ایده‌آل دو طرفه** R گوییم اگر I ایده‌آل چپ و راست R باشد.

تعریف ۱.۱.۱۶. زیرمجموعه J از جبر مختلط جابجایی A را **ایده‌آل** می‌نامیم هرگاه J زیرفضایی از A باشد و برای هر $x \in A$ و $y \in J$ نتیجه شود $xy \in J$ و J را **ایده‌آل ماکزیمال** گوییم هرگاه J ایده‌آل سره باشد ($J \subsetneqq A$) و J داخل ایده‌آل سره بزرگ‌تر نباشد.

مثال ۱.۱.۱۷. فرض کنید X یک فضای هاوسدورف باشد، ایده‌آل‌های بسته از $C(X)$ همان ایده‌آل‌های جبری بسته هستند که برای زیرمجموعه‌ای بسته از X مانند E داشته باشیم

$$\{f : f \in C(X), f|_E = \circ\},$$

یعنی اینکه یک ایده‌آل بسته، پوچ‌ساز یک زیرمجموعه‌ی بسته از X است اگر برای زیرمجموعه‌ی بسته‌ای از X مانند E تعریف کنیم $I = \{f : f \in C(X), f|_E = \circ\}$، مجموعه I یک ایده‌آل بسته از $C(X)$ است زیرا:

$$\forall g \in C(X), \forall f \in I,\ g \circ f|_E = f \circ g|_E = \circ \rightarrow fg \in I$$

اگر دنباله $\{f_n\}$ در I باشد به طوری که $f_n \longrightarrow f$ (همگرای یکنواخت) خواهیم داشت $f_n|_E \rightarrow f|_E$ بنابراین $f|_E = \circ$ پس $f \in I$ و I بسته است.

مثال ۱.۱.۱۸. ایده‌آل‌های ماکزیمال در $C(X)$ مجموعه‌هایی به فرم

$$M_p = \{f \in C(X) : f(p) = \circ\}$$

برای هر $p \in X$ می‌باشند. با توجه به اینکه $E = \{p\}$ در فضای هاوسدورف X بسته است، بنابه مثال قبل M_p یک ایده‌آل در $C(X)$ است.

(فرض خلف) $I \subseteq J \subsetneqq C(X)$ بنابراین وجود دارد $E \subset X$ به طوری که برای هر $g \in J$ داریم $g|_E = ۰$ ادعا می‌کنیم $I = J$، چون در غیر این صورت وجود دارد $q \in E$ که برای یک $f \in I$، $f(q) \neq ۰$ آنگاه $f|_E \neq ۰$ پس $I \nsubseteq J$. حال اگر $I_۱$ ایده‌آلی از $C(X)$ باشد بنابر آنچه در بالا گفتیم وجود دارد $E_۱ \subset X$ به طوری که برای هر $f \in I_۱$ داریم $f|_{E_۱} = ۰$.

اگر $E_۲$ از حذف نقاطی از $E_۱$ به دست آید انگاه $I_۲ = \{f : f \in C(X), f|_{E_۲} = ۰\}$ یک ایده‌آل از $C(X)$ می‌باشد که $I_۱ \subseteq I_۲$، با ادامه این روند یک زنجیر به دست می‌آید که عضو ماکزیمال آن در نقطه $p \in E$ که آخرین نقطه حذف نشده است به دست می‌آید.

تعریف ۱.۱.۱۹. اگر $\mathcal{A}$ مجموعه‌ای از توابع روی X باشد آنگاه می‌گوییم $\mathcal{A}$ روی X یک **جداسازی** است هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ که $x \neq y$ وجود داشته باشد $f \in \mathcal{A}$ به طوری که $f(x) \neq f(y)$.

تعریف ۱.۱.۲۰. زیرفضای M از فضای $C(X)$ را یک **فضای تابعی** گوییم هرگاه به طور یکنواخت نسبت به نرم بسته و شامل توابع ثابت باشد و یک جداسازی روی X باشد.

تعریف ۱.۱.۲۱. زیر فضای A از $C(X)$ را یک **جبر تابعی** (جبر یکنواخت) گوییم هرگاه A یک فضای تابعی و یک زیرجبر از $C(X)$ باشد.

قضیه ۱.۱.۲۲ (اصل کرانداری یکنواخت(PUB))**.** *اگر X فضای باناخ و Y فضای نرم‌دار باشد و $\mathcal{A} \subseteq B(X, Y)$ آنگاه $\mathcal{A}$ کراندار است اگر و تنها اگر برای هر $x \in X$ مجموعه $\{Ax : A \in \mathcal{A}\}$ کراندار باشد.*

اثبات. رجوع شود به [۱۳]. □

تعریف ۱.۱.۲۳. فرض کنید X یک فضای برداری باشد. نگاشت خطی $P : X \to X$ را **تصویر** در X می‌نامیم اگر $P^۲ = P$. یعنی به ازای هر $x \in X$، $P(Px) = Px$.

تعریف ۱.۱.۲۴. نگاشت $P : X \to X$ را **انقباض** گوییم هرگاه به ازای هر $x \in X$، $\|Px\| \leq \|x\|$.

تعریف ۲۵.۱.۱. اگر X و Y دو فضای نرم‌دار (متریک) باشند نگاشت $T: X \to Y$ **طولپا** است هرگاه به ازای هر $x \in X$، $\|Tx\| = \|x\|$ (به ازای هر $x, y \in X$، $d_x(x,y) = d(T_x, T_y)$)

تعریف ۲۶.۱.۱. فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیک باشند نگاشت $T : X \to Y$ را یک **همانسانی** یا **همانریختی** می‌نامیم هرگاه T دوسویی باشد و نگاشت‌های T و T^{-1} پیوسته باشند. دو فضای توپولوژیک X و Y را همانریخت گویند هرگاه یک همانریختی بین آنها برقرار باشد.

قضیه ۲۷.۱.۱. *فرض کنید X یک فضای نرم‌دار و $\dim X = n < \infty$ آنگاه X با $\mathbb{R}^n$ همانریخت است.*

اثبات. فرض کنیم $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ یک پایه ثابت برای X باشد و $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ چنانچه تعریف کنیم

$$T : \mathbb{R}^n \to X$$
$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

ادعا می‌کنیم که T یک همانریختی است. به سادگی دیده می‌شود که T خطی و خوشتعریف است. فرض کنیم $T_x = 0$ در این صورت $T_x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ لذا برای $1 \le i \le n$، $x_i = 0$ پس $x = 0$ و T یک به یک است.

فرض کنیم $y \in X$ در این صورت $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ اگر قرار دهیم $x = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ آنگاه $T_x = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i = y$ لذا T پوشا است.

فرض کنیم $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ در این صورت با توجه به نابرابری هولدر داریم

$$\|T_x\| = \|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|e_i\| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= c\|x\|_2 \to \|T_x\| \le c\|x\|_2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

یعنی T کراندار است پس T پیوسته است.

اگر تعریف کنیم $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ با ضابطه $\varphi(x) = \|T_x\|$ در این صورت چون نگاشت T و نگاشت نرم پیوسته‌اند لذا φ روی $\mathbb{R}^n$ پیوسته است.

قرار می‌دهیم $A = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$ در این صورت A در $\mathbb{R}^n$ فشرده است. چون φ روی A پیوسته است مینیمم مطلق خود را روی A اختیار می‌کند یعنی $x_0 \in A$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $x \in A$، $\varphi(x_0) \leq \varphi(x)$ یعنی $m = \|T_{x_0}\| \leq \|T_x\|$، در این صورت $m > 0$ زیرا اگر $m = 0$ آنگاه $\|T_{x_0}\| = 0$ پس $T_{x_0} = 0$ و چون T خطی و یک به یک است، پس $x_0 = 0$ و این با فرض $x_0 \in A$ در تناقض است.

فرض کنیم $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ در این صورت $\frac{x}{\|x\|_2} \in A$ پس $\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|_2}\right)\right\| \geq m$ بنابراین

$$\|T_x\| \geq m\|x\|_2 \rightarrow \|x\|_2 \leq \frac{1}{m}\|T_x\| \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

یعنی T^{-1} کراندار است پس پیوسته است. $\square$

نتیجه ۱.۱.۲۸. *اگر X و Y دو فضای نرم‌دار باشند و $\dim X = \dim Y < \infty$ آنگاه X و Y همانریخت هستند.*

۲.۱ فضای دوگان

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید X و Y فضاهای برداری باشند، گوییم عملگر $T : X \rightarrow Y$ خطی است اگر به ازای هر x, y در X و اسکالرهای α و β باشیم

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید X و Y دو فضای نرم‌دار باشند و $T : X \rightarrow Y$ عملگری خطی باشد، آنگاه نرم عملگر T را با $\|T\|$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| \leq 1\}$$

عملگر T را کراندار می‌نامیم هرگاه $\|T\| < \infty$ و آن را بی‌کران می‌نامیم همراه $\|T\| = \infty$.

فضای تمام عملگرهای خطی و کراندار از X به Y را با $L(X, Y)$ و اگر $X = Y$ با $L(X)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۲.۱. عملگرهای خطی از X به توی میدان اسکالر آنها را **تابعک خطی** می‌نامیم. فضای تمام تابعک‌های خطی کراندار روی فضاهای نرم‌دار X را با X^* نشان می‌دهیم.

فرض کنید $x^* \in X^*$، اثر x^* روی x را با $x^*(x)$ یا $\langle x^*, x\rangle$ نشان می‌دهیم، در این صورت با تعریف $\|x^*\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle x^*, x\rangle|$، فضای X^* یک فضای باناخ است که آن را **فضای دوگان** X می‌نامیم. [۱۴]

تعریف ۴.۲.۱. فضای دوگان X^* را با X^{**} نشان می‌دهیم و آن را **دوگان دوم** X می‌نامیم.

فرض کنیم X فضای نرم‌دار مختلط و $x \in X$، به ازای $f \in X^*$ تابع $\hat{x}$ را از X^*به $\mathbb{C}$ چنین تعریف می‌کنیم $\hat{x}(f) = f(x)$ در این صورت $\hat{x} \in X^{**}$. اگر $J : X \to X^{**}$ را با ضابطه $J(x) = \hat{x}$ تعریف کنیم، آنگاه J خطی و طولپاست.

تعریف ۵.۲.۱. نگاشت J در قسمت فوق را **نگاشت طبیعی** گوییم و می‌نویسیم $X \overset{J}{\hookrightarrow} X^{**}$.

تعریف ۶.۲.۱. فضای نرم‌دار X را **انعکاسی** گوییم هرگاه نگاشت J در تعریف قبل پوشا باشد.

تذکر ۷.۲.۱. هر فضای متناهی‌البعد انعکاسی است. [۱۴]

مثال ۸.۲.۱. اگر $1 < p < \infty$ فضای باناخ l_p یک فضای انعکاسی است.

قضیه بعدی قضیه اصل انعکاس موضعی گلداشتاین می‌باشد. این قضیه دارای صورت‌های گوناگونی است ولی ما یک صورت از این قضیه را که منسوب به بهرندز[۱] است بیان می‌کنیم. این قضیه در ادامه بسیار مورد استفاده واقع می‌شود.

قضیه ۹.۲.۱. *فرض کنید X یک فضای باناخ و $F \subseteq X^{**}$ و $G \subseteq X^*$ و $H \subseteq L(X)$ زیرفضاهای متناهی‌البعدی باشند و*

$$F_H := \operatorname{lin}\{h^{**}x^{**} | h \in H, x^{**} \in F\} + F,$$

آنگاه به ازای هر $\epsilon > 0$ یک عملگر $T : F_H \to X$ وجود دارد به طوری که

[۱] Behrends

۱. $T|_{F\cap X} = I$،

۲. $g(Tf) = f(g) \qquad \forall g \in G, \forall f \in F$،

۳. $\|x\| \leq \|T_x\| \leq (1+\epsilon)\|x\| \qquad \forall x \in F_H$،

۴. $\|(hT - T^{**}h)|_F\| \leq \epsilon\|h\| \qquad \forall h \in H$.

اثبات. رجوع شود به [۱۰]. □

۳.۱ قضیه هان-باناخ و نتیجه‌های آن

قضیه ۱.۳.۱ (قضیه‌ی هان-باناخ[۱])**.** *فرض کنید X یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ باشد و $Y \subseteq X$ یک زیرفضای خطی باشد و $p : X \to \mathbb{R}$ یک نگاشت زیرخطی باشد یعنی دارای خواص زیر باشد*

۱. *به ازای هر* $x_1, x_2 \in X$، $p(x_1 + x_2) \leq p(x_1) + p(x_2)$،

۲. *به ازای هر* $x \in X$ *و* $\lambda > 0$، $p(\lambda x) = \lambda p(x)$

و $g : Y \to F$ ($F = \mathbb{R}$ *یا* $F = \mathbb{C}$) *یک تابعک خطی باشد به طوری که به ازای هر* $y \in Y$، $g(y) \leq p(y)$ *آنگاه وجود دارد تابعک خطی* $f : X \to F$ *به طوری که* $f|_Y = g$ *و به ازای هر* $x \in X$، $f(x) \leq p(x)$.

نتیجه ۲.۳.۱. *اگر X یک فضای نرم‌دار باشد و $Y \subseteq X$ زیرفضای خطی و $g : Y \to F$ یک تابعک خطی و کراندار باشد، در این صورت وجود دارد تابعک خطی کراندار $f : X \to F$ به طوری که $f|_Y = g$ و $\|f\| = \|g\|$.*

نتیجه ۳.۳.۱. *اگر X یک فضای نرم‌دار باشد که توسط $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ تولید می‌شود و $g : Y \to F$ با ضابطه‌ی $g\left(\sum_{i=1}^n \beta_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i$ تعریف شود، آنگاه میتوان دید که g یک تابعک خطی است.*

---
[۱] Hahn-Banach

نتیجه ۴.۳.۱. *فرض کنید X یک فضای نرم‌دار باشد آنگاه وجود دارد $f \in X^*$ به طوری که ۱ $= \|f\|$ و به ازای هر $x \in X$، $f(x) = \|x\|$ و نیز به ازای هر $x \in X$،*

$$\|x\| = \sup\{|f(x)| : \|f\| < ۱, f \in X^*\}.$$

اثبات. رجوع کنید به [۱۳]. □

۴.۱ فضاهای توپولوژیک و خواص آن

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنیم X یک مجموعه دلخواه و τ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد در این صورت τ را یک **توپولوژی** روی X می‌نامیم هرگاه

(a) $\emptyset, X \in \tau$،

(b) اشتراک هر دسته متناهی از عناصر τ، عضوی از τ باشد،

(c) اجتماع هر دسته دلخواه از عناصر τ، عضوی از τ باشد.

اگر τ یک توپولوژی روی مجموعه X باشد، آنگاه جفت (X, τ) را یک فضای توپولوژیک می‌نامیم.

$A \subseteq X$ را **باز** می‌نامند هر گاه $A \in \tau$.

$B \subseteq X$ را **بسته** می‌نامند هرگاه $X - B \in \tau$.

تعریف ۲.۴.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد در این صورت

(a) فضای X دارای خاصیت $\mathbf{T_0}$ است هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ که $x \neq y$، همسایگی از یکی از آنها موجود باشد که دیگری را شامل نباشد.

(b) فضای X دارای خاصیت $\mathbf{T_1}$ است هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ که $x \neq y$، همسایگی‌های U و V موجود باشند به طوری که $x \in V$ و $y \in U$. (همسایگی‌ها باید فقط یکی از x یا y را در بر بگیرند)

(c) فضای X دارای خاصیت $\mathbf{T_2}$ (**هاوسدورف**) است هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ که $x \neq y$، همسایگی‌های U و V از x و y موجود باشند به طوری که $U \cap V = \emptyset$.

مثال ۳.۴.۱. فرض کنیم X مجموعه‌ای دلخواه باشد و $\tau = \{X, \emptyset\}$. در این صورت به وضوح τ در شرایط تعریف ۴.۱ صدق می‌کند. بنابراین τ یک توپولوژی ناگسسته در X می‌نامند.

مثال ۴.۴.۱. فرض کنیم X مجموعه‌ای دلخواه باشد و $\tau = P(X)$.

به آسانی دیده می‌شود که τ در شرایط تعریف ۱.۴.۱ صدق می‌کند. این توپولوژی را توپولوژی گسسته در X می‌نامند. واضح است که این توپولوژی بزرگترین توپولوژی ممکن در X است.

مثال ۵.۴.۱. فرض کنیم X مجموعه‌ای دلخواه باشد و $A \subseteq X$. در این صورت $\tau = \{\emptyset, A, X-A, X\}$ یک توپولوژی در X است.

مثال ۶.۴.۱. (a) فضای گسسته دارای خاصیت‌های T_0، T_1 و T_2 می‌باشد.

(b) فضای ناگسسته X که در آن حداقل دو عضو دارد در هیچ یک از خاصیت‌های T_0، T_1 و T_2 صدق نمی‌کند.

(c) فضای $\mathbb{R}$ با توپولوژی معمولی هر سه خاصیت T_0، T_1 و T_2 را دارد.

(d) فضای $\mathbb{R}$ با توپولوژی شعاع راست T_0 است اما T_1 و T_2 نیست.

تعریف ۷.۴.۱. فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژیک باشد و $Y \subseteq X$. در این صورت گردایه‌ی $\{U \cap Y | U \in \tau\}$ یک توپولوژی در Y است، این توپولوژی را **توپولوژی القایی** τ به Y یا **توپولوژی زیرفضایی** در Y می‌نامند.

تعریف ۸.۴.۱. فرض کنیم τ_1 و τ_2 دو توپولوژی روی X باشند در این صورت چنانچه $\tau_1 \subseteq \tau_2$ گوییم τ_1 **ضعیف‌تر** از τ_2 است.

تعریف ۹.۴.۱. فرض کنیم X یک فضای برداری باشد و Ω خانواده‌ای از تابعک‌های خطی روی X باشد به طوری که به ازای هر $x \in X$ که $x \neq ۰$ وجود داشته باشد $f \in \Omega$ که $f(x) \neq ۰$، در این صورت کوچکترین توپولوژی که تحت آن همه توابع Ω پیوسته باشد را با $\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{\Omega})$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۴.۱. فرض کنید $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای نرم‌دار و X^* فضای دوگان X باشد، در این صورت توپولوژی $\sigma(X, X^*)$ را **توپولوژی ضعیف** روی X می‌نامیم. همچنین دنباله $\{x_n\}$ را به x همگرای ضعیف گوییم و می‌نویسیم $x_n \xrightarrow{w} x$ هرگاه

$$\forall f \in X^*, \quad f(x_n) \to f(x).$$

تعریف ۱۱.۴.۱. فرض کنیم X فضای نرم‌دار باشد، ضعیف‌ترین توپولوژی روی X^* که نظیر به آن دسته توابع $\{J(x)\}_{x\in X}$ در X^{**} (J نگاشت طبیعی) پیوسته هستند را **توپولوژی ضعیف ستاره** (wk^*-توپولوژی) روی X^* گوییم و با $\sigma(X^*, X)$ نمایش می‌دهیم. همچنین دنباله $\{f_n\}$ را به f همگرای ضعیف ستاره گوییم و می‌نویسیم $f_n \xrightarrow{w^*} f$ هرگاه

$$\forall x \in X \quad f_n(x) \to f(x).$$

قضیه ۱۲.۴.۱ (باناخ-آلاگلو[۱])**.** *مجموعه $B_{X^*} = \{f \in X^* : \|f\| \leq ۱\}$ نسبت به توپولوژی ضعیف ستاره $\sigma(X^*, X)$ فشرده است.*

اثبات. رجوع کنید به [۶]. $\square$

تعریف ۱۳.۴.۱. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد، تابع مختلط φ را یک **همریختی** از A به توی میدان مختلط گوییم هرگاه به ازای هر x, y در A و جمیع اسکالرهای α و β داشته باشیم

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$$

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y).$$

[۱] Banach-Alaoglu

تعریف ۱۴.۴.۱. فرض کنیم Δ مجموعه‌ی تمام همریختی‌های مختلط روی جبر باناخ A باشد، ضابطه‌ی $\hat{x}(h) = h(x)$ به ازای هر $h \in \Delta$، به هر $x \in A$ تابعی مانند $\hat{x} : \Delta \to \mathbb{C}$ را منتسب می‌سازد، ما $\hat{x}$ را **تبدیل گلفاند**[۲] x می‌نامیم.

مثال ۱۵.۴.۱. فرض کنیم $\hat{A}$ مجموعه تمام $\hat{x}$ها به ازای $x \in A$ باشد. توپولوژی گلفاند Δ، توپولوژی ضعیف القا شده به وسیله‌ی $\hat{A}$ است، یعنی ضعیف‌ترین توپولوژی که هر $\hat{x}$ را پیوسته می‌سازد.

۵.۱ مجموعه‌های محدب و نگاشت آفین

تعریف ۱.۵.۱. زیرمجموعه K از فضای برداری X را محدب می‌نامیم هرگاه به ازای هر $۱ > \lambda > ۰$ و هر $x, y \in K$ داشته باشیم

$$\lambda x + (۱ - \lambda) y \in K.$$

تعریف ۲.۵.۱. فرض کنید X یک فضای برداری و $A \subseteq X$. در این صورت کوچکترین زیرمجموعه محدب X شامل A **پوشش محدب** $\mathbf{A}$ می‌نامند و آن را با $\mathrm{co}(\mathbf{A})$ نمایش می‌دهند و $\mathrm{co}(A) = \cap_{A \subseteq K} K$ که K محدب است.

قضیه ۳.۵.۱. *اگر $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای نرم‌دار باشد و $C \subseteq X$ محدب باشد آنگاه $\bar{C}$ محدب است.*

اثبات. رجوع کنید به [۱۳]. □

تعریف ۴.۵.۱. اگر K مجموعه‌ای محدب باشد، نگاشت $T : K \to \mathbb{C}$ را یک نگاشت آفین گوییم هرگاه برای هر $x_i \in K$ و $\alpha_i \geq ۰$ که $\sum \alpha_i = ۱$ داشته باشیم:

$$T(\sum \alpha_i x_i) = \sum \alpha_i T(x_i)$$

مجموعه تمام توابع آفین روی K را با $A(K)$ نمایش می‌دهیم.

---
[۲] Gelfand

مثال ۱.۵.۵. تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = ax + b$، که در آن a, b دو عدد ثابت حقیقی‌اند، آفین است.

فصل ۲

تعاریف و قضایای اساسی

۱.۲ M - ایده‌آل‌ها

در این فصل ابتدا به معرفی مفهوم M - ایده‌آل می‌پردازیم و سپس مثال‌هایی از M - ایده‌آل‌ها را ارائه می‌دهیم. در ادامه محک‌هایی را برای شناسایی M - ایده‌آل‌ها می‌آوریم و در پایان به بررسی نگاشت‌های حافظ M - ایده‌آل می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنید X یک فضای باناخ (حقیقی یا مختلط) باشد. J زیرفضای بسته X را یک **L - جمعوند** (**M - جمعوند**) گوییم هرگاه یک زیرفضای بسته

$$J^{\perp} = \{x^* \in X^* : x^*(y) = ۰ \ \forall y \in J\}$$

وجود داشته باشد به طوری که X مجموعه مستقیم جبری J و $J^{\perp}$ باشد و

$$\|x + x^*\| = \|x\| + \|x^*\| \quad \forall x \in J, x^* \in J^{\perp}$$

$$(\|x + x^*\| = \max\{\|x\|, \|x^*\|\} \quad \forall x \in J, x^* \in J^{\perp})$$

در حالتی که J یک L - جمعوند باشد می‌نویسیم

$$X = J \oplus_{۱} J^{\perp}$$

و در حالتی که J یک M - جمعوند باشد می‌نویسیم

$$X = J \oplus_{\infty} J^{\perp}.$$